土木学会北海道支部　研究発表論文集　昭和 43 年度

歩行者の横断待ち解析に関する一考察

正員　山村悦夫*

1. 緒　　言

交通事故による死傷者数は毎年増加の一途を続けており過去 10 年についてみると，その増加率は登録自動車台数の増加率を上回っている。

これらの事故の中で，人身事故として最も問題の多いのは，人対自動車の事故である。

一般に，人対自動車の事故は一方の当事者が無防備の人間であるということから死亡事故，あるいは重傷事故に直結している。

従って，これらの事故防止対策としては，基本的には，人と車とを分離する歩車道分離の道路計画によらなければならない。

しかし，現状では早急の実現は無理であるので，たとえば横断歩道橋，安全島の整備が重要と思われる。

特に，都市地域における急激な道路環境の変化により，幅員の大きい道路などには，歩道をはじめ，安全島 (歩行者が車道横断中に車道の中央で立往生しても安全に一時待避できる施設) が必要と思われる。

最近，第 2 京浜では人対自動車事故率は，道路交通環境の整備により低下し，特に，安全島は各所に設けられ横断の安全に役立っている。

この研究においては，これらの施設を設置する基礎として，歩行者が交差点において，主要道路の車の流れの間を横断する場合の横断待ち理論について考察する。

車に対する，最も基本的なモデルについては，かなり研究が進んでいる。

この小論においては，特に，安全島が設けられている場合とそうでない場合の歩行者の待ち時間にどのような影響をあたえるかを考察する。

2. 安全島の設けられていない場合の横断待ち解析

まず，待ち合せモデルの理論的取り扱いとして，次の条件を満すものとする。

主要道路は，交差点で一般道路と交わっている。

主要道路の車は一般道路の歩行者に対して，優先して交差点を通過し，ランダムに致着するものとする。

そして，一般道路の歩行者は主要道路の前の車との間隔が α (秒) 以内では交差点に入ることができない。

歩行者は $(\alpha,\ \alpha+T)$ の間隔の間に主要道路を横断できるものとする。

主要道路の車の車頭間隔が α より小さい場合を車の群とみなし，その車群の通過している場合は歩行者は横断できないものとする。

そこで，定式化のため次の関数を定義する。

q: 主要道路における単位時間当りの交通量
q_3: 一般道路における歩行者の単位時間当りの交通量
T: 主要道路を横断するのに要する時間

主要道路の車の致着はランダムであるので，車頭間隔 t の分布は次のようになる。

$$F(t) = q\cdot\exp(-q\cdot t) \quad (0<t<\infty) \tag{1}$$

車群の間隔 y の分布の母函数 $M(t)$ は，

$$M(t) = E(e^{ty}) = (q-t)/\{q-t\cdot\exp(\alpha\cdot q-\alpha\cdot t)\} \tag{2}$$

(2) 式より，

$$E(y) = \{\exp(q\cdot\alpha)-1\}/q \tag{3}$$

$$E(y^2) = 2\exp(q\cdot\alpha)\{\exp(q\cdot\alpha)-\alpha\cdot q-1\}/q^2 \tag{4}$$

そこで，一般道路の歩行者の交差点での待ち時間 W_q を求める。

そこで，次の関数を定める。

P_i: 主要道路の車が交差点を通過した後に $i+1$ の歩行者が待っている状態
p_i: 同上の場合の確率
X: 同上の条件で歩行者が待っていない状態
p_x: 同上の場合の確率

次に，状態確率と推移確率は次の関係式を満す。

$$p_x+\sum_{i=0}^{\infty}p_i = 1 \tag{5}$$

$$\pi_{i,x}+\sum_{j=1}^{\infty}\pi_{i,j} = 1 \quad (i=x,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{6}$$

状態確率と推移確率との関係は，

$$\begin{aligned} p_x &= p_x\cdot\pi_{x,x}+p_0\cdot\pi_{0,x} \\ p_0 &= p_x\cdot\pi_{x,0}+p_0\cdot\pi_{0,0}+p_1\cdot\pi_{1,0} \\ p_1 &= p_x\cdot\pi_{x,1}+p_0\cdot\pi_{0,1}+p_1\cdot\pi_{1,1}+p_2\cdot\pi_{2,1} \\ &\text{etc.} \end{aligned} \tag{7}$$

* 北海道大学工学部助手

ただし，

$\pi_{i,j}=0 \quad (i>j+1) \qquad \pi_{i,x}=0 \quad (i>0)$

そこで，y 時間に一般道路の i 人の歩行者が致着する確率を $f_i(y)$ とすると，

$$f_i(y)=e^{-q_3 y}\cdot(q_3\cdot y)^i/i\,! \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{8}$$

$$\pi_{x,x}=\frac{q}{q+q_3}\int f_0(y)\,dF(y) \tag{9}$$

$$\pi_{x,0}=\frac{q}{q+q_3}\int f_1(y)\,dF(y)+\frac{q_3}{q+q_3} \tag{10}$$

$$\pi_{x,i}=\frac{q}{q+q_3}\int_{i+1} f(y)\,dF(y) \quad (i=1,\ 2,\ \cdots) \tag{11}$$

次に，

E_x: 車群の期待間隔の時間

F_x: 同上の間隔の時間での歩行者の全待ち時間

$$E_x=\frac{1+q\cdot E(y)}{q+q_3} \tag{12}$$

$$F_x=\frac{q\cdot q_3\cdot E(y_2)}{2(q+q_3)} \tag{13}$$

$$\pi_{0,x}=\pi_{x,x} \tag{14}$$

$$\pi_{0,0}=q\cdot\exp\{-T\cdot(q+q_3)\}\cdot\int f_1(y)\,dF(y)/(q+q_3)+\int_0^T\int q\cdot\exp(-q\cdot t)f_1(t+y)\,dF(y)\,dt$$
$$+q_3\cdot\{1+T\cdot(q+q_3)\}\cdot\exp\{-T\cdot(q+q_3)\}/(q+q_3) \tag{15}$$

$$\pi_{0,j}=q\cdot\exp\{-T(q+q_3)\}\cdot\int f_{j+1}(y)\,dF(y)/(q+q_3)+\int_0^T\int q\cdot\exp(-q\cdot t)f_{j+1}(t+y)\,dF(y)\,dt$$
$$+\exp(-T\cdot q)f_{j+1}(T) \tag{16}$$

$$E_0=Y\cdot[1-\exp(-T\cdot q)+q\cdot\exp\{-T(q+q_3)\}/(q+q_3)] \tag{17}$$

$$F_0=(1/2)\cdot q_3\cdot E(y^2)\cdot E_0/Y+q_3\cdot Y[1-(1+T\cdot q)\exp(-T\cdot q)]/q \tag{18}$$

$$\pi_{i,j}=\exp(-T\cdot q)\cdot f_{j-i+1}(T)+\int_0^T\int q\cdot\exp(-q\cdot t)f_{j-i+1}(t+y)\,dF(y)\cdot dt \tag{19}$$

$$E_i=Y\{1-\exp(-T\cdot q)\} \tag{20}$$

$$F_i=(1/2\cdot q_3)\cdot E(y^2)\{1-\exp(-T\cdot q)\}+i\cdot E_i+q_3\cdot Y\exp(-T\cdot q)\cdot\{\exp(T\cdot q)-T\cdot q-1\}/q \quad (i=1,\ 2,\ \cdots) \tag{21}$$

ここで，$Y=E(y)+1/q$ (22)

そこで，一般に平均の待ち時間は，

$$W_q=\frac{1}{q_3}\,\frac{p_x\cdot F_x+p_0\cdot F_0+\cdots}{p_x\cdot E_x+p_0\cdot E_0+\cdots} \tag{23}$$

分母には次の関係式が成り立つ。

$$p_x\cdot E_x+p_0\cdot E_0+\cdots=(1-p_x)/q_3=Y[\{1-\exp(-T\cdot q)\}(1-p_x)+q\cdot\{p_x+p_0\cdot\exp(-T\cdot q-T\cdot q_3)\}/(q+q_3)] \tag{24}$$

$$(1-p_x)[1/(q_3\cdot Y)-\{1-\exp(-T\cdot q)\}]=q\cdot[p_x+p_0\exp\{-T(q+q_3)\}]/(q+q_3) \tag{25}$$

(23) 式と (24) 式より

$$W_q=[p_x\cdot F_x+p_0\cdot F_0+\cdots]/(1-p_x) \tag{26}$$

したがって，

$$W_q=(1/2)\cdot E(y^2)/Y+Y[-T\cdot q\cdot\exp(-T\cdot q)+\{1-\exp(-T\cdot q)\}\cdot\{q_3/q+(\sum_{i=1}^{\infty} ip_i/(1-p_x)\}] \tag{27}$$

ここで，

$$(\sum_{i=1}^{\infty} ip_i)/(1-p_x)=[(1/2)\cdot q_3\cdot E(y^2)/Y+q_3^2\cdot Y\cdot\exp(-T\cdot q)\{\exp(T\cdot q)-T\cdot q-1\}/q]/[1-q_3\cdot Y\{1-\exp(-T\cdot q)\}] \tag{28}$$

(28) 式を (27) 式に代入すると，

$$W_q=[(1/2)\cdot E(y^2)/Y+q_3\cdot Y\{1-T\cdot q\exp(-T\cdot q)-\exp(-T\cdot q)\}/q]/[1-q_3\cdot Y\{1-\exp(-T\cdot q)\}] \tag{29}$$

(3) 式, (4) 式を (29) 式に代入すると，

$$W_q=[q\{\exp(\alpha\cdot q)-\alpha\cdot q-1\}$$
$$+q_3\cdot\exp(\alpha\cdot q)\{1-T\cdot q\exp(-T\cdot q)-\exp(-T\cdot q)\}]/q\cdot[q-q_3\exp(\alpha\cdot q)\{1-\exp(-T\cdot q)\}] \tag{30}$$

3. 安全島のある場合の横断待ち解析

最近，広幅員の道路などでは，横断歩行者の安全確保のために安全島が設けられている。

そこで，ここでは，歩行者が横断する場合に安全島で待機できる場合の待ち時間を解析する。

その横断過程として，はじめに第1車道を適当な車頭間隔を待って横断し，安全島で待って，次の第2車道を横断する。

つぎに，致着確率密度関数と，横断確率密度関数を用い

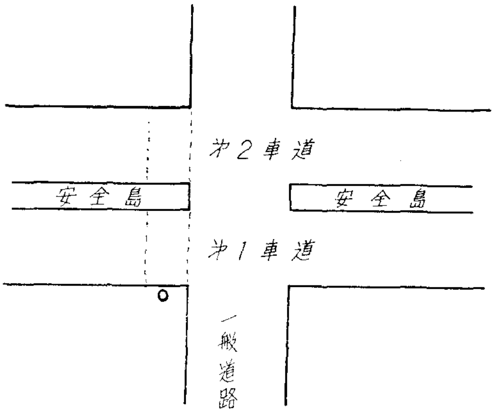

Fig. 1.

て，一般化した場合について考察する。

そこで次の関数を定める。

q_1: 第1車道における単位時間当りの交通量

q_2: 第2車道における単位時間当りの交通量

T_1: 第1車道を横断するのに要する時間

T_2: 第2車道を横断するのに要する時間

ここで，$T=T_1+T_2$, $q=q_1+q_2$ で，T, q は前章と同じ定義とする。

$F_1(t)$: 主要道路の第1車道上を通過する車の車頭間隔の確率密度関数

$F_2(t)$: 主要道路の第2車道上を通過する車の車頭間隔の確率密度関数

$\alpha(t)$: 一般道路の歩行者が主要道路の車頭間隔が t なる大きさの場合に横断する確率

そこで，はじめに，一般道路上の歩行者が交差点に到着してから，第2車道を横断しはじめるまでの待ち時間について考察する。

その解析のために，次の関数を定める。

$\phi_i(t)\,dt$: $(0, t)$ 間で待っている歩行者が第 i 車道を横断しない状態で $(t, t+dt)$ の間に第 i 車道上を車が通過する確率

ただし，歩行者が交差点に到着した瞬間の車頭間隔の確率密度関数として関数 $F_{i,0}(t)$ を導入する。

関数 $F_i(t)$ と $F_{i,0}(t)$ との間には，再帰定理 (Renewal Theory) により次の関係式が求められる。

$$F_{i,0}(t) = \int_t^\infty F_i(t)\,dt \Big/ \int_0^\infty t\cdot F_i(t)\,dt \quad (i=1,\ 2) \tag{31}$$

$\Omega_i(t)$: 主要道路の第 i 車道の前での待ち時間の確率分布

次の関係式が成り立つ。

$$\Omega_i(t) = \delta(t)\int_0^\infty F_{i,0}(x)\cdot\alpha(x)\,dx$$
$$+\phi_i(t)\cdot\int_0^\infty F_i(x)\cdot\alpha(x)\,dx$$
$$= \overline{\alpha}_{i,0}\cdot\delta(t)+\overline{\alpha}_i\cdot\phi_i(t) \tag{32}$$

ただし，$\delta(t)$ はデルター関数で次の式を満す。

$$\int_0^\infty \delta(t)\,dt = 1 \tag{33}$$

$$\overline{\alpha}_{i,0} = \int_0^\infty \alpha(x)\cdot F_{i,0}(x)\,dx \tag{34}$$

$$\overline{\alpha}_i = \int_0^\infty \alpha(x)\cdot F_i(x)\,dx \tag{35}$$

また，$\phi_i(t)$ 式は次のようになる。

$$\phi_i(t) = F_{i,0}(t)\cdot[1-\alpha(t)] + \int_0^t \phi_i(x)\cdot F_i(t-x)\cdot[1-\alpha(t-x)]\,dx \tag{36}$$

そこで，次の関数を定める。

$$\psi_{i,0}(t) = F_{i,0}(t)\cdot[1-\alpha(t)] \tag{37}$$

$$\psi_i(t) = F_i(t)\cdot[1-\alpha(t)] \tag{38}$$

(37) 式と (38) 式を使って (36) 式を書き換えると

$$\phi_i(t) = \psi_{i,0}(t) + \int_0^t \phi_i(t)\,\psi_i(t-x)\,dx \tag{39}$$

ラプラス変換

$$F^*(s) = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt \tag{40}$$

(39) 式をラプラス変換 (40) 式を用いて変換すると，

$$\phi_i^*(t) = \psi_{i,0}^*(s)/[1-\psi_i^*(s)] \tag{41}$$

となる。

つぎに，(32) 式をラプラス変換すると，

$$\Omega_i^*(t) = \overline{\alpha}_{i,0}+\overline{\alpha}_i\cdot\phi_i^*(t) \quad (i=1,\ 2) \tag{42}$$

そこで，2車道の主要道路の待ち時間の確率密度関数 $\Omega(t)$ は，

$$\Omega(t) = \int_0^{t-T_1} \Omega_1(x)\cdot\Omega_2(t-T_1-x)\,dx \tag{43}$$

$$\Omega(t+T_1) = \int_0^t \Omega_1(x)\,\Omega_2(t-x)\,dx \tag{44}$$

ラプラス変換をすると，

$$\Omega^*(s) = \Omega_1^*(s)\cdot\Omega_2^*(s)\cdot e^{-s\cdot T_1} \tag{45}$$

平均時間を $\bar{t}$ とすると，

$$\bar{t} = \Omega^{*\prime}(0) \tag{46}$$

つぎに，一般道路上の歩行者が交差点にランダムに到着するとして，歩行者の待ち時間を解析する。この場合，安全島に1人待機できるとすると，歩行者の待ち時間は待ち行列でのサービス時間となる。

そこで，次にトラヒィック密度 $\rho<1$ の条件の下で，平衡状態における系の長さが i である確率を p_i とすると，平衡状態における系の長さの確率分布の母函数 $\beta(z)$ は，

$$\beta(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \cdot z^i = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=i-1}^{\infty} p_i \cdot k_{j-i-1} \cdot z^j \right. + p_0 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} k_j \cdot z^j \qquad (47)$$

ここで，$p_j = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \cdot p_{i,j}$

$\sum_{j=0}^{\infty} k_j z^j = K(z)$ とおけば，

$$\beta(z) = p_0 \cdot (1-z) \cdot K(z) / \{K(z) - z\} \qquad (48)$$

さらに，

$$1 = \lim_{z\to 1} \beta(z) = \lim_{z\to 1} \{p_0(1-z)K'(z) - p_0 K(z)\}/K'(z) - 1\}$$

ところで，

$$\lim_{z\to 1} K'(z) = \lim_{z\to 1} \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot k_j z^{j-1} = \int_0^{\infty} q_3 \cdot \nu \cdot dB(\nu) = q_3/\mu = \rho$$

$$\therefore \quad p_0 = 1 - \rho \quad (\rho < 1)$$

(48) 式より $\beta(z)$ は

$$\beta(z) = \{(1-\rho)(1-z)K(z)\}/\{K(z) - z\} \qquad (49)$$

$K(z)$ をさらに簡単にすると，

$$K(z) = \sum_{j=0}^{\infty} k_j \cdot z^j = \int_0^{\infty} e^{-q_3 \cdot \nu \cdot (1-z)} dB(\nu) = \Omega^* \cdot \{q_3(1-z)\} \qquad (50)$$

(50) 式を (49) 式に代入すると，

$$\beta(z) = [(1-\rho)(1-z) \cdot \Omega^*\{q_3(1-z)\}]/[\Omega^*\{q_3(1-z)\} - z] \qquad (51)$$

待ち時間の分布のラプラス変換 $\gamma^*(z)$ は，次のようになる。

$$\gamma^*(z) = [1-\rho]/[1 - q_3 \cdot \{1 - \Omega^*(s)\}/s] \qquad (52)$$

行列の平均待ち時間 W_q は次のようになる。

$$W_q = -\gamma^*(0), \qquad (53)$$

行列の平均長 L は

$$L = \beta'(0). \qquad (54)$$

例

$F_1(t)$, $F_2(t)$ に具体的な式をあたえ，待ち時間を求めてみよう。

$$q_1 = q_2 = q/2 \qquad T_1 = T_2 = T/2 \qquad (55)$$

$$F_1(t) = F_2(t) = (q/2) \cdot e^{-q/2 \cdot t} \qquad (56)$$

$$\begin{cases} \alpha(t) = 0 & 0 \leqq t < T/2 \\ \quad\;\; = 1 & t > T/2 \end{cases}$$

$$0 \leqq t < T/2 \qquad t = t - T/2$$

$\phi_1^*(s)$ と $\phi_2^*(s)$ は (37), (38), (39), (41) 式より，

$$\phi_1^*(s) = \phi_2^*(s) = [1 - e^{-(s+q/2)\cdot T/2}]/[s + (q/2) \cdot e^{-(s+q/2)\cdot T/2}] \quad (57)$$

(42), (45), (57) 式より，

$$\Omega^*(s) = e^{-qT} \cdot \left[\frac{s + q/2}{s + (q/2) \cdot e^{-(s+q/2)\cdot T/2}} \right]^2 \qquad (58)$$

$$\bar{t} = 2(e^{qT/4} - qT/4 - 1)/(q/2) \qquad (59)$$

(58) 式を (51) 式に代入すると，

$$\beta(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)(q_3 + q/2 - q_3 \cdot z)^2}{(q_3 + q/2 - q_3 \cdot z)^2 - e^{q\cdot T/2} \cdot z[q_3 - q_3 \cdot z + (q/2) \cdot e^{-q\cdot T/2} \cdot (s + q/2)^2]} \qquad (60)$$

$$\rho = q_3 \cdot \bar{t}$$

$$\gamma^*(s) = \frac{(1-\rho) \cdot s[s(+q/2)e^{-(s+q/2)T/2}]^2}{s[s + (q/2) \cdot e^{-(s+q/2)\cdot T/2}]^2 - q_3[(s + (q/2) \cdot e^{-(s+q/2)\cdot T/2})^2 - e^{-q\cdot T/2} \cdot (s+q/2)^2]} \qquad (61)$$

$$\therefore \quad W_q = [\rho \cdot q \cdot e^{-q\cdot T/4}\{1 - (q \cdot T/4) \cdot e^{-q\cdot T/4}\} \cdot - q_3\{1 - (q \cdot T/4) \cdot e^{-q\cdot T/4}\}^2 - q_3 \cdot (q \cdot T^2/16) \cdot e^{-q\cdot T/2} + q \cdot e^{-q\cdot T/2}]/[(q^2/4) \cdot e^{-q\cdot T/2} - q \cdot q_3\{e^{-q\cdot T/2} - (q \cdot T/4) \cdot e^{-q\cdot T/2} - e^{-q\cdot T/2}\}] \qquad (62)$$

全平均待ち時間は　$\bar{t} + W_q$　(63)

そこで，以上によって，歩行者が，安全島で待機して横断する場合と，そうでない場合の横断待ち解析の理論的考察がなされた。

次に，これらの解析方法によって，２つの横断方法による待ち時間を解析してみよう。

条件を次のように定める。

$T = 8$ (秒)
$T_1 = T_2 = T/2 = 4$ (秒)
$q_1 = 0.2$ (台/秒)
$q_2 = 0.2$ (台/秒)
$q = q_1 + q_2 = 0.4$ (台/秒)
$q_3 = 0.1$ (人/秒)
$\alpha = 3$ (秒)

以上の条件で解析してみると，安全島を設けない場合での待ち時間は 22.2 (秒) であり，同上の条件で安全島を設けた場合では 14.1 (秒) と求められた。

これらの数値解析の１例より，安全島を設けることは，歩行者の横断交通の安全のみならず，よりすくない待ち時間で横断できることが明らかとなった。

4. 結　　言

最近，自動車の急激なる増加により都市街路や幹線道路では，歩行者は交通の邪魔物扱いされ，狭い歩道をやっと通っている状態である。

車道部分で通れる場所―横断歩道―では，歩行者は車の通りを待って足早に利用している。

自動車化のすう勢に呼応して道路や街路の改良が素晴らしいテンポで進んでおり，これらの成果には目をみはるものがある。

しかし，自動車の需要をまかなうのに急で，歩行者に対する安全施設が欠けているように思われる。

前章でも明らかなように，車道幅員 20 m 以上の街路では，横断歩行者の安全確保のみならず，待ち時間の短縮のためにも，是非，安全島を設ける配慮をすべきと思われる。

ロンドンにおいては，横断歩行者に対する配慮は，ゆきとどいており，いたる所に安全島が設けられている。

道路は利用者である歩行者と自動車とのバランスのとれたサービスをなすように設計をすべきである。

歩行者のための施設は，事故分析や歩行者の挙動調査により築き上げる，地味な経験要素の強い技術にもとづいている。

これらの成果を，特に，街路設計上に反映する努力を続けてこそ，日本の都市は一流国と肩を並べることができるのである。

すなわち，歩行者の安全確保に努力することは，単に倫理上の問題ではなく，新しい研究の出発点ともなるのである。

なお，この発表にあたり，北海道大学，小川博三教授，五十嵐日出夫助教授の影なる援助に，心から感謝の意を表する。

参考文献

1) W. Feller: "On the integral equation of renewal theory". Ann. Math. Stat. 12, 1941.
2) J. Doob: "Renewal theory from the point of view of the theory of probability". Trans. An. Math. Soc. 63, 1948.
3) D. G. Kendall: "Some problems in the theory of queues". J. Roy. Statist. Soc. B. 13, 1951.
4) J. C. Tanner: "A problem of interference between two queues". Biometrika. 40, 1953.
5) D. G. Kendall: "Stochastic processes ocurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded markov chain". Ann. Math. Statist. 24, 1953.
6) D. R. Cox and W. L. Smith: "On the superposition of renewal processes". Biometrika. 41, 1954.
7) J. Kiefer and J. Wolfowitz: "On the theory of queues with many servers". Trans. Ann. Math. Soc. 78, 1955.
8) W. L. Smith: "On renewal theory counter problems and quasi-poisson processes". Proc. Camb. Phil. Soc. 53, 1957,
9) D. L. Gerlough: "Traffic imputs for simulation on a digital computer". Proc. Highway Research Board. 38, 1959.
10) T. L. Saaty: "Time dependent solution of the many server poisson queue". Operations Research Soc. Am. 8, 1960.
11) T. L. Saaty: "Elements of queueing theory with applications". McGraw-Hill. 1961.
12) J. C. Tanner: "Delays on a two-lane road". J. Royal Statistical Soc. Series B, 23, 1. 1961.
13) A. J. Miller: "A queueing model for road traffic flow". J. Royal Statistical Soc, Series B, 23, 1. 1961.
14) G. H. Weiss and A. Maradudin: "Some problems in traffic delay". Operations research Soc. Am. 10, 1962.
15) J. F. C. Kingman: "On queues in which customes are served in random order". Proc. Camb. Phil. Soc. 58, 1962.
16) M. F. Neuts: "The distribulion of the maximum length of a poisson queue during a busy period". Operations Research Soc. Am. 12, 1964.
17) P. D. Welch: "On a generalized M/G/I queueing process in which the first customer of each busy period receives exceptional service. Operations Research Soc. Am. 12, 1964.