

ストークス波の適用限界について

正員 佐伯 浩*
正員 ○泉 洸**
学生員 新井 泰 澄***
学生員 花 安 繁 郎***

§1. 緒 論

ストークス波理論は、Stokes により導びかれてから、その後、数多くの、この種の有限振幅波理論が研究されてきた。ストークス波理論は、波形勾配 (H/L) が急で、水粒子軌道がだ円形を描きつつ前進することから、海の波の浅水領域の波に一致する。

この研究では、理論の妥当性と、計算の便利さから、Skjelbreia と田中のストークス波理論を用いて、ストークス波の碎波限界、Inflection point の発生限界を調べ、理論の適用限界と級数解の収束の具合を調べた。また、両理論の波頂高の計算を行ない、実験値との比較を行なった。

本研究では適用限界を、理論それ自体の適用限界と、もう一つは、実測値と理論値を比較し、理論が実測値に対して適用できる範囲を適用限界とする、という二通りの適用限界について調べた。

§2. Skjelbreia の理論

Skjelbreia の求めた第3近似ストークス波理論は座標を (Fig. 1) のようにとり計算された。その結果、波形は (1) 式で示される。

$$\eta = a \cdot \cos \theta + \frac{\pi}{L} \cdot a^2 \cdot f_2 \left(\frac{d}{L} \right) \cdot \cos 2\theta + \left(\frac{\pi^2}{L} \right) \cdot a^3 f_3 \left(\frac{d}{L} \right) \cos 3\theta \quad (1)$$

ここで、 $f_2 \left(\frac{d}{L} \right)$ 、 $f_3 \left(\frac{d}{L} \right)$ はそれぞれ、水深波長比 d/L の関数で次式のように表わされる。

$$f_2 \left(\frac{d}{L} \right) = \frac{\cosh \frac{2\pi d}{L} \cdot \left(\cosh \frac{4\pi d}{L} + 2 \right)}{2 \left(\sinh \frac{2\pi d}{L} \right)^3} \quad (1-1)$$

$$f_3 \left(\frac{d}{L} \right) = \frac{3}{16} \frac{8 \left(\cosh \frac{2\pi d}{L} \right)^6 + 1}{\left(\sinh \frac{2\pi d}{L} \right)^6} \quad (1-2)$$

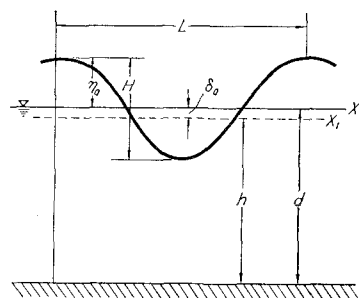


Fig. 1. Coordinate system

$$\text{又 } \theta \text{ は、} \theta = \frac{2\pi}{L} (x - ct) \quad (1-3)$$

で表わされ、波高 H と a との関係は (2) 式で表わされる。

$$H = 2a + 2 \frac{\pi^2 a^3}{L^2} \cdot f_3 \left(\frac{d}{L} \right) \quad (2)$$

(2) 式の両辺を L で割ると (2) 式は (2-1) 式のように書きかえられる。

$$\frac{H}{L} = 2 \left(\frac{a}{L} \right) + 2 \cdot \pi^2 \left(\frac{a}{L} \right)^3 f_3 \left(\frac{d}{L} \right) \quad (2-1)$$

波速の式は (3) 式で表わされる。

$$c^2 = \frac{gL}{2\pi} \cdot \tanh \frac{2\pi d}{L} \left\{ 1 + \left(\frac{2\pi a}{L} \right)^2 \frac{\cosh \frac{8\pi d}{L} + 8}{8 \left(\sinh \frac{2\pi d}{L} \right)^4} \right\} \quad (3)$$

又、波速 c と u 方向への流速 u との関係は、次式で表わされる。

$$\frac{u}{c} = F_1 \cosh \frac{2\pi s}{L} \cos \theta + F_2 \cdot \cosh \frac{4\pi s}{L} \cos 2\theta + F_3 \cdot \cosh \frac{6\pi s}{L} \cdot \cos 3\theta \quad (4)$$

ここで、 s 、 F_1 、 F_2 、 F_3 はそれぞれ、 a/L 、 d/L の関数で次のように表わされる。

$$s = d + y |_{\theta=0} \quad (\eta = \eta_0 \text{ の時}) \quad (4-1)$$

*, ** 北海道大学土木工学科

*** 北海道大学工学部大学院

$$F_1 = \frac{2\pi a}{L} \cdot \frac{1}{\sinh \frac{2\pi d}{L}} \quad (4-2)$$

$$F_2 = \frac{3}{4} \left(\frac{2\pi a}{L} \right)^2 \frac{1}{\left(\sinh \frac{2\pi d}{L} \right)^4} \quad (4-3)$$

$$F_3 = \frac{3}{64} \left(\frac{2\pi a}{L} \right)^3 \frac{\left(11 - 2 \cosh \frac{4\pi d}{L} \right)}{\left(\sinh \frac{2\pi d}{L} \right)^7} \quad (4-4)$$

§3. 田中の理論

田中によるストークス波理論では、座標を (Fig. 1) の x 方向座標を X_1 にとり、それぞれの式を求めた。

波形の式は (5) 式で表わされる。

$$H = 2a_1 \left\{ 1 + \frac{3}{64} \left(\frac{2\pi a_1}{L} \right)^2 \left(9 \cdot \coth^6 \frac{2\pi h}{L} + 13 \cdot \coth^4 \frac{2\pi h}{L} + 11 \coth^2 \frac{2\pi h}{L} + 1 \right) \right\} \quad (6)$$

又、波速の式は (7) 式で表わされる。

$$c^2 = \frac{gL}{2\pi} \cdot \tanh \frac{2\pi h}{L} \left\{ 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{2\pi a_1}{L} \right)^2 \left(9 \cdot \coth^4 \frac{2\pi h}{L} - 6 \coth \frac{2\pi h}{L} + 5 \right) \right\} \quad (7)$$

Fig. 1 の座標系からもわかるように、田中の理論においては、 x 軸を平均水深より δ_0 だけ下方にとってあるため、実際の平均水深 d は $h + \delta_0$ に等しくなければならないが、これから行なう計算はすべて、 h を用いて計算を行ない、最後に平均水深に変換して、諸式の値と比較することにした。

この h を d に交換する場合には (8) 式を用いる。

$$d = h + \frac{\pi a_1^2}{L} \cdot \coth \frac{h \cdot 2\pi}{L} \quad (8)$$

§4. Skjelbreia による第3近似ストークス波の碎波点の計算

波の碎波点では普通、水平方向の流速成分 u の最大の点である波頂の流速 u と、波速 c が等しい時をもって碎波点と考える。つまり、碎波の条件式は (9) 式をもって表わされる。

$$u|_{\eta=\eta_0} = c \quad (9)$$

Skjelbreia の理論による碎波点の計算では、(4) 式の $\cos \theta$ の項は (1-3) より

$$\begin{aligned} V = & \frac{2\pi}{\sinh \frac{2\pi d}{L}} \cdot \left(\frac{a}{L} \right) \cdot \cosh \left[2\pi \left\{ \left(\frac{d}{L} \right) + \left(\frac{a}{L} \right) + \pi \cdot f_2 \left(\frac{d}{L} \right) \cdot \left(\frac{a}{L} \right)^2 + \pi^2 \cdot f_3 \left(\frac{d}{L} \right) \cdot \left(\frac{a}{L} \right)^3 \right\} \right] \\ & + \frac{3\pi^2}{\left(\sinh \frac{2\pi d}{L} \right)^4} \cdot \left(\frac{a}{L} \right)^2 \cdot \cosh \left[4\pi \left\{ \left(\frac{d}{L} \right) + \left(\frac{a}{L} \right) + \pi \cdot f_2 \left(\frac{d}{L} \right) \cdot \left(\frac{a}{L} \right)^2 + \pi^2 \cdot f_3 \left(\frac{d}{L} \right) \cdot \left(\frac{a}{L} \right)^3 \right\} \right] \\ & + \frac{3}{8} \pi^3 \frac{11 - 2 \cosh \frac{4\pi d}{L}}{\left(\sinh \frac{2\pi d}{L} \right)^7} \cdot \left(\frac{a}{L} \right)^3 \cdot \cosh \left[6\pi \left\{ \left(\frac{d}{L} \right) + \left(\frac{a}{L} \right) + \pi \cdot f_2 \left(\frac{d}{L} \right) \cdot \left(\frac{a}{L} \right)^2 + \pi^2 \cdot f_3 \left(\frac{d}{L} \right) \cdot \left(\frac{a}{L} \right)^3 \right\} \right] = 0 \quad (13) \end{aligned}$$

この (13) 式に (d/L) を与えて、(13) 式を解けば、碎波時の (a/L) が求まり、最初に与えた (d/L) と碎波時の (a/L) を (2-1) 式に代入すれば碎波時の (H/L) が計算できるわけである。

$$\begin{aligned} \eta_1 = & \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi a_1^2}{L} \cdot \coth \frac{2\pi h}{L} \\ & + \left\{ 1 + \frac{3}{8} \left(\frac{2\pi a_1}{L} \right)^2 \cdot \tanh^2 \frac{2\pi h}{L} \right. \\ & \times \left(1 + 2 \cdot \coth^2 \frac{2\pi h}{L} \right) \left. \right\} a_1 \cos \frac{2\pi x}{L} \\ & + \left\{ \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi a_1}{L} \cdot \coth \frac{2\pi h}{L} \cdot \left(3 \coth \frac{2\pi h}{L} - 1 \right) \right. \\ & \times a_1 \cdot \cos^2 \frac{2\pi x}{L} \\ & + \left\{ \frac{3}{64} \left(\frac{2\pi a_1}{L} \right)^2 \cdot \left(3 \cdot \coth^2 \frac{2\pi h}{L} - 1 \right) \right. \\ & \times \left. \left. \left(3 \cdot \coth^4 \frac{2\pi h}{L} + 1 \right) \right\} a_1 \cos^3 \frac{2\pi x}{L} \quad (5) \end{aligned}$$

波高 H と a_1 との関係は次式で表わされる。

$$\cos \theta = \cos 2\theta = \cos 3\theta = 1$$

となり、(4) 式は (10) 式となる。

$$\begin{aligned} \frac{u}{c} = & F_1 \cdot \cosh \frac{2\pi}{L} (d + \eta_0) + F_2 \cdot \cosh \frac{4\pi}{L} (d + \eta_0) \\ & + F_3 \cdot \cosh \frac{6\pi}{L} (d + \eta_0) = 1 \quad (10) \end{aligned}$$

又、(1) 式も (9) 式の条件から、次式のように書ける。

$$\eta_0 = a + \frac{\pi}{L} \cdot a^2 \cdot f_2 \left(\frac{d}{L} \right) + \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \cdot a^3 \cdot f_3 \left(\frac{d}{L} \right)$$

両辺を L で割ると (11) 式が求まる。

$$\frac{\eta_0}{L} = \left(\frac{a}{L} \right) + \pi \left(\frac{a}{L} \right)^2 \cdot f_2 \left(\frac{d}{L} \right) + \pi^2 \left(\frac{a}{L} \right)^3 \cdot f_3 \left(\frac{d}{L} \right) \quad (11)$$

(11) 式を $(d + \eta_0)$ の形に書きかえると (12) 式のようにになる。

$$\begin{aligned} \frac{(d + \eta_0)}{L} = & \frac{d}{L} + \left(\frac{a}{L} \right) + \pi \left(\frac{a}{L} \right)^2 \cdot f_2 \left(\frac{d}{L} \right) \\ & + \pi^2 \cdot \left(\frac{a}{L} \right)^3 \cdot f_3 \left(\frac{d}{L} \right) \quad (12) \end{aligned}$$

(12) 式を (10) 式に代入して整理すると (13) 式が得られる。

(13) 式を解く手順は (d/L) を、まず与え、それから、碎波点の近くと思われる $(a/L)_i$ の値を入れてやり、 V_i を計算し、その次に $(a/L)_i$ に $\Delta(a/L)$ だけずらした値 $(a/L)_{i+1}$ を入れて、 V_{i+1} を計算し、 $V_i \times V_{i+1} \leq 0$ になったら、解は $(a/L)_i$ と $(a/L)_{i+1}$ の間にあることになる。この $\Delta(a/L)$ をさらに小さく分けて、同様の計算を行ない、必要な精度の解が出るまで、これをくり返すわけである。

このようにして得られた碎波限界を Fig. 2, Fig. 3 に示す。Fig. 2, Fig. 3 から明らかなように、 $d/L > 0.19$ では $H/L \cong 0.12$ となり、 $d/L < 0.15$ になると、波高水深比 (H/d)

が Solitary wave の碎波限界である $(H/d) \cong 0.78$ より大きくなる。

この計算は $(d/L) = 0.08$ まで行なわれたが、過去に行なわれた実測値とますます離れる傾向にあるため、計算をストップした。 (d/L) が小さくなるにつれて、実験値と離れてゆくが、これは、解の収束が (d/L) が小さくなるにつれて悪くなることを示している。これについては、次節で述べることにする。

過去に計算された、ストークス波理論の碎波限界値を Fig. 2 に示す。Fig. 2 には、Skjelbreia の第3、第5近似理論により求めた値、岸が求めた値、等が示されている。Fig. 2 には示していないが、第3近似理論は $d/L > 0.2$ では、実験値とよく一致しているが、また、岸によって計算された第5次近似理論に較べて、少し小さい値を示している。また (d/L) が大きくなるにつれて、首藤の解に近づいて行くようである。

ここに示されている、Skjelbreia の第3及び第5近似理論は、ともに同じ方法で解を求めたものであるが、碎波限界の値には、かなりの違いが見られるが、近似度が高いからといって、より実測値に近い値を示すとは限らないようである。

なお、ストークス波の碎波限界の計算は、この他にも浜田・佐藤等により計算されているがここでは省くことにする。ともかく、碎波限界は最高波を意味するものであるから、理論の upper limit を示すものである。

§6. Inflection point の発生限界

ストークス波理論の誘導の過程で、速度ポテンシャルや流関数等を級数として、その最初の数項をとり、その係数を決定する。

このようにストークス波の理論は微小振幅波以外の、他の波の理論と同じく、解析的には解が得られないので、近似解として級数解とする。しかし、この級数解も無限項までとるべきであろうが、その最初の数項までしかとらないため、ある範囲を越えると、ストークス波の条件を満たさないことになる。

ストークス波は Permanent type の波であるが、波高、波長、水深の関係がある限度を越えると、波形の谷間の部分に小さな小山 Inflection point ができる。これは permanent type の波の条件を満たしていないことになる。この原因は級数解が収束しきっていないことを示すものであり、とりもなおさず、Inflection point の発生限界が、一応、理論の限界を示すものであり、級数解の型の良否を判断する手段となる。

ここで Skjelbreia の理論と、田中の理論の Inflection point 発生限界を求めてみる。

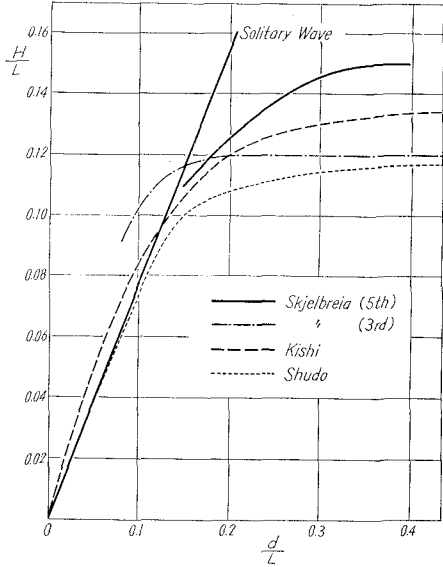


Fig. 2. Breaking Point of Stokes Wave

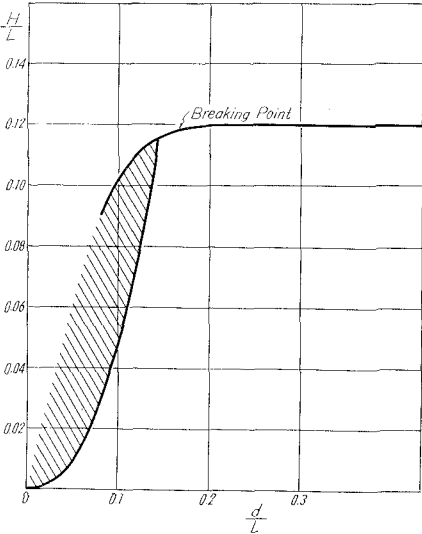


Fig. 3. Inflection point of Skjelbreia's Theory

1) Skjelbreia の理論による第3近似ストークス波の Inflection Point の発生点の計算

Inflection point とは、波の谷に小山ができるのであるから、 $\pi/2 < \theta < \pi$ の範囲で波の勾配 $\partial\eta/\partial x$ が $\partial\eta/\partial x \geq 0$ になっているところで、Inflection point が発生していることになる。波形は(1)式で表わされるが、ここで $t=0$ とおくと(14)式となる。

$$\eta = a \cdot \cos \theta + \pi \cdot \frac{a^2}{L} \cdot f_2 \left(\frac{d}{L} \right) \cdot \cos 2\theta + \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 a^2 f_3 \left(\frac{d}{L} \right) \cos 3\theta \quad (14)$$

(14) 式の θ を $\theta=2\pi x/L$ とおき、 x で微分して勾配を求めると(15)式が求まる。

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = -2\pi \left(\frac{a}{L} \right) \cdot \sin \theta - 4\pi^2 \left(\frac{a}{L} \right)^2 \cdot f_2 \left(\frac{d}{L} \right) \cdot \sin 2\theta - 6\pi^3 \cdot f_3 \left(\frac{d}{L} \right) \left(\frac{a}{L} \right)^3 \cdot \sin 3\theta \quad (15)$$

ここで(2-1)式を変形すると(16)式を得る。

$$\left(\frac{a}{L} \right)^3 + \frac{1}{\pi^2 f_3 \left(\frac{d}{L} \right)} \left(\frac{a}{L} \right) - \frac{1}{2\pi^2 f_3 \left(\frac{d}{L} \right)} \cdot \frac{H}{L} = 0 \quad (16)$$

この(16)式は正の実根を1個持ち、他の2根は虚根となる。この式を Cardano の方法で解くと、

$$P = \frac{1}{3\pi^2 \cdot f_3 \left(\frac{d}{L} \right)}, \quad Q = -\frac{1}{2\pi^2 \cdot f_3 \left(\frac{d}{L} \right)} \times \frac{H}{L}$$

とおいて、 a/L は(17)式で求まる。

$$\frac{a}{L} = \left[\frac{1}{2} (-Q + \sqrt{Q^2 + 4P^3}) \right]^{1/3} + \left[\frac{1}{2} (-Q - \sqrt{Q^2 + 4P^3}) \right]^{1/3} \quad (17)$$

(17) 式で求められた (a/L) を(15)式に代入し、最初に与えた (d/L) を与えて、 θ を $\pi/2 < \theta < \pi$ の間で変化させて、 $\partial\eta/\partial x$ を計算し、 $\partial\eta/\partial x \geq 0$ の点が存在するかどうかを判定させる。この計算結果を Fig. 3 に示す。

ここで、この Inflection point の発生点の Ursell の Parameter を(18)式を用いて計算し、これの比較も行なうことにした。なお、 η_0/L は(11)式を用いて計算を行なった。

$$(\eta_0/L) (L/d)^3 \quad (18)$$

2) 田中の理論による Inflection point 発生点の計算

田中の Inflection point の計算も Skjelbreia の計算方法と全く同じ方法で計算される。

(5) 式を x で微分すると、(19)式が求まる。

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial x} = - \left\{ 1 + \frac{3}{2} \pi^2 \left(\frac{a_1}{L} \right)^2 \cdot \tanh \frac{2\pi h}{L} \times \left(1 + \coth^2 \frac{2\pi h}{L} \right) \right\} \cdot \frac{a_1}{L} \cdot 2\pi \cdot \sin \theta - 2\pi^2 \left(\frac{a_1}{L} \right)^2 \cdot \coth \frac{2\pi h}{L} \left(3 \cdot \coth^3 \frac{2\pi h}{L} - 1 \right) \cdot$$

$$\times \sin 2\theta - \frac{9}{8} \left(\frac{a_1}{L} \right)^3 \left(3 \cdot \coth^2 \frac{2\pi h}{L} - 1 \right) \times \left(3 \cdot \coth^4 \frac{2\pi h}{L} + 1 \right) \sin 3\theta \quad (19)$$

ここで(6)式の両辺を L で割り(20)式とする。

$$\frac{H}{L} = 2 \cdot \frac{a_1}{L} \left\{ 1 + \frac{3}{64} \left(\frac{2\pi a_1}{L} \right)^2 \left(9 \cdot \coth^6 \frac{2\pi h}{L} + 13 \cdot \coth^4 \frac{2\pi h}{L} + 11 \cdot \coth^2 \frac{2\pi h}{L} + 1 \right) \right\} \quad (20)$$

(20) 式に H/L , h/L を与えて、Cardano の方法により三次方程式を解き a_1/L を求め、(19)式に代入して、 θ を $\pi/2 < \theta < \pi$ まで変化させ、 $\partial\eta_1/\partial x$ の正、負より、Inflection point の発生限界を求めた。

この結果は Fig. 4 に示す。

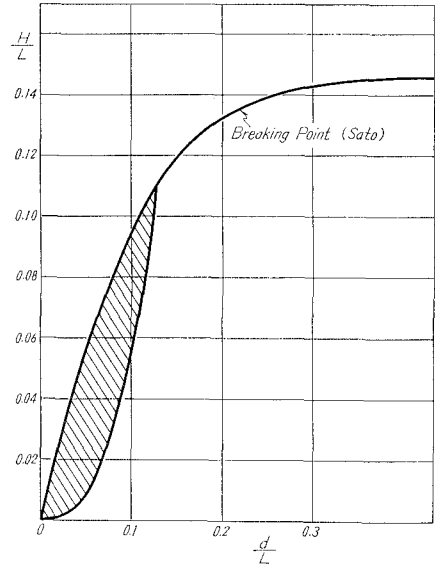


Fig. 4. Inflection point Tanaka's Theory

(7) 式より、 L/L_0 を求めると次式で表わされる。

$$\frac{L}{L_0} = \frac{2\pi L}{gT^2} = \frac{2\pi}{g} \cdot \frac{c^2}{L} = \tanh \frac{2\pi h}{L} \left\{ 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{2\pi a_1}{L} \right)^2 \times \left(9 \coth^4 \frac{2\pi h}{L} - 6 \coth^2 \frac{2\pi h}{L} + 5 \right) \right\} \quad (21)$$

(19) 式を解いて得られた Inflection point の発生限界の値 (h/L) を(8)式により (d/L) に変換し、(21)式を用いて (d/L_0) , (H/L_0) を計算して図化したのが Fig. 5 である。

この Inflection point が3個という意味は、波の谷の凹が1個と、 $\theta=\pi$ を軸として、その両側に1個ずつ対称に Inflection point が発生していることである。Inflection point が1個ということは、谷の凹以外には、波谷部に凸凹がないことを示している。

Fig. 5 から明らかなように、発生限界は両対数グラフに

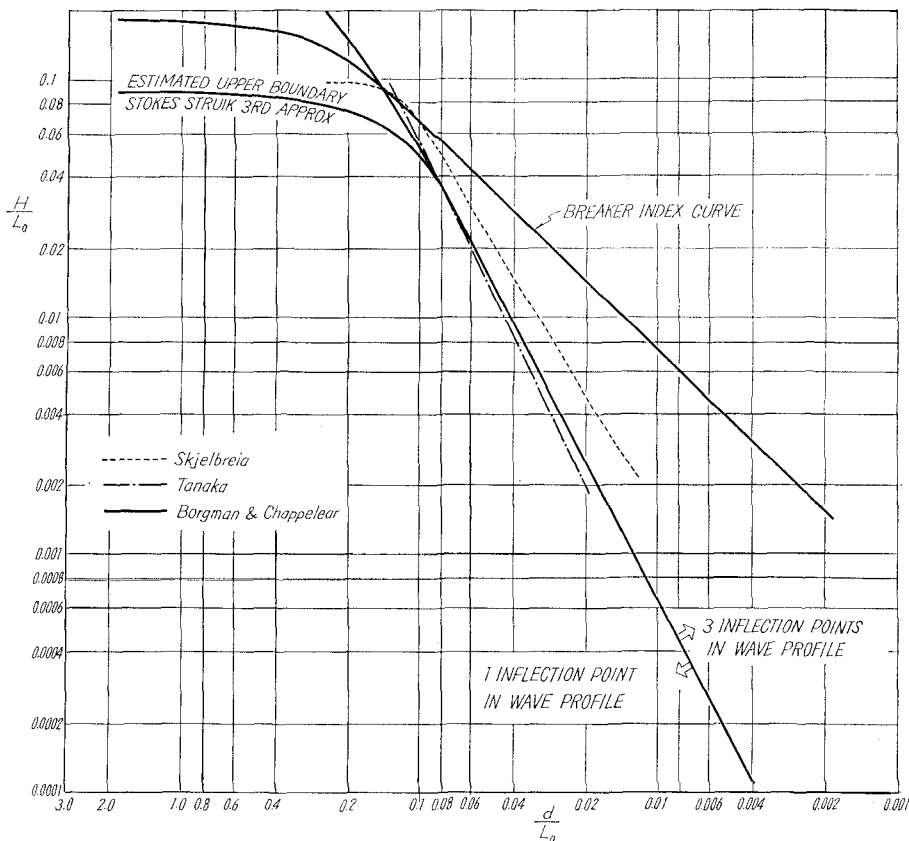


Fig. 5. Limit of Inflection Point

直線で示されているが、破線が Skjelbreia の第3近似ストークス波の理論で計算されたものであり、一点鎖線は田中の理論から求めたものである。実線は Borgman と Chappellear により求めたものである。ストークス波の収束性の目安を、この Inflection point の発生限界とするならば、上に述べた3つの理論を比較すると、適用領域の広さからいうと、Skjelbreia, Borgman & Chappellear, 田中の理論の順に、解の収束が悪くなっていることがわかる。

この Inflection point の発生限界と、砕波限界を同時に示したのが Fig. 3, Fig. 4 で、これは H/L と d/L で示してある。この H/L , d/L で表わすと Skjelbreia の理論、田中の理論より求めた、Inflection point の発生限界は、Fig. 5 に示すほどは違っていないようである。

Fig. 3 の Skjelbreia の方は、前節に述べたように、砕波限界を計算し、その値を使っているが、Fig. 4 の田中の理論の方は、まだ砕波限界の計算を行っていないので、一応、佐藤の理論による砕波限界を用いているが、近いうちに田中の理論の砕波限界を求める積りである。

この Fig. 3, Fig. 4 に示されている斜線の部分が Inflection point の発生点である。

以上の結果から、Skjelbreia および田中によるストーク

ス波理論の、理論的な適用限界は、砕波限界の内側で、Inflection point の発生限界の外側の領域である。

これは、あくまでも、ストークス波理論の、理論が妥当である領域であって、実測値と一致する領域とは必ずしも一致していないはずである。ストークス波理論値を実測値と比較し、その適用限界を調べたが、これについては後で述べることにする。

Wilson-Webb-Hendrickson は、Ursell の parameter ($\eta_0 L^2/d^3$) を用いて波を分類している。

確かに、波を分類するには、単純にはいかないが、 H , L , d の3つの緒元を含んでいる ursell の parameter の値が Inflection point の発生限界でいかなる値を持つか計算してみよう。

この計算は(18)式によって求められた。この ursell の parameter の Inflection point 発生限界の最小値は、Skjelbreia の第3近似ストークス波理論では $\eta_0 L^2/d^3 \cong 26.7$ であり、田中の理論の最小値は $\eta_0 L^2/d^3 \cong 24.8$ である。

§7. 波頂高について

波は海岸に近づくにつれて、その波高が増し、波長が短くなり、また、 η_0/H の値が大きくなる。また、この η_0

(波頂高) は、海上工事、構造物の設計等にも、重要な波の諸元である。ここでは、Skjelbreia の第3近似ストークス波理論と田中の理論を用いて、波頂高の計算を行ない、その計算結果を岸の求めた Skjelbreia の第5近似ストークス波理論の波頂高と我々の行った実験値と比較を行なった。

1) Skjelbreia の理論による波頂高の計算

(1) 式より波頂高は $\theta = 0$ であるから $\cos \theta = \cos 2\theta = \cos 3\theta = 1$ となり次式で表わされる。

$$\eta_0 = a + \pi \cdot \frac{a^2}{L} f_2\left(\frac{d}{L}\right) + \pi^2 \frac{a^3}{L^2} \cdot f_3\left(\frac{d}{L}\right)$$

上式の両辺を H で割ると

$$\frac{\eta_0}{H} = \frac{a}{H} + \pi \frac{a^2}{H \cdot L} f_2\left(\frac{d}{L}\right) + \pi^2 \frac{a^3}{H \cdot L^2} f_3\left(\frac{d}{L}\right) \quad (22)$$

(22) 式は (23) 式のように書きかえられる。

$$\frac{\eta_0}{H} = \frac{a/L}{H/L} + \pi \left(\frac{a}{L}\right)^2 \frac{1}{H/L} f_2\left(\frac{d}{L}\right) + \pi^2 \left(\frac{a}{L}\right) \frac{1}{H/L} \cdot f_3\left(\frac{d}{L}\right) \quad (23)$$

ここで (2) 式を次式のように変形する。

$$\left(\frac{a}{L}\right)^3 + \frac{1}{\pi^2 F_3} \left(\frac{a}{L}\right) - \frac{1}{2\pi^2 F_3} \left(\frac{H}{L}\right) = 0 \quad (24)$$

(24) 式に H/L と d/L を与え Cardano の方法で a/L を求め (23) 式に a/L , H/L を代入すると η_0/H が求まる。

ここで

$$L_0 = \frac{gT^2}{2\pi} = \frac{g}{2\pi} \cdot \frac{L^2}{c^2} \text{ より} \\ \frac{L}{L_0} = \frac{2\pi c^2}{gL} = \tanh \frac{2\pi d}{L} \\ \times \left[1 + 4\pi^2 \left(\frac{a}{L}\right)^2 \frac{\cosh \frac{8d\pi}{L} + 8}{8 \left(\sinh \frac{2\pi d}{L}\right)^4} \right] \quad (25)$$

$$\eta_0 = \frac{\pi a_1^2}{L} \cdot \coth \frac{2\pi h}{L} + \left\{ 1 + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{\pi a_1}{L}\right)^2 \cdot \tanh \frac{2\pi h}{L} \left(1 + 2 \cdot \coth^2 \frac{2\pi h}{L} \right) \right\} \cdot a_1 \\ + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a_1^2}{L} \cdot \coth \frac{2\pi h}{L} \left(3 \cdot \coth^2 \frac{2\pi h}{L} - 1 \right) + \frac{3}{16} \cdot \frac{a_1^3}{L^2} \left(3 \cdot \coth^2 \frac{2\pi h}{L} - 1 \right) \left(3 \cdot \coth^4 \frac{2\pi h}{L} + 1 \right) \quad (28)$$

波頂高 η_0/H は (29) 式で表わされる。

$$\frac{\eta_0}{H} = \pi \left(\frac{a_1}{L}\right)^2 \frac{1}{H/L} \cdot \coth \frac{2\pi h}{L} + \left\{ 1 + \frac{3}{2} \pi^2 \cdot \left(\frac{a_1}{L}\right)^2 \tanh \frac{2\pi h}{L} \left(1 + 2 \cdot \coth^2 \frac{2\pi h}{L} \right) \right\} \left(\frac{a_1/L}{H/L}\right) \\ + \frac{\pi}{2} \left(\frac{a_1}{L}\right)^2 \frac{1}{H/L} \coth \frac{2\pi h}{L} \left(3 \cdot \coth^2 \frac{2\pi h}{L} - 1 \right) \quad (29)$$

ここで H と a_1 の関係を次式のように表わし

$$H = 2 \left\{ 1 + \frac{3}{64} \left(\frac{2\pi a_1}{L}\right)^2 \left(9 \cdot \coth^6 \frac{2\pi h}{L} + 13 \coth^4 \frac{2\pi h}{L} + 11 \cdot \coth^2 \frac{2\pi h}{L} - 1 \right) \right\} a_1 \quad (30)$$

(27) 式の両辺を L で割り、 a_1/L の 3 次式の型に変形して Cardano の方法で a_1/L を求め、 a_1/L とその時の h/L を (29) 式に代入することによって、波頂高 η_0/H が求まる。

又、水深-波長比 d/L_0 と波高-波長比 H/L_0 は次式で求まる。

となり η_0/H を求めた時の d/L , a/L を代入し、 L/L_0 を求める。 d/L_0 , H/L_0 はそれぞれ次式で求まる。

$$\frac{d}{L_0} = \frac{d}{L} \cdot \frac{L}{L_0} \quad (26)$$

$$\frac{H}{L_0} = \frac{H}{L} \cdot \frac{L}{L_0} \quad (27)$$

この計算結果は Fig. 6 に示す。

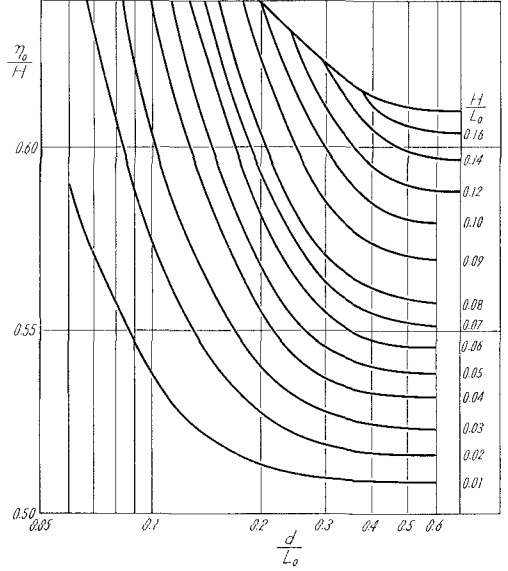


Fig. 6. Ratio of Crest Elevation above Still Water to Wave Height (Skjelbreia)

2) 田中の理論による波頂高の計算

田中の理論の波頂高の式は (5) 式より

$$\cos \theta = \cos 2\theta = \cos 3\theta = 1$$

であるから、(28) 式が求まる。

$$\frac{d}{L_0} = \frac{d}{L} \cdot \frac{L}{L_0} \quad (31)$$

$$\frac{H}{L_0} = \frac{H}{L} \cdot \frac{L}{L_0} \quad (32)$$

ただし、田中の理論では L/L_0 は次式の関係で表わされている。

$$\frac{L}{L_0} = \tanh \frac{2\pi h}{L} \left\{ 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{a_1}{L} \right)^2 \right. \\ \left. \times \left(9 \cdot \coth^4 \frac{2\pi h}{L} - 6 \cdot \coth^2 \frac{2\pi h}{L} + 5 \right) \right\}$$

ここで田中の理論の計算結果を、(8)式を用いて h を平均水深 d に変換し、その値を Fig. 7 に示す。

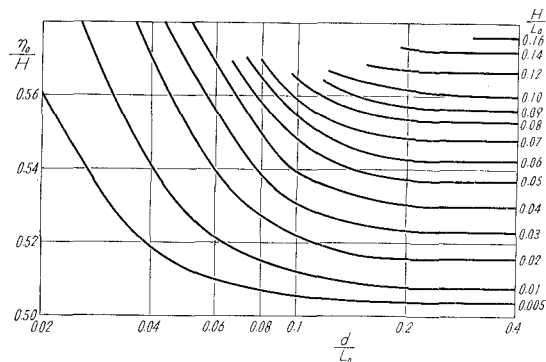


Fig. 7. Ratio of Crest Elevation above Still Water to Wave Height (Tanaka)

Fig. 6, Fig. 7 を比較すると、波頂高の値は、Skjelbreia の第3近似 Stokes 波理論で求めた値の方が、田中の式で求めた値より大きくでている。 (d/L_0) が小さくなるにつれて、また、 (H/L_0) が大きくなるにつれて、その差は大きくなる。第5次近似の Stokes 波理論による波頂高の計算は、すでに岸によってなされているが、その値と比較すると碎波点近傍では (η_0/H) の値が異なっているが、 (H/L_0) が小さくなる時は、第3近似理論と全く同じであると言ってさしつかえないようである。その値を Fig. 8 に示す。波頂高の実験値と Skjelbreia の第3近似 Stokes 波の波頂高の理論値との比較は、前論文“クノイド波の二・三の特性

と適用限界について” の Fig. 8 の (a)~(h) に示されている。この実験値との比較図によると (a) 図の $(H/L_0) = 0.1$ の場合には、この Stokes 波理論は実測値とかなり良く一致している。また (b) 図は $(H/L_0) = 0.08$ であるが、この時は、 $(d/L_0) > 0.3$ 位までは、よく理論値と一致している。(c) 図は $(H/L_0) = 0.06$ であるが、この場合も $(d/L_0) > 0.3$ の範囲では、Stokes 波理論に一致しているようである。また $(H/L_0) = 0.04$ の時もその傾向がある。以上の事から判断して、Skjelbreia の第3近似理論は $(d/L_0) > 0.3$ の範囲では実測値とかなりよく一致していることがわかる。この波頂高から一応 Stokes 波の適用限界は、 $(d/L_0) > 0.3$ であることが解ったが、適用限界は (d/L_0) のみならず、波高との関連もあるはずであるが、この実験からは、はっきりしなかった。岩垣博士は実験結果から、Stokes 波の適用限界を $T \cdot \sqrt{g/d} < 10$ と定めているが、これを書き直すと次の如くなる。

$$T \cdot \sqrt{g/d} < 10 \text{ から逆数を取り2乗すると} \\ d/g T^2 > 1/100 \text{ となり、我々の表示と同じようにとると} \\ 2\pi d/g T^2 = d/L_0 > 6.28/100$$

よって $(d/L_0) > 0.628$ となる。これは我々の実験値からすると、少々適用限界がゆるすぎる様であるが、 (η_0/H) の測定には、かなりの誤差があることも考えられるので、一概には言えないようである。波頂高の実験から、Stokes 波の適用限界を定めるためには、より精度の高い実験が行なわなければならない。前に第3と第5近似の Stokes 波の波頂高の計算値はよく一致していることを述べたが、この第5近似理論の波頂高と Bretschneider が求めた波頂高の比較が、支部技術資料 21 号に示されているので御参照願いたい。

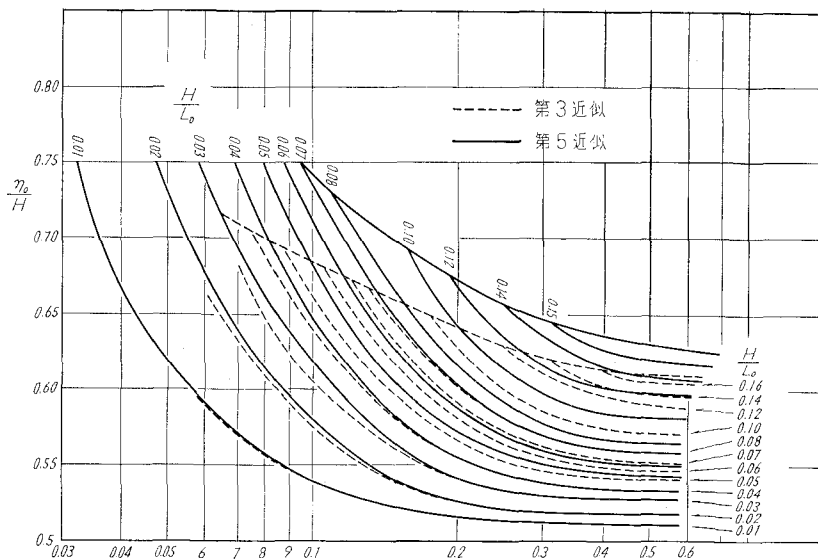


Fig. 8. 第3近似と第5近似の波長高

結 論

1. Skjelbreia の第3近似 Stokes 波理論の砕波点は、 $(d/L) > 0.19$ の範囲では $(H/L) \cong 0.12$ となり、 $(d/L) < 0.15$ では $(H/d) > 0.78$ となる。また第5近似 Stokes 波理論とを比較すると $(d/L) > 0.18$ では第5近似理論の (H/L) の方が大きく、 $(d/L) < 0.18$ では、その逆で、どちらが実測値に近いかは明白でない。

2. 解の収束の良否の判定条件の一つと思われる Inflection point の発生限界の計算を、Skjelbreia の第3近似理論・田中の理論で計算を行ない、Borgman 等が計算したものと比較した結果、Skjelbreia, Borgman-Chappelear, 田中の理論の順に収束が早いと思われる。また砕波限界と Inflection point 発生限界の線で囲まれる領域が、理論から求まる適用の限界と思われ、その領域を図示した。この適用範囲は、理論と実測値の適合度から求まる適用範囲とは別である。

3. Inflection point の発生限界の最小値は、Skjelbreia の理論では $(\eta_0 L^2/d^3) \cong 26.7$ であり、田中の理論では $(\eta_0 L^2/d_3) \cong 24.8$ であった。

4. 波頂高は、Skjelbreia の第3近似 Stokes 波理論の方が田中の理論より (η_0/H) は大きい。また第5近似、第3近似理論を比較すると、 (H/L_0) が大きくなると、第5近似理論の方が、第3近似よりも (η_0/H) の値が大きくていて、 (H/L_0) が小さな時は、両理論共殆んど一致している。

5. 実測値に対する Skjelbreia の第3近似理論の適用限界は、前論文の Fig. 4 の波速から判断すると $(d/L) > 0.25$ ではほぼ実測値と一致している様であるが、また波頂高からその適合度を調べると $(d/L_0) > 0.3$ の範囲では、よく実測値と一致している様である。この Stokes 波理論の適用限界については、理論的に Laitone, Keulegan により与えられているが、未だ明確なる解答はでていない。岩垣は、実験結果から Stokes 波の適用限界を $T \cdot \sqrt{g/d} < 10$ と定めているが、これを (d/L_0) に換算すると $(d/L_0) > 0.0628$ となる。この適用限界は、我々の実験値から判断すると、少し広すぎるようである。

後記； Stokes 波の適用限界を明確にする積りであったが、実験装置の不備と、限界付近では波形勾配がゆるいため、計測の精度が落ちた為、概略の適用限界を与えるに止った。尚計算には、北大計算センターの NEAC-2203G 及び、HIPAC-103 を用いた。

参 考 文 献

- 岸 力：進行波の砕波限界。建設省土木研究所報告，1954年，91-4.
- 首藤伸夫：高次級数解による進行波の砕波限界：施設省土木研究所報告，1961年，111-4.
- 岩垣雄一：Stokes 波とクノイド波の適用限界について。第14回海岸工学講演会講演集，1967.
- 岩垣雄一：クノイド波に関する研究（第一報）。京大防災研究所年報7号，1964.
- 岸 力・佐伯 浩：クノイド波に関する研究。第11回海岸工学講演会講演集，1964.
- 岸 力・佐伯 浩・石田昌寿：有限振幅波の性質について。土木学会北海道支部技術資料，第21号，1965.
- 田中 清：海の波の解析概論。海岸工学講演会講演集，1955.
- Skjelbreia, L.: Gravity Waves, Stokes Third order Approximation Table of Functions. Council of Waue Research, the Engineering Foundation 1959.
- Skjelbreia, L. and Hendrickson, J. A. [1960]: Fifth order Grawity Wave Theory. Proc. 7th Conf. on Coastal Eng. Vol. 1.
- Wilson, B. W, L. M. Webb and J. A. Hendrickson: the Nature of Tsunami. NESCO Tech. Rept. No. SN 57-2 (1962).
- Borgman, L. E. and Chappelear: The use of the Stokes-Struik approximation for wave of finite height. Proc. 6th Conf on Coastal Eng.
- Laitone, E. V.: Limiting Conditions for Cnoidal and Stokes Wave. Jour. of Geophysical Research Vol. 67, No. 4, 1962.
- Sato, S.: Surface Wave in Shallow Water. Jour. of Research, Public Works Research Institute Vol. 1, Paper No. 2, 1954.