

クノイド波理論の二・三の特性と、適用限界について

正員 佐 伯 浩*
 正員 泉 冽**
 学生員 ○新 井 泰 澄***

§1. 緒 論

Korteweg-de Vries によって、最初に発見された、クノイド波理論は、その後、Keulegan, Benjamin, Laitone, Chappellear, Masch 等により研究されてきた。クノイド波理論には、第1種・第2種の完全だ円積分である K, E が入っているため、その理論が非常に難解なものと思われ、あまり実用的なものではなかった様に思われる。

クノイド波理論は、ストークス波理論が適用される領域よりも、より浅い領域で使われるべく、たてられた理論であるが、今だ、その理論の適用限界については、2, 3の研究があるのみで、その適用限界は判然としていない。

本研究では、Laitone が導いた、クノイド波の第1次・第2次近似理論を用いて、波速・波頂高の特性及び実験値との比較を行ない、さらに第1・第2次近似理論の相異点を調べ、その適用限界について述べたものである。

又、だ円積分の母数 k と、第1種・第2種完全だ円積分値 K, E との関係は、 k が小さい場合に對しては、林桂一, Jahnke-Emde, Kaplan 等により計算されている。 $k \rightarrow 1$ の時の K, E の値は、ある程度まで、Wiegel-Masch により計算されているので、我々は、Wiegel-Masch により計算された K, E の値を使った。

§2. クノイド波理論

前にも述べたように、本研究では Laitone の第1・第2近似のクノイド波理論を用いるが、この Laitone の理論においては、計算の便利さから記号を Fig. 1 の如くとしている。

Laitone の理論は平均水深 d を用いないで、波の谷からの深さ h , 平均水面と谷の距離 δ , 谷から水面までの距離 η_* で全て表わされているので、この Laitone の式を η, d, L を用いて表わすと以下の如くなる。Suffix 1 は第1次近似理論, 2 は第2次近似理論を表わす。

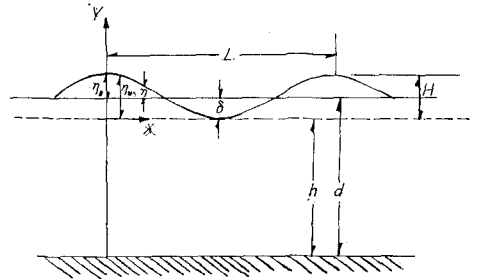


Fig. 1. Coordinate system

$$\delta_1 = H \cdot K_1 \quad (1)$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2} \left\{ (H \cdot K_1 + d) - \sqrt{(H \cdot K_1 + d)^2 - 4(d \cdot H \cdot K_1 + H^2 \cdot K_2)} \right\} \quad (2)$$

$$h_1 = d - K_1 \cdot H \quad (3)$$

$$h_2 = \frac{1}{2} \left\{ (d - H \cdot K_1) + \sqrt{(d - H \cdot K_1)^2 - 4H^2 \cdot K_2} \right\} \quad (4)$$

$$K_1 = \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1 \right)$$

$$K_2 = \frac{1}{12k^4} \left\{ 8 - 11k^2 + 3k^4 - (8 - 7k^2) \frac{E}{K} \right\}$$

k : Jacobi の楕円関数の母数

K : 第1種完全楕円積分

$$K = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi$$

E : 第2種完全楕円積分

$$E = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi$$

(1) 波 形

$$\eta_1 = H \left\{ cn^2 \left(2K \cdot \frac{x}{L}, k \right) - K_1 \right\} \quad (5)$$

$$\eta_2 = H \cdot cn^2 \left(2K \cdot \frac{x}{L}, k \right) - \frac{3}{2} H^2$$

* 北海道大学工学部土木工学科 助教授

** 北海道大学工学部土木工学科 助 手

*** 北海道大学工学部大学院

$$\times \frac{cn^2 \left(2K \cdot \frac{x}{L}, k \right) \left\{ 1 - cn^2 \left(2K \cdot \frac{x}{L}, k \right) \right\}}{(d - H \cdot K_1) + \sqrt{(d - H \cdot K_1)^2 - 4H^2 K_2}} - \frac{1}{2} \left\{ (HK_1 + d) - \sqrt{(HK_1 + d)^2 - 4(dHK_1 + H^2 K_2)} \right\} \quad (6)$$

(2) 波 長

$$L_1 = \frac{4kK(d - HK_1)^{3/2}}{(3H)^{1/2}} \cdot \left\{ 1 + K_3 \cdot \frac{H}{d - HK_1} \right\} \quad (7)$$

$$L_2 = \frac{4kK}{(3H)^{1/2}} \left[\frac{1}{2} \left\{ (d - HK_1) + \sqrt{(d - HK_1)^2 - 4H^2 K_2} \right\}^{3/2} \right. \\ \left. \times \left[1 - K_4 \cdot \frac{2H}{\{(d - HK_1) + \sqrt{(d - HK_1)^2 - 4H^2 K_2}\}} \right]^{-1} \right] \quad (8)$$

$$K_3 = \frac{3}{2} \left(\frac{2k^2 - 1}{k^2} \right)$$

$$K_4 = \frac{7k^2 - 2}{8k^2}$$

(3) 波 速

$$\frac{c_1}{\sqrt{gd}} = \sqrt{1 - K_1 \frac{H}{d}} + \frac{H}{\sqrt{d(d - HK_1)}} \cdot K_5 \quad (9)$$

$$\frac{c_2}{\sqrt{gd}} = \frac{c_1}{\sqrt{gd}} + \frac{H^2 \cdot K_6}{d^{1/2} \left[\frac{1}{2} \left\{ (d - HK_1) + \sqrt{(d - HK_1)^2 - 4H^2 K_2} \right\} \right]^{3/2}} \quad (9')$$

$$\frac{c_2}{\sqrt{gd}} = \sqrt{1 - K_1 \frac{H}{d}} + \frac{H}{\sqrt{d(d - HK_1)}} \cdot K_5 +$$

$$\times \frac{H^2}{d^{1/2} \left[\frac{1}{2} \left\{ (d - HK_1) + \sqrt{(d - HK_1)^2 - 4H^2 K_2} \right\} \right]^{3/2}} \cdot K_6 \quad (10)$$

$$K_5 = \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{E}{K} \right)$$

$$K_6 = \frac{1}{k^4} \left\{ \frac{E}{K} \left(\frac{E}{K} + \frac{3}{4} k^2 - 1 \right) - \left(\frac{k^4 + 14k^2 - 9}{40} \right) \right\}$$

§3. クノイド波の波速について

第1次近似理論波速の式は(9)式に示されている。この式を変形すると次の(11)式が得られる。

$$\frac{c_1}{\sqrt{gd}} = \sqrt{1 - K_1 \frac{H}{d}} + \frac{H/d}{\sqrt{1 - K_1 \frac{H}{d}}} \cdot K_5 \quad (11)$$

又(7)式を変形すると次の(12)式が得られる。

$$\frac{d}{L_1} = \frac{(3H)^{1/2} \cdot d}{4kK(d - HK_1)^{3/2} \cdot \left\{ 1 + K_3 \frac{H}{d - HK_1} \right\}} \\ = \frac{\sqrt{3}}{4kK \left(\frac{H}{d} \right) \left(\frac{d}{H} - K_1 \right)^{3/2} \cdot \left\{ 1 + K_3 \frac{H/d}{1 - K_1(H/d)} \right\}} \quad (12)$$

(11)式に k と (H/d) を与えると、 K_1 , K_5 が決まり $c_1/\sqrt{gd}$ が求まる。また(12)式に k と (H/d) を与えると (d/L_1) が決まり $(c_1/\sqrt{gd}) \cdot (H/d) \cdot (d/L_1)$ の関係が求まる。この計算結果を Fig. 2 に示す。

第2次近似理論による波速は(10)式で示されている。この(10)式を変形すると次の(13)式が得られる。また(8)式を変形すると(14)式が得られる。

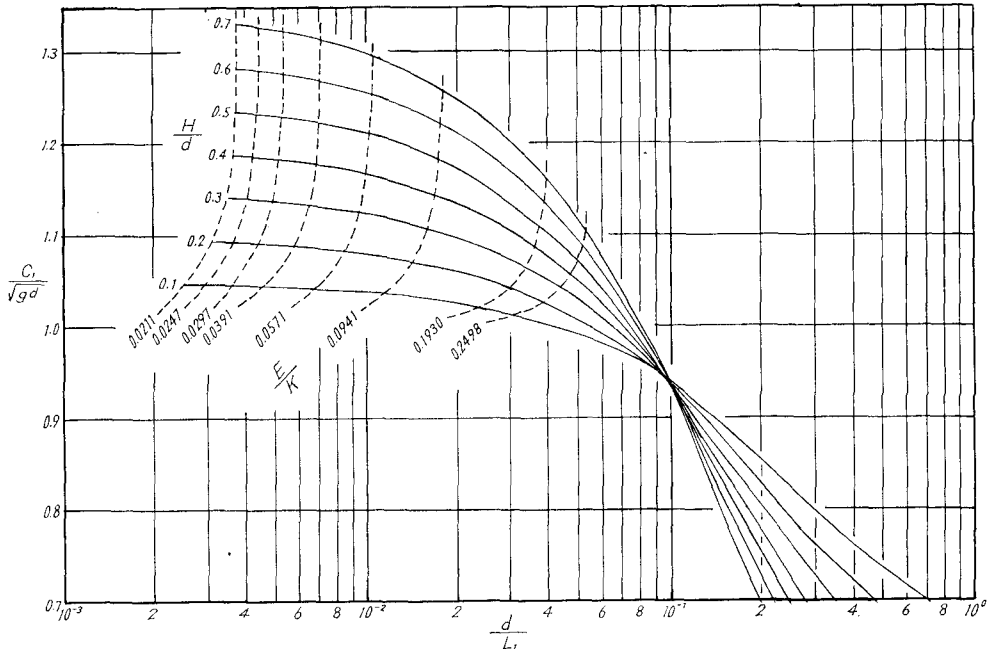


Fig. 2. Wave Velocity of 1st order Cnoidal Wave

$$\frac{c_2}{\sqrt{gd}} = \sqrt{1 - K_1 \frac{H}{d}} + \frac{H/d}{\sqrt{1 - K_1 \frac{H}{d}}} \cdot K_5 + \left(\frac{H}{d}\right)^2 \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(1 - K_1 \frac{H}{d}\right) + \sqrt{\left(1 - K_1 \frac{H}{d}\right)^2 - 4 \left(\frac{H}{d}\right)^2 K_2} \right\} \right]^{-\frac{3}{2}} \cdot K_6 \quad (13)$$

$$\frac{d}{L_2} = \frac{\sqrt{3}}{4kK} \cdot \sqrt{\frac{H}{d}} \cdot \frac{1}{\left[\frac{1}{2} \left\{ \left(1 - K_1 \frac{H}{d}\right) + \sqrt{\left(1 - K_1 \frac{H}{d}\right)^2 - 4 \left(\frac{H}{d}\right)^2 K_2} \right\} \right]^{3/2}} \times \left[1 - K_4 \cdot \frac{2 \cdot H/d}{\left\{ \left(1 - K_1 \frac{H}{d}\right) + \sqrt{\left(1 - K_1 \frac{H}{d}\right)^2 - 4 \left(\frac{H}{d}\right)^2 K_2} \right\}} \right] \quad (14)$$

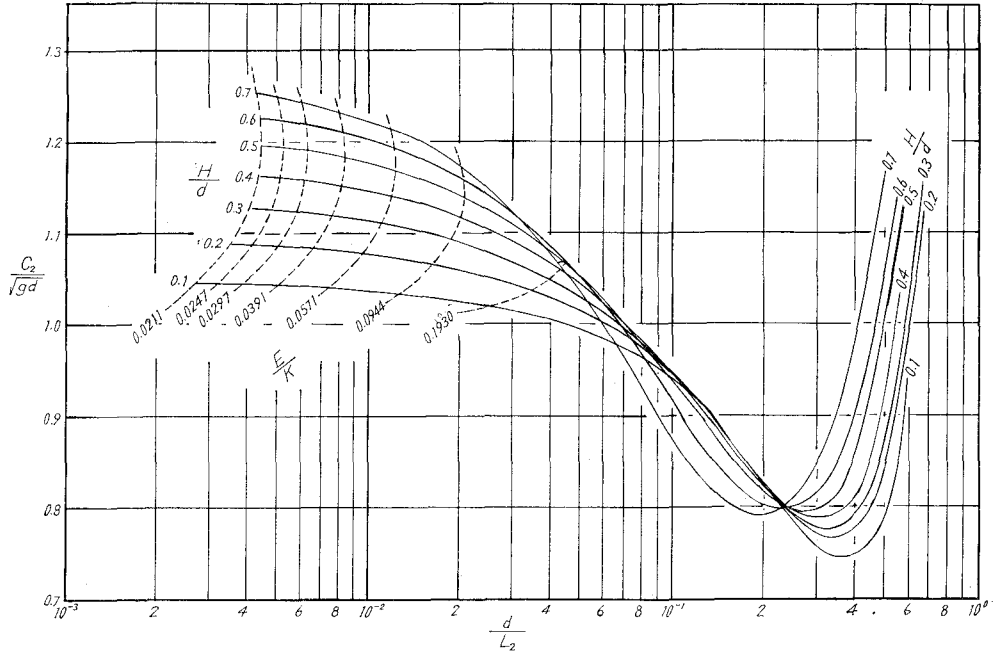


Fig. 3. Wave Velocity of 2nd order Cnoidal Wave

第1近似の場合と同様に k と (H/d) とを与えると、 $(c_2/\sqrt{gd}) \cdot (H/d) \cdot (d/L_2)$ の関係が求められる。この計算結果は Fig. 3 に示すとおりである。第1次近似解では、 $(d/L_2) = 0.1$ で (H/d) の値に関係なく $(c_2/\sqrt{gd}) = 0.94$ に収束している。 $(d/L_2) < 0.1$ では (H/d) が大きいものほど $(c_2/\sqrt{gd})$ の値が大きくなり $(d/L_2) > 0.1$ では、 (H/d) が小さいものほど $(c_2/\sqrt{gd})$ の値が大きくなっている。また、第2次近似理論では、第1次近似理論の場合と傾向が、かなり異なっている。第1次近似理論では、 $d/L_2 = 0.1$ で波速の値が逆転しているが、第2次近似理論では、 $d/L_2 = 0.045, 0.25$ でそれぞれ逆転している。ストークス波理論ならびに孤立波理論では、 (d/L_2) に関係なく、 (H/d) が、大きくなるにつれて $(c_2/\sqrt{gd})$ が大きくなっている。本来、クノイド波理論というものは、ストークス波の理論より浅い領域に適用されるべく作られた理論であり、又そのクノイド波の極限が孤立波であることを考えると、当然クノイド波の波速 $(c_2/\sqrt{gd})$ は (H/d) が大きくなるにつれて、大きくなるのではないかと

と考えられる。この事を考えるならば、波速の値が逆転する事は、不合理のようである。以上の事から、クノイド波の適用限界を決めると、第1次近似理論では $d/L_2 < 0.1$ 、第2次近似理論では、 $d/L_2 < 0.045$ となる。

§4. 波速の計算結果と実験値との比較

(I) 実験装置並びに実験方法

本研究で行なわれた実験は、長さ 15.0 m 幅 0.8 m の両面ガラス張り鋼製水路で行なわれた。実験された水深は、10.5 cm, 13.5 cm, 16.5 cm, 21.5 cm, 26.5 cm, 46.5 cm, の6種類であり、周期は 0.6~1.8 秒であった。また波高は、1.6~14.8 cm の範囲であった。波高、波長等の測定には全て 16 mm カメラと 35 mm カメラを用いた。本実験では、 (d/L_2) を広範囲にする必要があったため、水深をかなり浅くした。このため、底面の摩擦の影響がかなりあると思われるが、水路長が短かいためにとられた、やむを得ない措置であった。底面はビニール塗料で塗装してある。また、

反射波の影響を消波構造物など施して、出来るだけ除くようにした。得られたデータの数は、約 420 個であった。

(2) 波速の実験結果

$(c/\sqrt{gd})$ と (d/L) との関係をプロットしたものが Fig. 4 である。実験値は、 $0.08 < H/d < 0.61$ の範囲である。この Fig. 4 から明らかに、相対的にみて、ストークス波の波速の実験値から判断した適用限界は、 d/L が略々、 0.25 以上のようなのである。 $d/L < 0.25$ になると、 $c/\sqrt{gd}$ はストークス波理論から求まる値より小さくなり、クノイド波理論の値に近づくようである。なお Fig. 4 に示されてい

る曲線は、Skjelbreia のストークス波第 3 次近似理論より求めた値である。個々の (H/d) に対する $(c/\sqrt{gd})$ と (d/L) の関係を示したものが Fig. 5 の (a), (b), (c), (d), であ

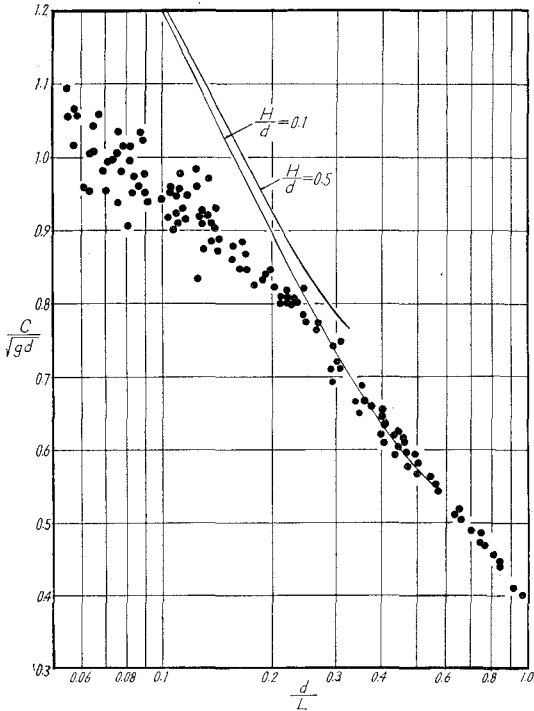


Fig. 4.

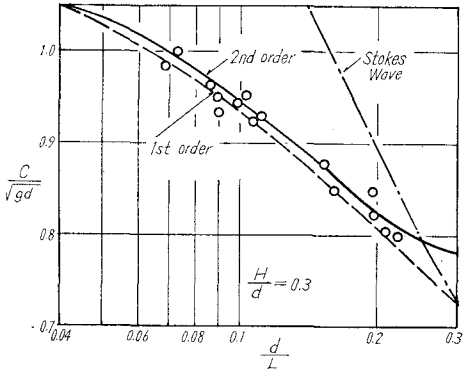


Fig. 5. (b)

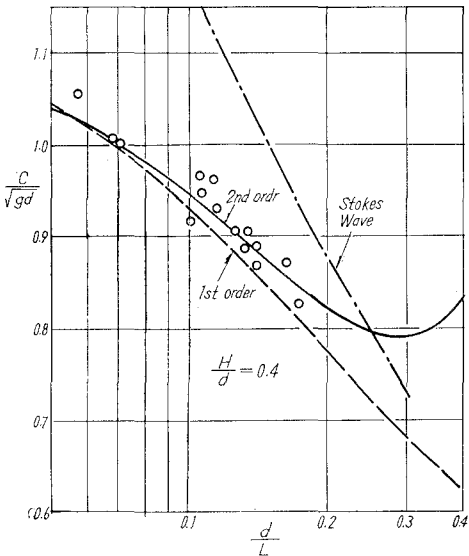


Fig. 5. (c)

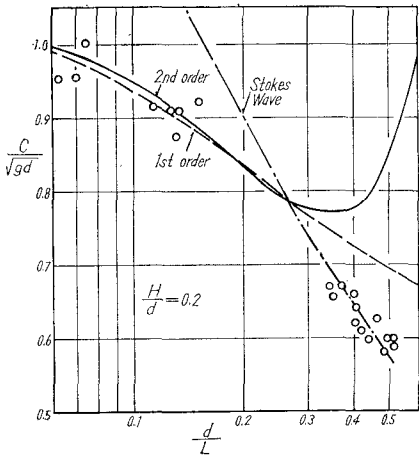


Fig. 5. (a)

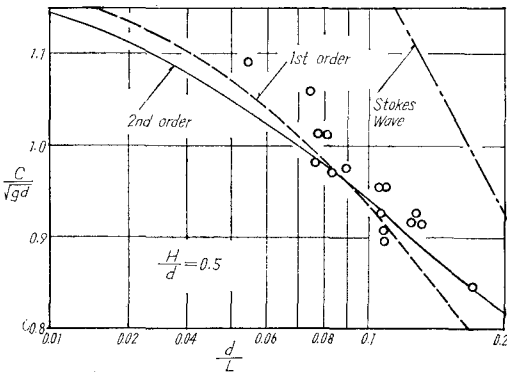


Fig. 5. (d)

り、それぞれ、 (H/d) が 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 である。(a) では、 $(H/d)=0.2$ の時であるが、 $(d/L)>0.3$ では、ストークス波理論によく適合し、 $(d/L)<0.16$ では、クノイド波理論によく一致している。 (d/L) が小さくなると、実験値のばらつきが目立つが、これは波形勾配がゆるくなるため、波長の読みに誤差が生じやすい事と、波高が小さいためと思われる。 $(H/d)=0.3$ の時は、 $(d/L)<0.25$ の範囲では、実験値は、クノイド波理論にかなりよく一致している。 $(H/d)=0.4$ の時は、 $(d/L)<0.2$ でよくクノイド波理論と一致している。 $(H/d)=0.5$ の時は $(d/L)<0.17$ でクノイド波理論に近い値を示している。

以上の波速の実験結果から判断して、 $(d/L)<0.2$ でクノイド波理論の波速と一致してるようであり、ストークス波理論の方は $(d/L)>0.3$ でよく一致しているようである。またクノイド波理論の第1と第2次近似理論の計算値を比

較すると、 $(H/d)=0.2$ で $d/L<0.27$ 、 $(H/d)=0.3$ で $d/L<0.2$ 、 $(H/d)=0.4$ で $d/L<0.18$ 、 $(H/d)=0.5$ で $d/L<0.1$ でよく、第1次、第2次近似理論が一致しているようである。が、また (d/L) が小さくなると離れ、また (H/d) が大きくなるにつれて離れてくるが、これはクノイド波理論の極限である、孤立波の第1、第2次近似理論の波速を考えると明らかな事である。

なお、実験装置の関係で $d/L>0.05$ の範囲しか実験ができなかったので、この節では一応、 d/L のみで適用範囲を表わしたが、波高 H も適用限界にかなり影響を及ぼすように思われる。

§5. クノイド波の波頂高について

$$\frac{\eta_1}{H} = \frac{H-\delta_1}{H} = 1-K_1 \quad (15)$$

$$\frac{\eta_2}{H} = \frac{H-\delta_2}{H} = 1 - \frac{1}{2} \left\{ \left(K_1 + \frac{d}{H} \right) - \sqrt{\left(K_1 + \frac{d}{H} \right)^2 - 4 \left(\frac{d}{H} \cdot K_1 + K_2 \right)} \right\} \quad (16)$$

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{2\pi c_1^2}{g L_1} = 2\pi \cdot \frac{d}{L_1} \left\{ \sqrt{1-K_1} \frac{H}{d} + \frac{(H/d) \cdot K_5}{\sqrt{1-K_1}(H/d)} \right\} \quad (17)$$

$$\frac{d}{L_0} = \frac{d}{L_1} \times \frac{L_1}{L_0}, \quad \frac{H}{L_0} = \frac{H}{L_1} \times \frac{L_1}{L_0} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{L_2}{L_0} = \frac{2\pi c_2^2}{g L_2} = 2\pi \cdot \frac{d}{L_2} \cdot & \left[\sqrt{1-K_1} \frac{H}{d} + \frac{H/d}{\sqrt{1-K_1} \frac{H}{d}} K_5 \right. \\ & \left. + \frac{(H/d)^2 \cdot K_6}{\left[\frac{1}{2} \left\{ 1-K_1 \frac{H}{d} + \sqrt{\left(1-K_1 \frac{H}{d} \right)^2 - 4 \left(\frac{H}{d} \right)^2 K_2} \right\} \right]^{3/2}} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{d}{L_0} = \frac{d}{L_2} \cdot \frac{L_2}{L_0}, \quad \frac{H}{L_0} = \frac{H}{L_0} \cdot \frac{L_2}{L_0} \quad (20)$$

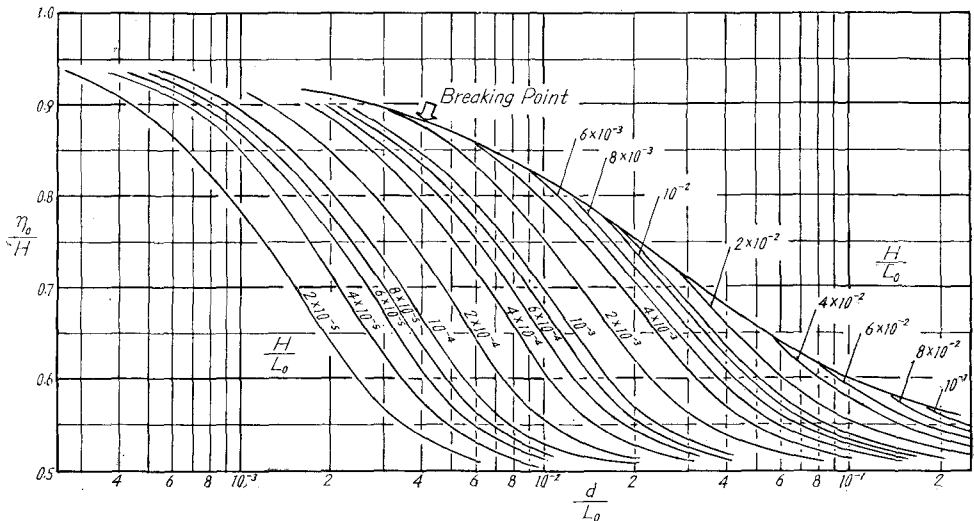


Fig. 6. Ratio of Crest Elevation above Still Water to Wave Height (1st order Cnoidal Wave)

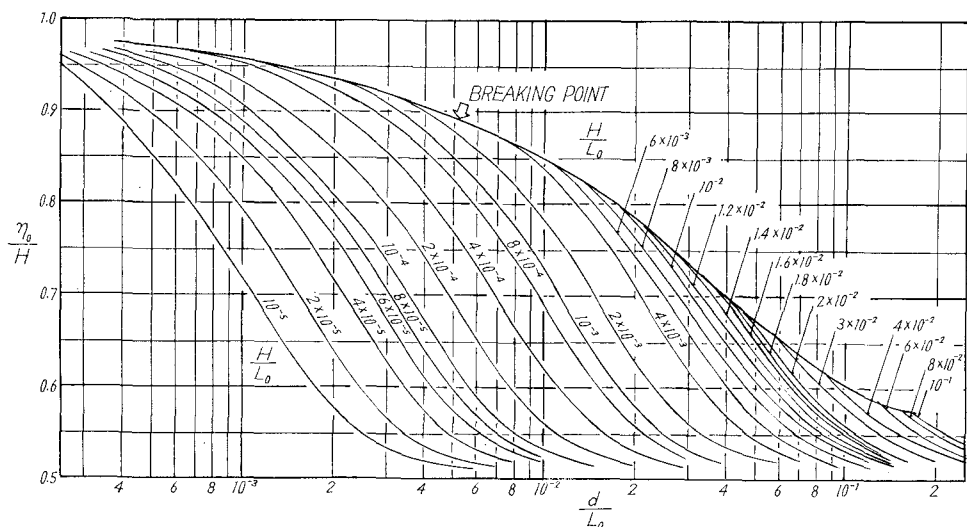


Fig. 7. Ratio of Crest Elevation above Still Water to Wave Height
(2nd order Cnoidal Wave)

計算手順は k を与えて $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6$ を求め、さらに H/d を与えて (15), (16) 式と (12), (14) 式により $\eta_1/H, \eta_2/H, d/L_1, d/L_2$ を計算する。 $d/L_1, d/L_2$ と $H/d, K_1, K_2, K_5, K_6$ より (17), (18) 式より $L_1/L_0, L_2/L_0$ を計算する。さらに与えた H/d と、求められた $d/L_1, d/L_2$ より $H/L_1, H/L_2$ を求め、最後に (18), (20) 式より $d/L_0, H/L_0$ を計算する。以上の計算手順により $\eta_1/H, \eta_2/H$ と H/L_0 と d/L_0 の関係が求まる。第1次近似理論の計算値を Fig. 6, 第2次近似理論の計算値を Fig. 7 に示す。

$H/L_0 \leq 2 \times 10^{-4}$ では第1次近似, 第2次近似とも全く一致しているが, $4 \times 10^{-4} \leq H/L_0$ では d/L_0 が大きいときには, 第1次近似の η_0/H の方が大きく, d/L_0 が小さいときには, 第1次近似の η_0/H の方が大きくでているが, 値はそれほど異ならない。ここで砕波点を示してあるが, これはクノイド波の砕波限界である。即ちこれは, $H/d = 0.73$ より求まる点である。これをみると砕波限界は, $d/L \geq 0.15$ では, 第1次, 第2次もほぼ一致しているが, $d/L < 0.15$ では, 第2次近似理論の砕波点の方が大きくでている。なお, Bretschneider が実測等により, 求めた波頂高の図と比較すると曲線の傾向は, かなり違っている。

§ 6. 波頂高の計算値と実験値との比較

ここでは H/L_0 , 即ち $2\pi H/gT^2$ が 0.1, 0.08, 0.06, 0.04, 0.02, 0.01, 0.008, 0.006 の8つの場合について計算値と実験値を比較する。これを Fig. 8 の (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g), (h) に示す。前節の波速のところでも述べたように, H/L_0 が小さくなると, 実験装置との関係, また測定精度等による, 実験値がかなりばらつくが, これはやもう得なかった。なお図中の曲線は, 一点鎖線は, Bretschneider

の曲線, 破線は Skjelbreia のストークス波第3近似理論の曲線, 実線は, クノイド波の第2次近似理論の曲線である。

まず Fig. 8 (a) は, $H/L_0 = 0.10$ の時であるが, これは, ストークス波理論によく合っている。クノイド波理論値は η_0/H は小さい値を示している。また Bretschneider の値は, 少し大きめである。(b) 図は, $H/L_0 = 0.08$ の時であるが, $d/L_0 > 0.2$ の範囲では, ストークス波理論に, より適合しているが, クノイド波理論の値は, 実測値に較べて小さい。(c) 図は, $H/L_0 = 0.06$ であるが, ストークス波理論, 特に第5次近似理論によく適合しているが, 第3次近似理論値より大きくでている。(d) 図は, $H/L_0 = 0.04$ の時である。 $d/L_0 > 0.15$ の範囲では, ほぼ Bretschneider の曲線に適合しているが, $d/L_0 < 0.15$ では, 第3次近似理論は実験値より小さくでている。 d/L_0 が小さくなるにつれて, クノイド波理論の値に近づいていく傾向が見られる。(e) 図は, $H/L_0 = 0.02$ の時である。ここでは, 実測値は明らかに, クノイド波の第2次近似理論に一致している。(f) 図は, $H/L_0 = 0.01$ の場合である。実測値は, ストークス波理論よりクノイド波理論に近いが, Bretschneider の曲線に, より近い。(g) 図は, $H/L_0 = 0.008$ であるが, (f) 図と同じ傾向で, 実測値は, クノイド波理論より小さい値を示している。(h) 図は, $H/L_0 = 0.006$ の時で, 実測値は, クノイド波理論より小さくでている。

実験値から判断すると, クノイド波理論は, H/L_0 が 0.02 付近で理論が, 実測値とよく一致している。しかし, この波頂高の実験から, クノイド波理論の適用を決定することは困難である。これは, 前述したように, 実験水路の長さが短いため, 水深, 波高等が制限され, 又反射波の影

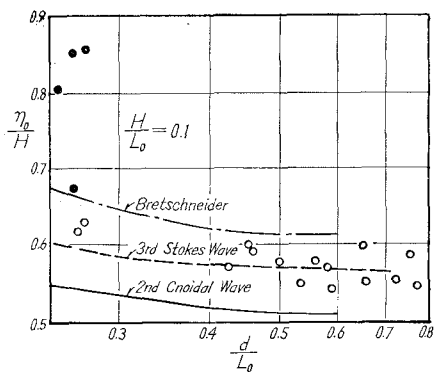


Fig. 8. (a)

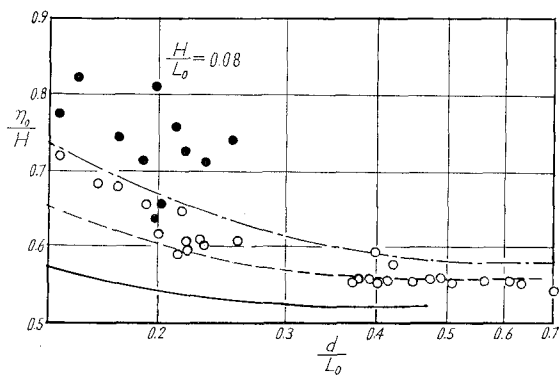


Fig. 8. (b)

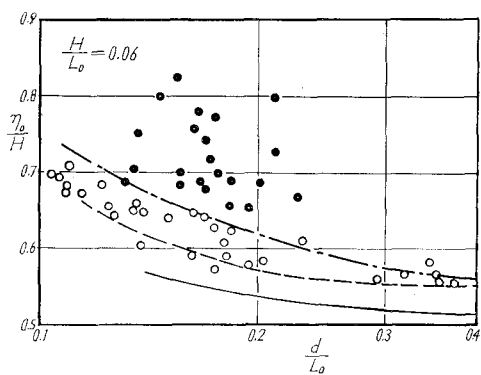


Fig. 8. (c)

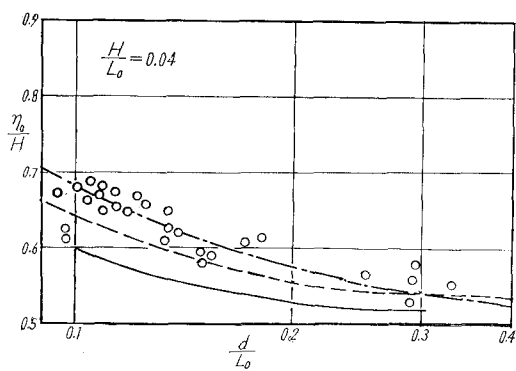


Fig. 8. (d)

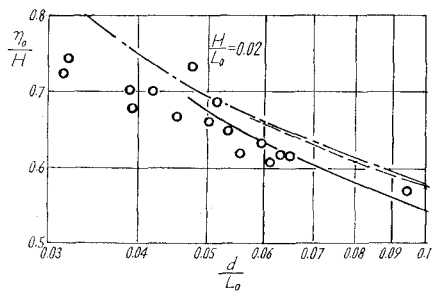


Fig. 8. (e)

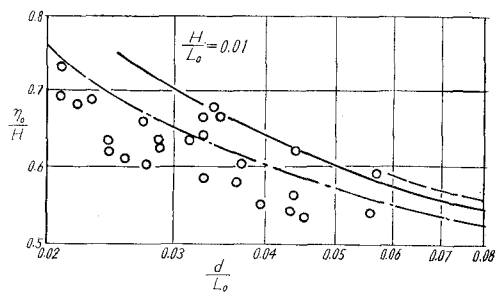


Fig. 8. (f)

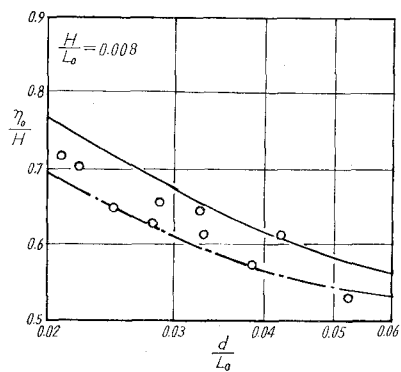


Fig. 8. (g)

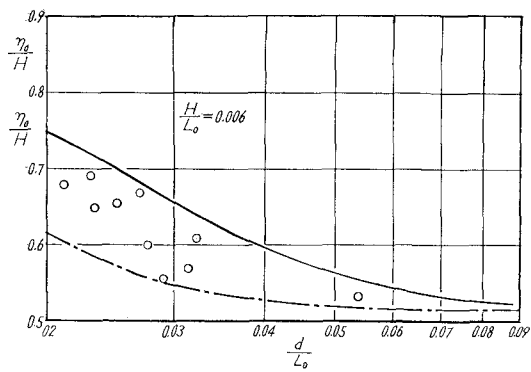


Fig. 8. (h)

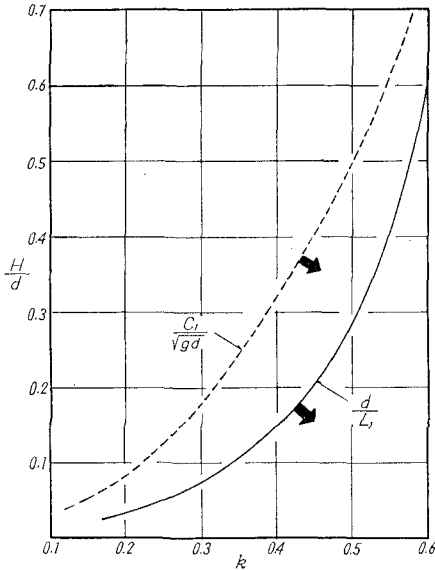


Fig. 9.

響も除くことが出来ないためであろう。

§7. 結 論

(1) クノイド波理論の波速からは、理論の適用限界は、第1次近似理論では、 $d/L < 0.1$ 、第2次近似理論では、 $d/L < 0.045$ となる。

(2) 第1次、第2次近似クノイド波理論の波速は d/L が小さくなるにつれて、第1次、第2次理論は、よく一致してくる。また d/L が大きくなると傾向は、かなり異なってくる。

(3) 波速の理論値と実験値とを比較すると、適用限界は Fig. 4 からわかるように、相対的に d/L が 0.2 よりも小さいことは明らかなのであるが、詳細に調べると $H/d = 0.2$ の時 $d/L < 0.16$ 、 $H/d = 0.3$ のとき $d/L < 0.25$ 、 $H/d = 0.4$ のとき、 $d/L < 0.2$ 、 $H/d = 0.5$ のとき $d/L < 0.17$ である。しかし実測値が不備なために、明確な限界値は決定できなかった。

(4) 第1次、第2次近似理論の波頂高は $H/L_0 < 2 \times 10^{-4}$ では、よく一致している。 $4 \times 10^{-4} < H/L_0$ では、両者は、多少異なるが、その違いは、きわめて少ない。

(5) 砕波限界の波頂高は $d/L_0 < 0.15$ では、第2次近似理論の方が大きくでている。

(6) 波頂高の実験値と理論値とを比較すると、 $H/L_0 = 0.02$ 付近で両者よく一致している。しかし $H/L_0 < 0.02$ では、実測値より理論値の方が大きく、 $H/L_0 > 0.02$ では、その逆である。

(7) 岩垣は、クノイド波の適用限界を $d/L < 0.05$ としているが、確定した値では、ないように思われる。

(8) 本文では述べなかったが、第1次近似理論の波速、

及び波長が負になる k , E/K , K の関係を求められ、その使用出来る範囲を示すと次のようになる。

(i) 波 速

$$E/K \leq \frac{1}{2} \text{ の時 } \frac{d}{H} \geq \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1 \right)$$

$$E/K > \frac{1}{2} \text{ の時 } \frac{d}{H} \geq \frac{1}{k^2} \left(2 \frac{E}{K} + k^2 - \frac{3}{2} \right)$$

(ii) 波 長

$$k^2 \geq \frac{1}{2} \text{ の時 } \frac{d}{H} \geq \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1 \right)$$

$$k^2 < \frac{1}{2} \text{ の時 } \frac{d}{H} \geq \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} - 2k^2 - \frac{1}{2} \right)$$

なお以上の適用範囲を図示したものが Fig. 9 である。図中で実験は波長より、破線は波速より求める範囲であり、それぞれの k に対して曲線の下が正の領域である。

参 考 文 献

- 岩垣雄一：クノイド波に関する研究 (第1報). 京大防災研究所年報 7号, 1964.
- 岩垣雄一：クノイド波に関する研究 (第2報). 京大防災研究所年報 8号, 1965.
- 岩垣雄一・細見昌彦：クノイド波に関する研究 (第3報). 京大防災研究所年報 9号, 1966.
- 岩垣雄一・山口正隆：Stokes 波とクノイド波の適用限界について. 第14回海岸工学講演会講演集, 1967.
- 岩垣雄一・細見昌彦：クノイド波に関する二、三の実験. 第13回海岸工学講演会講演集, 1966.
- 岸 力・佐伯 浩：クノイド波に関する研究. 第11回海岸工学講演会講演集, 1964.
- 岸 力・石田昌寿・佐伯 浩：有限振幅波の性質について. 土木学会北海道支部技術資料第21号, 1965.
- 佐伯 浩・新井泰澄・花安繁郎：有限振幅波の波頂高に関する研究. 第23回土木学会年次講演会, 1968.
- Laitone, E. V.: The Second Approximation to Cnoidal and Solitary Waves: Jour of Fluid Mechanics Vol. 9, 1961.
- Bretschneider, C. L. (1958): Selection of design wave for offshore structure: Proc. ASCE V 84 (WW) 2.
- Masch, D. F. and Wiegel, R. L. (1961): Cnoidal waves-Table of Functions: Council on Wave Research, The Engineering Foundation, Univ. of Calif.
- Skjelbreia, L. and Hendrickson, J. A. (1960): Fifth order gravity Wave theory: Proc. 7th Conf. on Coastal Engineering Vol. 1.
- Laitone, E. V.: Limiting Conditions for Cnoidal and Stokes Waves: Jour of Geophysical Research Vol. 67, No. 4, 1962.
- Wilson, B. W, L. M. Webb and J. A. Hendrickson: The Nature of Tsunami NESCO Tech. Rept. No. SN57-2 (1962).
- 林 桂一・森口繁一：改訂「高等函数表」.