

コンクリート合成桁の収縮応力について

正員 角田 与史雄*

学生員 ○北 村 邦 雄**

1. 序 言

近年、コンクリート構造物の施工における品質管理の効率化や施工期間の短縮等が要請されることが多くなり、それに応じてコンクリート合成桁の使用が増加する傾向にある。コンクリート合成桁はプレキャスト鉄筋コンクリートまたはプレストレストコンクリート桁と場所打ちコンクリートスラブを一体化したものであり、従って新、旧コンクリート間のせん断耐力とともに、2つの異なるコンクリートの収縮およびクリープによる内部応力および変形が重要な問題である。

コンクリート構造物における収縮およびクリープの影響に関しては、Dischinger¹⁾ がその数学的取扱いを示して以来、多くの理論的解析例^{2)~7)}が行なわれているが、その多くはプレストレストコンクリート桁および鋼合成桁に関するものである。コンクリート合成桁に関しては Busemann の図解法⁸⁾のほか、鉄筋の拘束作用を無視し、かつコンクリートのクリープの影響を弾性係数値に換算する近似解^{9)~11)}が与えられている。

本文はコンクリート合成桁の収縮等の影響に関する厳密解法および簡便な近似解を示し数値計算を用いて収縮応力の性質について調べたものである。

2. 合成桁の収縮等による応力の解法

2.1 計算上の仮定

- a) コンクリートのクリープ係数 φ および収縮率 ω の時間的変化は相似であり、かつ新コンクリート (C_1) と旧コンクリート (C_2) との間にも相似関係が成り立つ。

すなわち

$$\left. \begin{aligned} & \text{新コンクリート; } \varphi_1 = \varphi \\ & \omega_1 = \frac{\omega_{1\infty}}{\varphi_{1\infty}} \varphi = \tilde{\gamma}_1 \varphi \\ & \text{旧コンクリート; } \varphi_2 = \frac{\varphi_{2\infty}}{\varphi_{1\infty}} \varphi = \alpha \varphi \\ & \omega_2 = \frac{\omega_{2\infty}}{\varphi_{1\infty}} \varphi = \tilde{\gamma}_2 \varphi \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\text{ここに, } \tilde{\gamma}_1 = \frac{\omega_{1\infty}}{\varphi_{1\infty}}, \alpha = \frac{\varphi_{2\infty}}{\varphi_{1\infty}}, \tilde{\gamma}_2 = \frac{\omega_{2\infty}}{\varphi_{1\infty}} = \alpha \tilde{\gamma}_1$$

- b) コンクリートの弾性応力—弾性歪は比例関係にある。
c) コンクリートには常にひびわれが生じていない。
d) クリープおよび収縮の開始後には、鉄筋とコンクリート間には平面保持の法則が成り立つ。
e) コンクリートの弾性係数 E_c は時間的に変化しない。

2.2 厳密解法

図-1のごとく、合成断面 (i) を新コンクリート (c_1)、旧コンクリート (c_2) および鉄筋 (s) の3つのエレメントに分割して考える。合成断面および各エレメントの断面積、断面2次モーメントをそれぞれ $A_i, A_{c1}, A_{c2}, A_s; I_i, I_{c1}, I_{c2}, I_s$ とするとき

$$\left. \begin{aligned} A_i &= A_{c1} + n_{c2} A_{c2} + n_s A_s \\ I_i &= I_{c1} + A_{c1} y_{c1}^2 + n_{c2} (I_{c2} + A_{c2} y_{c2}^2) \\ &\quad + n_s (I_s + A_s y_s^2) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\text{ここに, } n_{c2} = \frac{E_{c2}}{E_{c1}}, \quad n_s = \frac{E_s}{E_{c1}}$$

なお、 y は A_i 断面の重心より下向きを正とし、また A_s, I_s はすべての鉄筋 (図-1 では $A_{s1} \sim A_{s4}$) を含めたものである。

初期応力を各エレメントの重心に働く軸力 N_{c10} 等およびモーメント M_{c10} 等に分割して考える (図-2)。ここに N

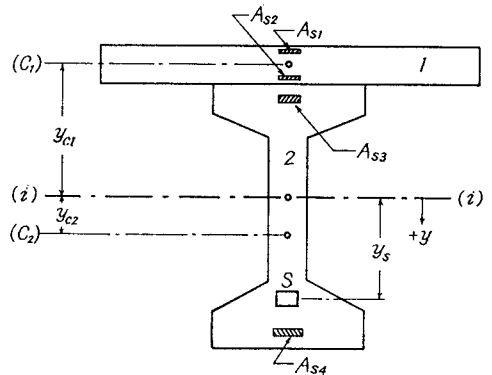


図-1

* 北海道大学工学部 助教授 工博

** 北海道大学大学院工学研究科

は圧縮を正、 M は下側引張の場合を正とする。

いま、クリープおよび収縮によって各エレメントに付加される力を $N_{c1\varphi}$, $N_{c2\varphi}$, $N_{s\varphi}$; $M_{c1\varphi}$, $M_{c2\varphi}$, $M_{s\varphi}$ で表わせば次の関係が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} N_{c1\varphi} + N_{c2\varphi} + N_{s\varphi} &= 0 \\ M_{c1\varphi} + M_{c2\varphi} + M_{s\varphi} - (N_{c1\varphi} y_{c1} + N_{c2\varphi} y_{c2} \\ &+ N_{s\varphi} y_s) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

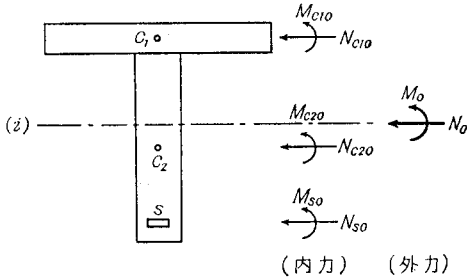
そのとき各エレメントに働く力の合計は

$$\left. \begin{aligned} N_{c1} &= N_{c10} + N_{c1\varphi} \\ &\dots\dots\dots \\ M_{c1} &= M_{c10} + M_{c1\varphi} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

従って、内力と外力との釣合式は式 (3) を含めて次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} N_{c1} + N_{c2} + N_s &= N_0 \\ M_{c1} + M_{c2} + M_s - (N_{c1} y_{c1} + N_{c2} y_{c2} \\ &+ N_s y_s) = M_0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ただし、 N_0 , M_0 は新コンクリート合成前に作用した力もすべて A_i 断面に働く力に換算したもので実際の設計においては合成前および合成後に働く荷重に対して個々に内力を求め、その合成したものととして N_{c10} , M_{c10} 等を求めることになる。



図—2

いま、各エレメントが相互に拘束されない状態にあると考えれば、任意時刻 t から $t+dt$ までの間に塑性変形したエレメント c_1 , c_2 を変形前の位置に戻すために必要とする力を $dN_{c1\varphi}$, $dM_{c1\varphi}$ 等とする。次に、これらの力を逆向きに A_i 断面の重心位置にかける力 $dN_{s\varphi}$, $dM_{s\varphi}$ によって生ずる各エレメントの力を $dN_{c1\varphi}$, $dM_{c1\varphi}$, ... 等とすれば dt 時間内の各エレメントの力の変化は実際に生ずる 2 次応力に対して次のような 6 個の微分方程式を得る。ただし $dN_{s\varphi}$, $dM_{s\varphi}$ は零である。

$$\left. \begin{aligned} dN_{c1} &= dN_{c1\varphi} + dN_{c1\varphi} \\ &\dots\dots\dots \\ dM_{c1} &= dM_{c1\varphi} + dM_{c1\varphi} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(6) 式において (3) 式の条件式が利用できるので実際には次の連立四元微分方程式 (7) を与えられた初期条件 (13) で解けば十分である。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_{c1}}{d\varphi} + (1-s_{11}) N_{c1} - \alpha s_{21} N_{c2} + t_1 M_{c1} \\ + \alpha t_1 M_{c2} &= -(1-s_{11}) R + s_{21} R_2 \\ \frac{dN_{c2}}{d\varphi} - s_{12} N_{c1} + \alpha (1-s_{22}) N_{c2} + t_2 M_{c1} \\ + \alpha t_2 M_{c2} &= s_{12} R_1 - (1-s_{22}) R_2 \\ \frac{dM_{c1}}{d\varphi} + u_{11} N_{c1} + \alpha u_{21} N_{c2} + (1-z_1) M_{c1} \\ - \alpha z_1 M_{c2} &= -u_{11} R_1 - u_{21} R_2 \\ \frac{dM_{c2}}{d\varphi} + u_{12} N_{c1} + \alpha u_{22} N_{c2} - z_2 M_{c1} \\ + \alpha (1-z_2) M_{c2} &= -u_{12} R_1 - u_{22} R_2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここに、

$$R_1 = r_1 A_{c1} E_{c1}, \quad R_2 = r_2 A_{c2} E_{c2} \quad (8)$$

$$t_1 = \frac{A_{c1} y_{c1}}{I_i}, \quad t_2 = \frac{n_{c2} A_{c2} y_{c2}}{I_i} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{11} &= \frac{I_{c1} y_{c1}}{I_i}, \quad u_{21} = \frac{I_{c1} y_{c2}}{I_i}, \\ u_{12} &= \frac{n_{c2} I_{c2} y_{c1}}{I_i}, \quad u_{22} = \frac{n_{c2} I_{c2} y_{c2}}{I_i} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$z_1 = \frac{I_{c1}}{I_i}, \quad z_2 = \frac{n_{c2} I_{c2}}{I_i} \quad (11)$$

および影響係数は、

$$\left. \begin{aligned} s_{11} &= A_{c1} \left(\frac{1}{A_i} + \frac{y_{c1}^2}{I_i} \right) \\ s_{21} &= A_{c1} \left(\frac{1}{A_i} + \frac{y_{c1} y_{c2}}{I_i} \right) \\ s_{22} &= n_{c2} A_{c2} \left(\frac{1}{A_i} + \frac{y_{c2}^2}{I_i} \right) \\ s_{12} &= n_{c2} A_{c2} \left(\frac{1}{A_i} + \frac{y_{c1} y_{c2}}{I_i} \right) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

また、初期条件は、

$$\left. \begin{aligned} \varphi = 0 \text{ にて } N_{c1} &= N_{c10}, \quad N_{c2} = N_{c20} \\ M_{c1} &= M_{c10}, \quad M_{c2} = M_{c20} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

従って、(7) 式を直接積分することにより厳密解が得られる。

2.3 収縮応力の近似解法

ここに示す解法は、収縮応力に対するクリープの影響をコンクリート弾性係数に換算する近似解法である。

いま、任意位置のコンクリートの収縮応力を σ_{cs} とすれば

$$\sigma_{cs} = f(\varphi) \quad (14)$$

関数 $f(\varphi)$ は、厳密には式 (7) の解より指数関数、すなわち、

$$f(\varphi) = \sum_{i=1}^4 A_i (1 - e^{-B_i \varphi}) \quad (15)$$

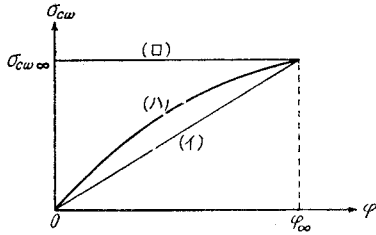


図-3

この時間的経過は図-3の直線(イ)および(ロ)の中間(ハ)である。いま、クリープ変形を見かけ上の弾性変形とみなせば、コンクリートの換算弾性係数は一般に次式で表わされる。

$$E'_e = \frac{E_c}{1 + \kappa \varphi_\infty} \quad (16)$$

ここに、係数 κ は関数 $f(\varphi)$ によって定まり、限界曲線(イ)に対して0.5、曲線(ロ)に対しては1の値をとる。従って一般には、 $0.5 < \kappa < 1$ であるが、通常0.5に近い値をとるので、ここでは近似的に $\kappa = 0.5$ とする。

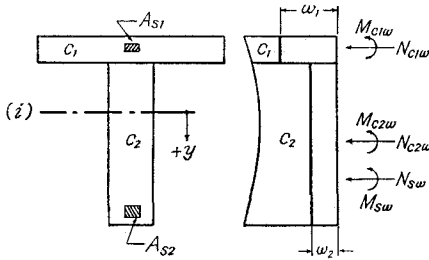


図-4

前述の厳密解法の場合と同様な方法により N_{c1w} , M_{c1w} の計算式を誘導すれば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} N_{c1w} &= -W_1 + \frac{A_{c1}}{A_g} (W_1 + W_2) \\ &\quad + \frac{A_{c1} y_{c1}}{I_g} (W_1 y_{c1} + W_2 y_{c2}) \\ N_{c2w} &= -W_2 + \frac{n_{c2} A_{c2}}{A_g} (W_1 + W_2) \\ &\quad + \frac{n_{c2} A_{c2} y_{c2}}{I_g} (W_1 y_{c1} + W_2 y_{c2}) \\ M_{c1w} &= -\frac{I_{c1}}{I_g} (W_1 y_{c1} + W_2 y_{c2}) \\ M_{c2w} &= -\frac{n_{c2} I_{c2}}{I_g} (W_1 y_{c1} + W_2 y_{c2}) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ここに、

$$W_1 = A_{c1} E'_{c1} \omega_1, \quad W_2 = A_{c2} E'_{c2} \omega_2 \quad (18)$$

ただし、 A_g , I_g は式(2)によるが $n_{c2} = \frac{E'_{c2}}{E'_{c1}}$, $n'_s = \frac{E_s}{E'_{c1}}$ である。

3. 数値計算および考察

図-5および表-1に示す断面について、(7)式の数値積分による厳密解法、(17)式による近似解法、および Birkeland の近似解法の3つの方法によって数値計算を行なった。

なお Birkeland の方法は鉄筋の拘束作用の影響を無視し、かつ(16)式において $\kappa = 1$ とする方法である。

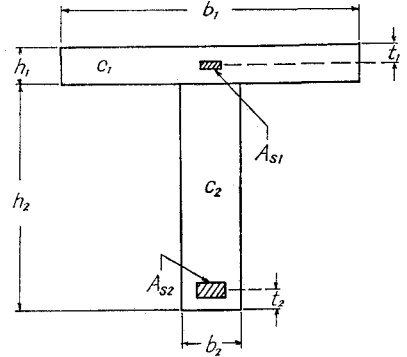


図-5

表-1

断 面	b_1 (m)	h_1 (m)	b_2 (m)	h_2 (m)
A	2.0	0.2	0.4	1.0
B	2.0	0.2	0.4	1.5
C	2.0	0.2	0.4	2.0
D	1.0	0.2	0.4	1.5
E	3.0	0.2	0.4	1.5

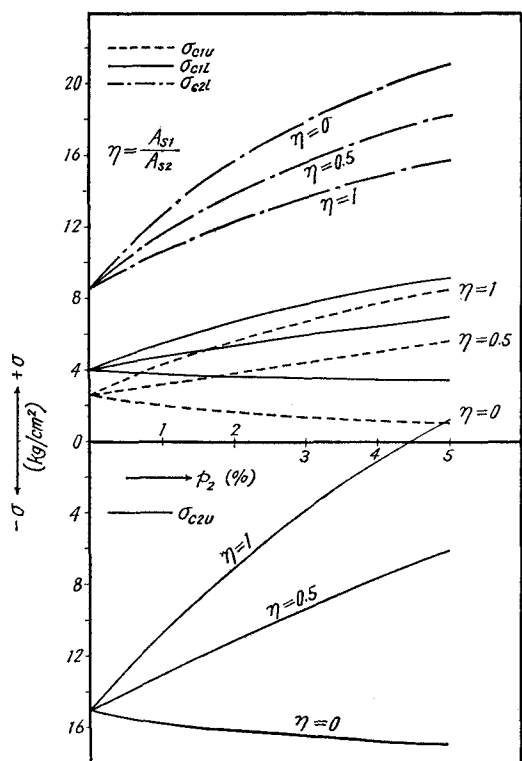
ここでは、 $\varphi_1 = 3.0$, $\omega_1 = 21 \times 10^{-5}$, $\varphi_2/\varphi_1 = \omega_2/\omega_1 = 0.5$, $n_{c2} = 2$, $n_s = 8.4$ とした。また、鉄筋量は各断面について $p_2 = \frac{A_{s2}}{A_{c2}} = (0 \sim 5)\%$, $\eta = \frac{A_{s1}}{A_{s2}} = (0, 0.5, 1.0)$ に変化させ、その位置は $t_1 = 0.5h_1$, $t_2 = 0.1h_2$ とした。

なお、新、旧コンクリートの上縁および下縁の収縮による応力度(圧縮を正にとる)をそれぞれ σ_{c1u} , σ_{c1l} , σ_{c2u} および σ_{c2l} とする。

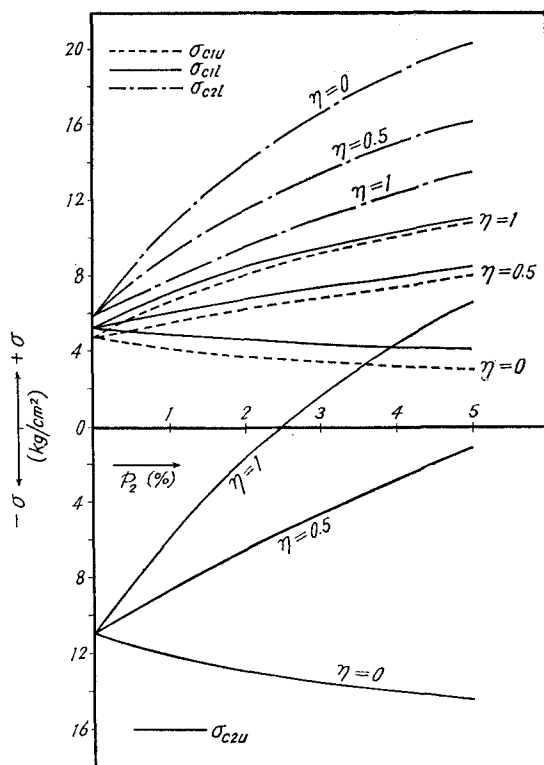
3.1 鉄筋の影響を考慮する場合

図-6~10は各断面についての厳密解による計算結果を示したものである。

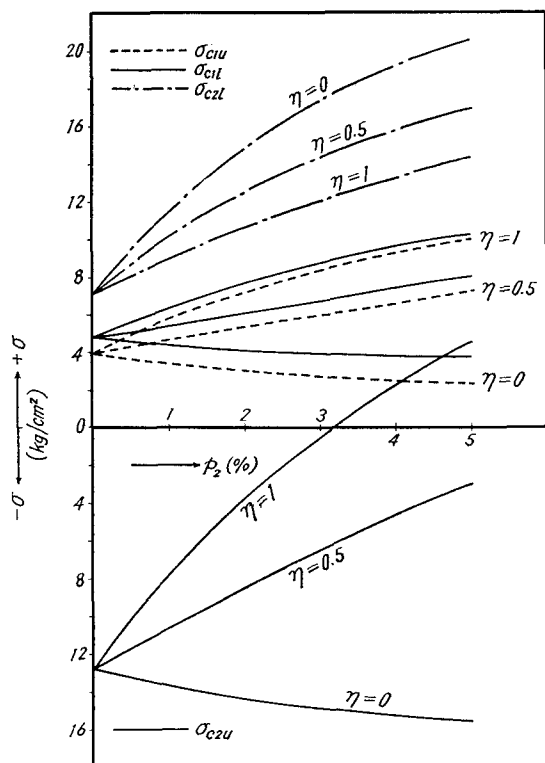
これより、一般に、i) h_2 が大きくなると $[\sigma_{c1} \rightarrow \text{大}, \sigma_{c2} \rightarrow \text{小}]$ となり、 b_1 が大きくなると $[\sigma_{c1} \rightarrow \text{小}, \sigma_{c2} \rightarrow \text{大}]$ となること、ii) 旧コンクリートの鉄筋量 (A_{s2}) が増すに従って $[\sigma_{c1} \rightarrow \text{小}, \sigma_{c2} \rightarrow \text{大}]$ となること、iii) 新コンクリートの鉄筋量 (A_{s1}) が増すに従って $[\sigma_{c1} \rightarrow \text{大}, \sigma_{c2} \rightarrow \text{小}]$ となるが、 σ_{c2l} を除いては A_{s1} の影響は上述 ii) の効果を打消すほど大きいことなどがわかる。



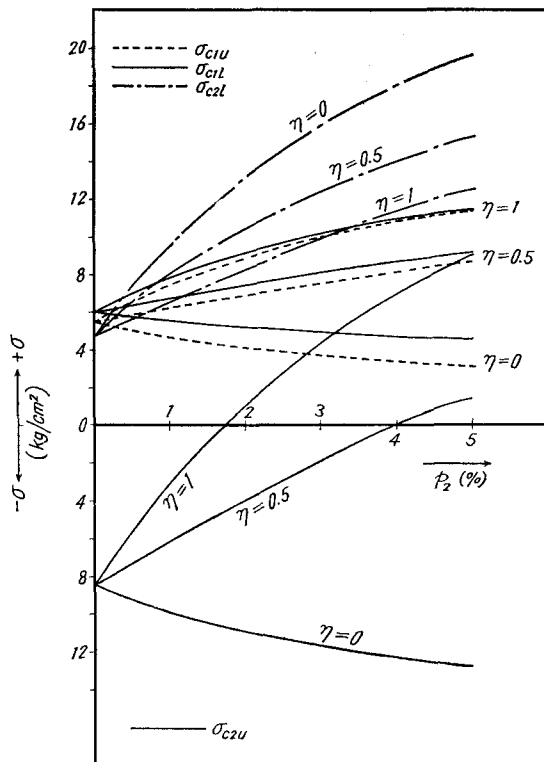
图—6 A 断面



图—7 B 断面



图—8 C 断面



图—9 D 断面

表-2

η	p_2	σ_{c1u} (kg/cm ²)		σ_{c1l} (kg/cm ²)		σ_{c2u} (kg/cm ²)		σ_{c2l} (kg/cm ²)	
		厳密解	近似解	厳密解	近似解	厳密解	近似解	厳密解	近似解
$\eta=0$	0	-4.0	-4.4	-4.8	-5.5	12.8	14.4	-7.0	-7.8
	0.01	-3.4	-3.9	-4.5	-5.2	13.7	15.3	-11.4	-12.3
	0.02	-3.1	-3.5	-4.2	-4.9	14.3	15.9	-14.7	-15.5
	0.03	-2.8	-3.2	-4.1	-4.8	14.8	16.4	-17.2	-17.9
	0.04	-2.5	-2.9	-3.9	-4.6	15.2	16.7	-19.1	-19.8
	0.05	-2.4	-2.7	-3.8	-4.5	15.5	17.0	-20.6	-21.4
$\eta=0.5$	0.01	-4.7	-5.2	-5.5	-6.3	10.6	12.0	-10.1	-10.7
	0.02	-5.4	-6.0	-6.2	-7.1	8.5	9.8	-12.5	-12.8
	0.03	-6.0	-6.8	-6.8	-7.8	6.5	7.7	-14.3	-14.5
	0.04	-6.6	-7.4	-7.4	-8.5	4.7	5.9	-15.8	-15.8
	0.05	-7.2	-8.1	-8.0	-9.1	3.0	4.1	-17.0	-16.9
$\eta=1.0$	0.01	-5.8	-6.4	-6.4	-7.3	7.8	9.2	-8.9	-9.4
	0.02	-7.2	-7.9	-7.7	-8.7	3.8	5.2	-10.6	-10.9
	0.03	-8.3	-9.2	-8.8	-9.8	0.5	1.9	-12.1	-12.2
	0.04	-9.3	-10.2	-9.7	-10.8	-2.2	-0.8	-13.3	-13.4
	0.05	-10.0	-11.0	-10.4	-11.6	-4.5	-3.1	-14.4	-14.5

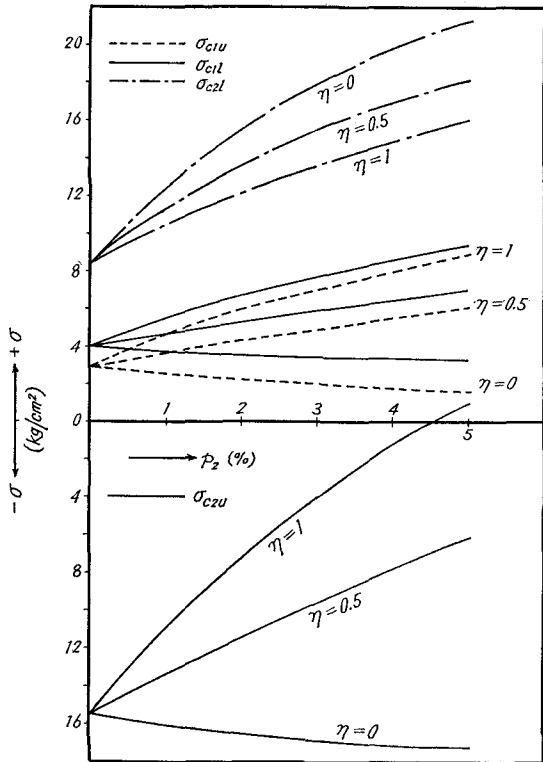


図-10 E 断面

また、(17)式による近似解を厳密解と B 断面について比較すれば表-2のごとくである。

これより、近似解は厳密解よりわずかに大きな応力を与えるが、両者は非常に良く近似しており、電子計算機を使用しなくても容易に計算できる近似解は、十分に実用的であることがわかる。

3.2 鉄筋の影響を無視する場合

次に、Birkeland の方法による値を厳密解と比較すれば表-3に示す通りである。

表-3

断面		σ_{c1u} (kg/cm ²)	σ_{c1l} (kg/cm ²)	σ_{c2u} (kg/cm ²)	σ_{c2l} (kg/cm ²)
A	厳密解	-2.6	-4.0	15.1	-8.5
	Birkeland の方法	-1.9	-3.0	11.3	-6.3
B	厳密解	-4.0	-4.8	12.8	-7.0
	Birkeland の方法	-3.0	-3.6	9.6	-5.2
C	厳密解	-4.8	-5.3	10.9	-5.8
	Birkeland の方法	-3.6	-4.0	8.2	-4.4
D	厳密解	-5.5	-6.0	8.5	-4.6
	Birkeland の方法	-4.2	-4.6	6.4	-3.5
E	厳密解	-3.0	-4.0	15.4	-8.3
	Birkeland の方法	-2.3	-3.0	11.5	-6.2

これより、Birkeland の方法は厳密解に比して、一般に過小な値を与えることがわかる。前述の鉄筋量の影響が大きいことを考慮すれば、Birkeland の方法は、鉄筋量の大きい場合には適用できないことが明らかである。

以上を総括すれば次の通りである。

(1) 収縮応力は、コンクリート断面の寸法によっても異なるが、一般に A_{s1} は σ_{e1} に、また A_{s2} は σ_{e2} に大きな影響を及ぼす。従って、一般に鉄筋の拘束の影響を無視することはできない。

(2) (17) 式による近似解法は、非常に良い近似値を与える。

参 考 文 献

- 1) Dischinger: Elastische und Plastische Verformungen der Eisenbetontragwerke und insbesondere der Bogenbrücken, Bauing., 1939.
- 2) Fröhlich: Theorie der Stahl-verbund-Tragwerke, Bauing., 1950.
- 3) Walter: Der Einfluss des Schwindens und Kriechens bei Verbundträgern, B.u.Sb., 1952.
- 4) Busemann: Kriechberechnung von Verbundträgern unter Benutzung von zwei Kriechfasern, Bauing., 1950.
- 5) Knittel: Der Einfluss der Kriechens und Schwindens auf der Spannungszustand in Tragwerken aus vorgespanntem Beton, Bauing., 1954.
- 6) Sattler: Kriechen und Schwinden bei vorgespannten Verbund-Stahlbetonkonstruktionen und beliebigen Stahlträgers-Verbund-Konstruktionen, B.u.Sb., 1954.
- 7) Leonhardt: Spannbeton für die Praxis, Verlag Wilhelm Ernst u. Sohn, 1955.
- 8) Busemann, Baldauf: Spannungsumlagerungen infolge von Kriechen und Schwinden in Verbundkonstruktionen aus Vorgespannten Fertigteilen und Ortbeton, B.u.Sb., 1963.
- 9) Barkeland: Differential Shrinkage in Composite Beams, ACI Journal, 1960.
- 10) Rühle: Die Ermittlung der zeitabhängigen Eigenspannung in Verbund Konstruktionen aus Stahlbetonfertigteilen mit Ortbeton, Baupl. u. Bautech., 1954.
- 11) Brason, Ozell: Discussion of "Differential Shrinkage in Composite Beams," by Birkeland, ACI Journal, Part 2, 1960.