

回折の影響を受ける水域の波高分布について

正 員 境 隆 雄*

正 員 近 藤 俣 郎**

学生会員 ○寺 島 拓 郎***

ま え が き

今までに、開口部の回折に関する多くの問題が、研究されてきたが、それらは複雑な計算を必要とするため、それらの数式の適用範囲について十分検討がなされていない。そこで、主に二重回折波の波高係数の田中式について、実験と数値計算により適用性を検討した。又扇形の水域における回折波の波高分布、回折波の影響を受ける港内水域の波高分布について考察した。

1. 二重回折係数について

二重回折とは、外海からの波が、外側の防波堤端で一度回折した後、再び内側の防波堤で回折される現象をいう。二重回折に関する基礎的実験、すなわち、一様水深で入射角： θ 、開港幅： B 、および防波堤の配置に関する変数： α 、 ω を変えて行なった結果、内堤の先端付近を除き、理論値（故田中博士の式、例えば応用水理学中（p. 537））は、実験値よりも大きい、大体合っている。田中博士の式の値が、実験値よりも大きい値を示すのは、二重回折に対して、等波高で直線波峰の入射波についての回折を重ねたからである。実際には、1次回折波の卓越領域では、単純回折現象の直進部に相当する波が内堤にさえぎられてなく又二重回折の際の入射波は、波峰が円形で、峰線に沿って

波高が通減していることから一般に理論値がやや大きくなると察せられる。なお、この実験は、開港部より5~7波長までしか行っていないので、10波長以上の二重回折係数については、実験などにより検討を要する。記号については図-1参照。田中式により計算した二重回折係数を表-1~4に示す。

2. 扇形水域の回折波の波高分布

図-2に示すような水域に0より r_0 の所に、ある波形を持った回折波を定常的に与えたとした場合、 r とともにどのような回折波の波高分布を示すか検討してみる。

水の運動は非回転で、速度ポテンシャル ϕ はラプラスの方程式を満足するものとする。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

速度ポテンシャルを

$$\phi = f(x, y) Z(z) \cdot e^{i\omega t} \quad (2)$$

と仮定する。ただし $\sigma = 2\pi/T$

境界条件：

○水粒子の自由水面での運動は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (z=0) \quad (3)$$

○固定境界面での法線速度が0、すなわち

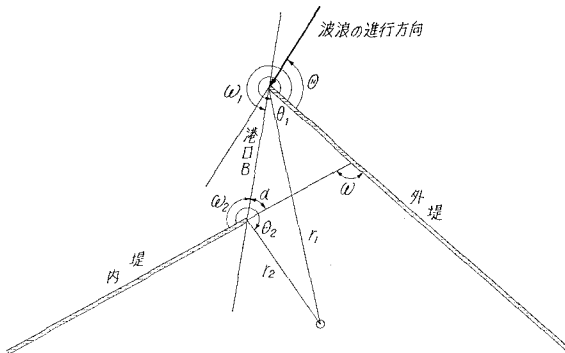


図-1

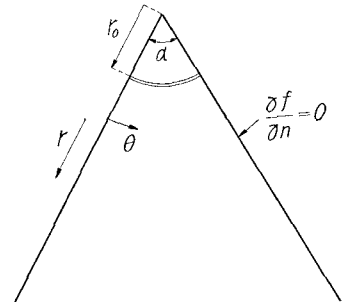


図-2

* 室蘭工業大学教授 工博

** 室蘭工業大学助教授 M.S

*** 室蘭工業大学大学院 工学研究科

表—1

$\omega=120^\circ, \quad \Theta=120^\circ, \quad \alpha=75^\circ$									
	r_1/L	θ_1		r_2/L	θ_2				
		330°	345°		285°	300°	315°	330°	345°
① $B=2L$	0.5	0.49	0.44	0.5	0.22	0.18	0.16	0.14	0.13
	1	0.39	0.31	1	0.21	0.16	0.13	0.11	0.10
	2	0.28	0.23	2	0.20	0.13	0.10	0.08	0.07
	3	0.23	0.20	3	0.20	0.12	0.08	0.06	0.06
	4	0.19	0.19	4	0.20	0.11	0.07	0.06	0.05
	5	0.16	0.17	5	0.19	0.10	0.06	0.05	0.04
	10	0.11	0.13	8	0.19	0.08	0.05	0.04	0.04
② $B=3L$	0.5	0.48	0.44	0.5	0.19	0.16	0.14	0.12	0.12
	1	0.39	0.32	1	0.18	0.14	0.11	0.09	0.09
	2	0.28	0.23	2	0.18	0.12	0.09	0.07	0.06
	3	0.23	0.19	3	0.18	0.10	0.07	0.06	0.05
	4	0.23	0.16	4	0.17	0.10	0.06	0.05	0.04
	5	0.20	0.14	5	0.17	0.09	0.06	0.04	0.04
	11	0.12	0.12	8	0.17	0.07	0.05	0.04	0.03
③ $B=4L$	0.5	0.47	0.43	0.5	0.18	0.15	0.13	0.11	0.11
	1	0.38	0.32	1	0.17	0.13	0.10	0.09	0.08
	2	0.28	0.22	2	0.16	0.11	0.08	0.06	0.06
	3	0.22	0.20	3	0.16	0.10	0.07	0.05	0.05
	4	0.20	0.17	4	0.16	0.09	0.06	0.05	0.04
	5	0.20	0.16	5	0.16	0.08	0.05	0.04	0.04
	12	0.13	0.09	8	0.16	0.07	0.04	0.03	0.03

表—2

$B=2L, \quad \omega=135^\circ, \quad \alpha=90^\circ$									
	r_1/L	θ_1		r_2/L	θ_2				
		330°	345°		270°	285°	300°	315°	330°
④ $\Theta=90^\circ$	0.5	0.40	0.36	0.5	0.12	0.10	0.08	0.07	0.07
	1	0.29	0.22	1	0.11	0.09	0.07	0.06	0.05
	2	0.17	0.17	2	0.11	0.07	0.05	0.04	0.04
	3	0.15	0.14	3	0.11	0.06	0.04	0.03	0.03
	4	0.12	0.13	4	0.11	0.06	0.04	0.03	0.03
	5	0.10	0.12	5	0.11	0.05	0.03	0.03	0.02
	10	0.07	0.08	8	0.11	0.05	0.03	0.02	0.02
⑤ $\Theta=105^\circ$	1.5	0.48	0.42	0.5	0.15	0.13	0.11	0.09	0.09
	1	0.35	0.26	1	0.15	0.11	0.09	0.07	0.06
	2	0.21	0.20	2	0.14	0.09	0.07	0.05	0.05
	3	0.18	0.16	3	0.14	0.08	0.06	0.04	0.04
	4	0.15	0.15	4	0.14	0.08	0.05	0.04	0.03
	6	0.12	0.14	5	0.14	0.07	0.04	0.03	0.03
	10	0.08	0.10	8	0.14	0.06	0.04	0.03	0.02

$B=2L, \quad \omega=135^\circ, \quad \alpha=90^\circ$										
	r_1/L	θ_1		r_2/L	θ_2					
		330°	345°		270°	285°	300°	315°	330°	345°
⑥ $\theta=120^\circ$	0.5	0.59	0.52	0.5	0.22	0.18	0.15	0.13	0.12	0.11
	1	0.45	0.32	1	0.21	0.16	0.12	0.10	0.09	0.08
	2	0.27	0.24	2	0.20	0.13	0.09	0.07	0.06	0.06
	3	0.24	0.20	3	0.20	0.12	0.08	0.06	0.05	0.05
	4	0.19	0.19	4	0.20	0.01	0.07	0.05	0.05	0.04
	5	0.16	0.17	5	0.19	0.10	0.06	0.05	0.04	0.04
	10	0.11	0.13	8	0.19	0.08	0.05	0.04	0.03	0.03
⑦ $\theta=135^\circ$	0.5	0.76	0.68	0.5	0.33	0.27	0.23	0.20	0.19	0.17
	1	0.62	0.44	1	0.32	0.24	0.29	0.15	0.14	0.13
	2	0.38	0.32	2	0.31	0.20	0.14	0.11	0.10	0.09
	3	0.33	0.27	3	0.30	0.18	0.12	0.09	0.08	0.07
	4	0.27	0.26	4	0.30	0.16	0.11	0.08	0.07	0.06
	5	0.23	0.24	5	0.30	0.15	0.10	0.07	0.06	0.06
	6	0.16	0.17	8	0.29	0.13	0.08	0.06	0.05	0.05

表—3

$B=2L, \quad \theta=105^\circ, \quad \alpha=60^\circ$										
	r_1/L	θ_1				r_2/L	θ_2			
		300°	315°	330°	345°		300°	315°	330°	345°
⑧ $\omega=135^\circ$	0.5	0.52	0.44	0.38	0.35	0.5	0.33	0.28	0.25	0.23
	1	0.45	0.34	0.28	0.26	1	0.31	0.24	0.20	0.17
	2	0.37	0.25	0.21	0.19	2	0.30	0.20	0.15	0.13
	3	0.31	0.24	0.17	0.16	3	0.29	0.18	0.13	0.11
	4	0.25	0.03	0.14	0.14	4	0.29	0.16	0.11	0.09
	5	0.22	0.21	0.13	0.14	5	0.29	0.15	0.10	0.08
	6	0.15	0.15	0.10	0.08	8	0.29	0.13	0.08	0.07
⑨ $\omega=120^\circ$	0.5		0.44	0.39	0.35	0.5	0.22	0.18	0.16	0.15
	1		0.35	0.28	0.25	1	0.21	0.16	0.13	0.11
	2		0.27	0.21	0.19	2	0.20	0.13	0.10	0.08
	3		0.22	0.18	0.15	3	0.19	0.12	0.08	0.07
	4		0.18	0.17	0.12	4	0.19	0.11	0.07	0.06
	5		0.15	0.16	0.11	5	0.19	0.10	0.07	0.05
	10		0.10	0.12	0.08	8	0.19	0.08	0.05	0.04
⑩ $\omega=105^\circ$	0.5			0.39	0.36	0.5	0.16	0.13	0.12	0.11
	1			0.30	0.26	1	0.15	0.12	0.09	0.08
	2			0.22	0.19	2	0.14	0.10	0.07	0.06
	3			0.18	0.16	3	0.14	0.09	0.06	0.06
	4			0.15	0.15	4	0.14	0.08	0.05	0.05
	5			0.12	0.14	5	0.14	0.07	0.05	0.04
	10			0.09	0.10	8	0.14	0.06	0.04	0.03

表-4

$B=2L, \quad \omega=135^\circ, \quad \theta=105^\circ$										
	r_1/L	θ_1			r_2/L	θ_2				
		315°	330°	345°		285°	300°	315°	330°	345°
⑪ $\alpha=75^\circ$	0.5	0.47	0.41	0.36	0.5	0.21	0.18	0.15	0.14	0.13
	1	0.37	0.28	0.24	1	0.20	0.15	0.12	0.10	0.09
	2	0.26	0.21	0.19	2	0.20	0.13	0.09	0.08	0.07
	3	0.22	0.18	0.15	3	0.20	0.12	0.08	0.06	0.06
	4	0.18	0.17	0.13	4	0.19	0.10	0.07	0.06	0.05
	5	0.15	0.16	0.11	5	0.19	0.10	0.06	0.05	0.04
	10	0.10	0.12	0.08	8	0.19	0.08	0.05	0.04	0.03

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \quad (\theta=0, \alpha) \text{ (極座標表示の場合)} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (z=-h) \text{ (海底)} \quad (5)$$

(1) と (5) より

$$Z(z) = \cosh k(h+z) \quad (6)$$

(2) は

$$\phi = c \cdot \cosh k(h+z) \cdot f(x, y) \cdot e^{i\sigma t} \quad (7)$$

(7) を (3) に代入して

$$\sigma^2 = g \cdot k \tanh kh \quad (8)$$

水粒子の運動が、時間に関して調和的であるとする、
静水面からの水面変化 η は、次式となる。

$$\eta = f(x, y) \cdot e^{i\sigma t} \quad (9)$$

$f(x, y)$ は点 (x, y) における振幅を表わす。(1), (7) より

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k^2 f = 0 \quad (10)$$

$$k = 2\pi/L, \quad L: \text{波長}$$

(10) を極座標表示すると

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + k^2 f = 0 \quad (11)$$

$$\rho = kr \text{ において無次元化すると}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + f = 0 \quad (12)$$

(4) と $\rho \rightarrow \infty$ で $f=0$ の境界条件を満たす (12) の解を求める。

$$f(\rho, \theta) = H(\theta) \cdot F(\rho) \quad (13)$$

と変数分離すると

$$H(\theta) = \cos(n\theta\pi/\alpha) \quad (14)$$

となる。

$F(\rho)$ は次のベッセルの微分方程式を解けばよい。

$$\frac{d^2 F}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dF}{d\rho} + \left\{ 1 - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{n\pi}{\alpha} \right)^2 \right\} F = 0 \quad (15)$$

$$\nu = n\pi/\alpha \quad (16)$$

とおく。

$$F(\rho) \sim J_\nu(\rho), \quad Y_\nu(\rho) \quad (17)$$

今、 $J_\nu(\rho)$ だけをとると、(13) は

$$f(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot J_\nu(\rho) \cdot \cos\left(\frac{n\theta\pi}{\alpha}\right) \quad (18)$$

初期値を (19) とおく

$$f_0(\rho_0, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot J_\nu(\rho_0) \cdot \cos\left(\frac{n\theta\pi}{\alpha}\right) \quad (19)$$

$$a_n = A_n J_\nu(\rho_0) \quad (20)$$

とおき

$$A_n = a_n / J_\nu(\rho_0) \quad (21)$$

(21) を (18) に代入すると

$$f(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \cdot J_\nu(\rho)}{J_\nu(\rho_0)} \cdot \cos\left(\frac{n\theta\pi}{\alpha}\right) \quad (22)$$

今、図-3 の水域に適用してみよう。

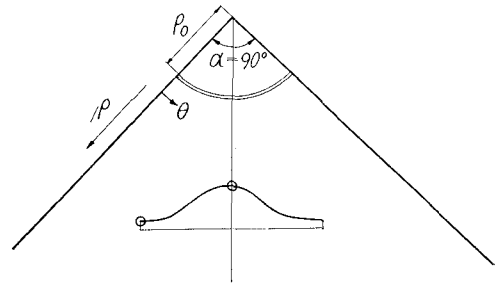


図-3

$\alpha=90^\circ, \rho_0=7$ とし三項までとると

$$f(\rho, \theta) = \frac{a_0 J_0(\rho)}{J_0(7)} + \frac{a_1 J_2(\rho)}{J_2(7)} \cos\left(\frac{\theta\pi}{\alpha}\right) + \frac{a_2 J_4(\rho)}{J_4(7)} \cos\left(\frac{2\theta\pi}{\alpha}\right) \quad (23)$$

a_0, a_1, a_2 を (図-4 参照) 適当に選んで、図-3 のような波形をつくり、これを初期振幅とする。 ρ に対する振幅を

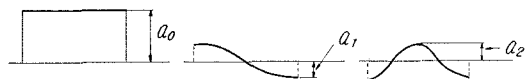


図-4

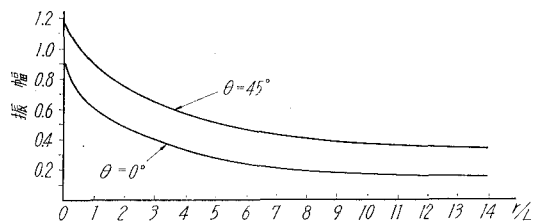


図-5

$\theta=45^\circ$ と $\theta=0^\circ$ について示すと図-5となる。

同じ問題を数値解法で解いてみよう。

$$\Delta\theta=h, \quad \Delta\rho=d$$

とおく。

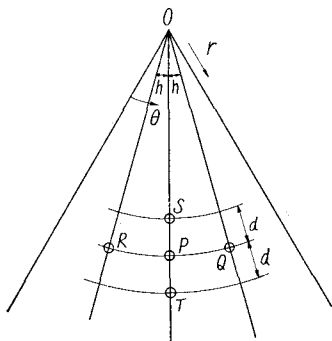


図-6

$$\begin{aligned} f_P &: f(\theta_i, \rho_j) \\ f_Q &: f(\theta_{i+1}, \rho_j) \\ f_R &: f(\theta_{i-1}, \rho_j) \\ f_S &: f(\theta_i, \rho_{j-1}) \\ f_T &: f(\theta_i, \rho_{j+1}) \end{aligned}$$

とする。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \rho_j^2} = \frac{1}{d^2} (f_S + f_T - 2f_P) + O(d^2) \quad (24)$$

$$\frac{1}{\rho_j} \frac{\partial f}{\partial \rho_j} = \frac{1}{2\rho_j d} (f_S - f_T) + O(d^2) \quad (25)$$

$$\frac{1}{\rho_j^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{1}{(\rho_j h)^2} (f_R - 2f_P + f_Q) + O(h^2) \quad (26)$$

ここで $\rho_j = dj$ とおく。 $O(d^2)$, $O(h^2)$ を無視すると

結局 (12) 式は差分表示すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{d^2} \left\{ \frac{1}{(jh)^2} (f_R + f_Q) + \left(1 - \frac{1}{2j}\right) f_S + \left(1 + \frac{1}{2j}\right) f_T \right. \\ \left. - 2 \left[1 + \frac{1}{(jh)^2} \right] f_P \right\} + f_P = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

(27) 式より

$$\begin{aligned} f_T = \left[\left\{ 2 \left(1 + \frac{1}{j^2 h^2} \right) - d^2 \right\} f_P - \left\{ \frac{1}{j^2 h^2} \right\} (f_R + f_Q) \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{1}{2j} \right) f_S \right] / \left(1 + \frac{1}{2j} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

(28) 式により, f_S, f_R, f_P, f_Q の値が与えられれば, f_T の値が求まる。それ故, 最初の二線上の値を与えてやると順次, 値を求めることができる。

今, 図-3 の場合に応用してみよう。

$\rho_0 = 7$, $\rho_0 + d$ の2線上に解析的解法の場合と同じ値を与えて, $d = 0.1$ ステップで順次, 求めてみた。結果は, 解析的解法と一致し, 図-5 のようになる。

このことから, 数値解法の値が確かめられた。

(10) 式を x, y 座標で差分表示すると (図-7 参照)

$$\begin{aligned} - \left(\frac{2}{l'l'} + \frac{2}{hh'} \right) f_{P'} + \frac{2}{l(l+l')} f_{Q'} + \frac{2}{h(h+h')} f_{S'} \\ + \frac{2}{l'(l+l')} f_{R'} + \frac{2}{h'(h+h')} f_{T'} + f_{P'} \end{aligned} \quad (29)$$

ここで $l' = l, h' = h$ とすると

$$f_{T'} = \left(\frac{2h^2}{l^2} + 2 - h^2 \right) f_{P'} - \frac{h^2}{l^2} (f_{Q'} + f_{R'}) - f_{S'} \quad (30)$$

又, $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$ の処理は, 図-8 で $f_1 = f_2$ とすればよい。

x, y 座標と極座標を組み合わせると図-9 のような水域にも適用できるわけである。沖で初期値を与えてやれば,

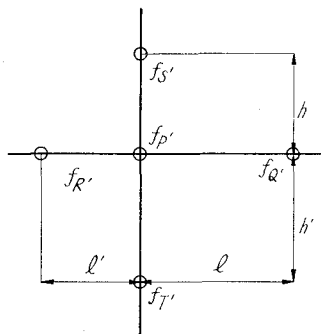


図-7

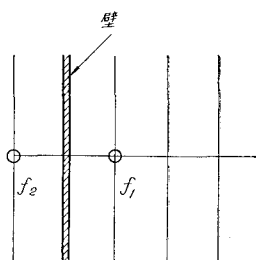


図-8

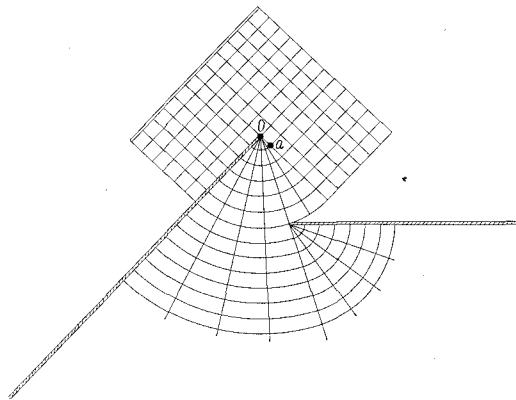


図-9

順次値が求まってくるが、極座標の初期値をどのように与えるかが問題になる。今 a の値を初期値として与え、 $\overline{oa}$ を小さくしていけばよいわけであるが、数値実験の結果、 $\overline{oa}$ を $1/2 L$ 以上にしないと不安定となり、発散する。

この点をもっと検討してみたい。なお、図-9で、網目を荒くとしてあるが、計算する際、もっと細かくして行なう。

3. 回折の影響を受ける港内の波高分布

一様水深で、回折、反射の影響を考慮した港内の波高分布を調べるのに興味ある方法がある。

水面の動揺を

$$\xi(x, y, t) = R \{ \xi(x, y) \cdot e^{-ikt} \} \quad (31)$$

ξ : 複素関数の絶対値と偏角は、それぞれ振幅と位相のずれを示す。

$$k: 2\pi/T$$

ある水域の内部点 O 点の動揺は次式で表わされる。

$$\xi_0 = \frac{1}{4i} \int_{\Gamma} \frac{\partial \xi}{\partial n} G_2(OM) ds \quad (32)$$

M は Γ 上の点

$\frac{\partial}{\partial n}$ は Γ の内向ノルマル微分

境界線 Γ を直線と考えると

$$G_2(OM) = 2H_0^{(1)}(mr)$$

$H_0^{(1)}$: O 次第1種のハンケル関数

r : OM の距離

$$m: 2\pi/L$$

全水域 D を小水域に分け、各々の水域内の波による擾乱は、水域を含む輪郭線への接線によって区切られる半平面に関する解の重ね合わせとする。

全水域の外郭線 Γ の部分では、 $2\xi/\partial n$ は既知とする。隣接する水域との共通の境界では

$$\frac{\partial \xi}{\partial n} = -\frac{\partial \xi^*}{\partial n} \quad (34)$$

(* は水域から出て行く波に対する微分)

とする。

壁面で反射する場合

$$\frac{\partial \xi}{\partial n} = -\bar{\mu} \left(\frac{\partial \xi^*}{\partial n} \right) \quad (\bar{\mu}: \text{反射率}) \quad (35)$$

$$\left(\frac{\partial \xi^*}{\partial n} \right)_J = \frac{1}{4i} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \xi}{\partial n} \right)_K \frac{\partial G_2}{\partial n} (M_J M_K) ds \quad (36)$$

(33) より

$$\frac{\partial G_2}{\partial n} (M_J M_K) = 2m H_1^{(1)}(mr_{JK}) \cos \phi_{JK} \quad (37)$$

ここで $\phi_{JK} = \angle(n_J, \overrightarrow{M_J M_K})$

r_{JK} : 周辺上の J 点、 K 点の間の距離

$H_1^{(1)}(x)$: 1次の第1種ハンケル関数

数値計算方法:

(36), (32) 式を近似的に次式とする。

$$\left(\frac{\partial \xi^*}{\partial n} \right)_J = \sum_{K=1}^M R_{JK} \left(\frac{\partial \xi}{\partial n} \right)_K \quad (38)$$

$$J=1, 2, \dots, M$$

$$\xi_I = \sum_{K=1}^N S_{IK} \left(\frac{\partial \xi}{\partial n} \right)_K \quad (39)$$

$$I=1, 2, \dots, N$$

ここで

$$\begin{cases} R_{JK} = \frac{1}{4i} \frac{\partial G_2}{\partial n} (M_J M_K) \Delta S_K \\ S_{IK} = \frac{1}{4i} G_2(O_I M_K) \Delta S_K \end{cases} \quad (40)$$

すなわち

$$R_{JK} = \begin{cases} -\frac{im}{2} H_1^{(1)}(mr_{JK}) \cdot \cos \phi_{JK} \cdot \Delta S_K, & J \neq K \\ 0, & J = K \end{cases} \quad (41)$$

$$S_{IK} = \begin{cases} -\frac{i}{2} H_0^{(1)}(mr_{IK}) \Delta S_K & r_{IK} \neq 0 \\ -\frac{i}{m} \bar{P} \left(\frac{m \Delta S_K}{2} \right) & r_{IK} = 0 \end{cases} \quad (42)$$

ここで

$$\begin{aligned} \bar{P}(x) &= \int_0^x H_0^{(1)}(u) du \\ &= \int_0^x J_0(u) du + i \int_0^x Y_0(u) du \end{aligned}$$

この方法は複雑な境界でも、境界が直線なら適用できる。

結 語

2~3の回折に関する数値計算について述べてきたが、実際に際し、従来の式の再検討が必要であり、その適用範囲を定める事も重要である。幸い、コンピューターの発達により、複雑な計算が容易になってきているし、コンピューターの出現により可能になった解法もある。今までのようにシンプルな場合にしか適用できない理論式に代って、複雑な境界条件の水域における波高分布の問題を解き得る方法を開発する必要がある。

参考文献

- 1) Barailler, L. & Gaillard, P.: 「EVolution Récente des Modeles Mathématiques d'Agitation Due à la Houle. Calcul de la Diffraction en Profondeur Non Uniforme」. La Houille Blanche, 8-1967 (861-869).
- 2) 応用水理学中 [p. 537~8].
- 3) 合田良実: 長方形および扇形の港の副振動について. 第10回海洋工学講演会講演集.
- 4) 境・近藤・寺島: 二重回折波の回折係数について. 第23回年次学術講演会講演概要集.