

水文学の一手法としての周波数特性のベクトル表示

正 員 藤 田 睦 博*

概 要

近年降雨流出の解析における進歩は著しいものがある。その手法を大まかに分類すると、次の 2 種になる。

1. 降雨が河川に流出する物理的機構を明らかにしてその結果を流出解析に用いる手法
2. 降雨資料と流量資料からのみ解析する、いわゆる input-output 問題として扱う手法

降雨流出が物理現象である事を考えると、当然 1) の手法で解析を行なうのがオーソドックスな解析法である。しか

しながら、降雨流出現象は非常に複雑で、1) のみの手法で解析を行なう事が困難な場合がある。一方、2) の手法は、input-output 問題として扱うだけに物理的意味の欠如する場合がある。本研究ではこれら 2 手法に関連性を与えるものとして、自動制御系で用いられているベクトル軌跡の手法に注目し、これを応用して、降雨流出系における input-output 関係からその物理的意味の解析を試みた。

1. ベクトル軌跡 (Nyquist plots)¹⁾

降雨流出系を記述する微分方程式を (1) で示す。

$$K \left(b_n \frac{d^n i}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{di}{dt} + i \right) = \frac{d^l O}{dt^l} \left(a_m \frac{d^m O}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} O}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dO}{dt} + O \right) \quad (1)$$

(1) 式の伝関数 $G(s)$ は、

$$G(s) = \frac{K(b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + 1)}{s^l (a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + 1)} \quad (2)$$

ここで $m+l-n \geq 0$ である。 $s=j(\omega)$ において周波数伝達関数 $G(j\omega)$ を求めると (j は虚数単位)

$$G(j\omega) = K \frac{b_n (j\omega)^n + b_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + b_1 (j\omega) + 1}{(j\omega)^l \{a_m (j\omega)^m + a_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + a_1 (j\omega) + 1\}} \quad (3)$$

ベクトル軌跡は $G(j\omega)$ を複素平面に ω をパラメーターとしてプロットしたものである。したがって始点 ($\omega=0$) と終点 ($\omega=\infty$) の位置が重要である。(3) 式を整理して

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^l} \frac{\{1 + \omega^2(-a_2 - b_2 + a_1 b_1) + \dots\} + j\{\omega(b_1 - a_1) + \omega^3(b_2 a_1 - a_2 b_1) + \dots\}}{\sqrt{\{-\omega^2 a_2 + \omega^4 a_4 - \dots\}^2 + \{\omega a_1 - \omega^3 a_3 + \dots\}^2}} \quad (4)$$

始点の位置は $\omega \rightarrow 0$ として

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^l} \{1 + j\omega(b_1 - a_1)\} \quad (5)$$

その定数部及び虚数部をとると Table 1 のようになる。

Table 1. $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega)$

l	実 数 部	虚 数 部
0	K	$K\omega(b_1 - a_1)$
1	$K(b_1 - a_1)$	$-\frac{K}{\omega}$
2	$-\frac{K}{\omega^2}$	$-\frac{K(b_1 - a_1)}{\omega}$
3	$-\frac{K(b_1 - a_1)}{\omega^2}$	$\frac{K}{\omega^3}$
4	$\frac{K}{\omega^4}$	$\frac{K(b_1 - a_1)}{\omega^3}$

$l=0$ の場合の始点は $K+j \cdot 0$ であるが $l \geq 1$ においては始点はすべて無限遠方である。この様子を Fig. 1 に示す。

次に $\omega \rightarrow \infty$ として終点付近の形を調べる。(3) 式より

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \frac{K \cdot b_n}{a_m} \frac{1}{(j\omega)^{m+l-n}} \quad (6)$$

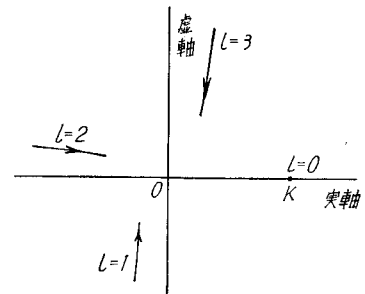


Fig. 1. ベクトル軌跡の始点付近の形

* 北海道大学工学部 助教授 工修

$m+l-n=0$ の場合には、終点の位置は Kb_n/a_m となるが、 $m+l-n \geq 1$ の場合には $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0$ となり、終点は原点となる。(6) 式を変形すると、ベクトル軌跡がどのような角度で原点に入るかわかる。

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \frac{Kb_n}{a_m} \frac{1}{\omega^{m+l-n}} e^{-j(m+l-n)\pi/2} \quad (7)$$

$m+l-n=1$ の時角度は $-(\pi/2)$ すなわち負の虚軸に接しながら原点に入り、 $m+l-n=2$ の時角度は $-\pi$ 、すなわち負の実軸に接しながら原点に入る。これを Fig. 2 に示す。

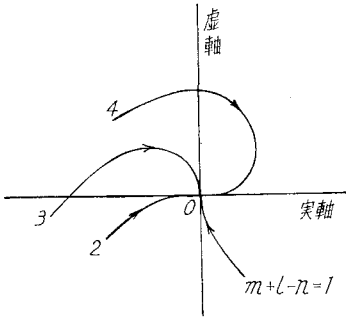


Fig. 2. ベクトル軌跡の終点付近の形

次にベクトル軌跡で重要な事は、 ω が 0 から無限大まで変化する途中の方向である。例えば一次要素のベクトル軌跡について考える。一次要素を表わす微分方程式は次の 4 種類がある。

$$(1) \quad T \frac{dO}{dt} + O = Ki \quad K > 0 \quad (8)$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega + 1} \quad (8')$$

$$(2) \quad T \frac{dO}{dt} - O = Ki \quad K > 0 \quad (9)$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega - 1} \quad (9')$$

$$(3) \quad T \frac{dO}{dt} + O = K \frac{di}{dt} \quad K > 0 \quad (10)$$

$$G(j\omega) = \frac{Kj\omega}{Tj\omega + 1} \quad (10')$$

$$(4) \quad T \frac{dO}{dt} - O = K \frac{di}{dt} \quad K > 0 \quad (11)$$

$$G(j\omega) = \frac{Kj\omega}{Tj\omega - 1} \quad (11')$$

(8) から (11) 式のベクトル軌跡を Fig. 3 ~ Fig. 6 に示す。図において、同じ半円のベクトル軌跡でも式の形が異なり、とそれと対応して矢印の向きが変わる事がわかる。

このように微分方程式、伝達関数、ベクトル軌跡間には 1 対 1 の対応があり、この内の 1 つが既知であれば他の 2 つは求める事ができる。任意入力 $i(t)$ に対する系の応答が $O(t)$ である場合には、伝達関数 $G(s)$ は

$$G(s) = \frac{\int_0^\infty O(t) e^{-st} dt}{\int_0^\infty i(t) e^{-st} dt} \quad (12)$$

したがって周波数伝達関数 $G(j\omega)$ は、

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{\int_0^\infty O(t) e^{-j\omega t} dt}{\int_0^\infty i(t) e^{-j\omega t} dt} \\ &= \frac{\int_0^\infty O(t) \cos \omega t dt - j \int_0^\infty O(t) \sin \omega t dt}{\int_0^\infty i(t) \cos \omega t dt - j \int_0^\infty i(t) \sin \omega t dt} \end{aligned} \quad (13)$$

ベクトル軌跡は (13) 式を複素平面にプロットすればよい。のだから、(13) 式右辺を実数部と虚数部に分離する。

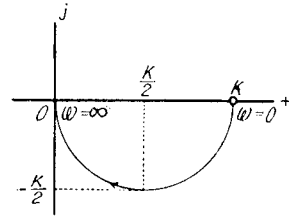


Fig. 3. (1) の場合

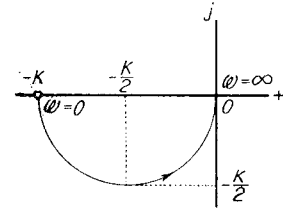


Fig. 4. (2) の場合

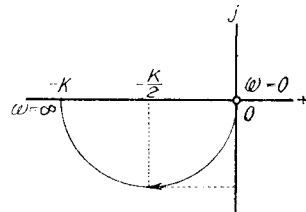


Fig. 5. (3) の場合

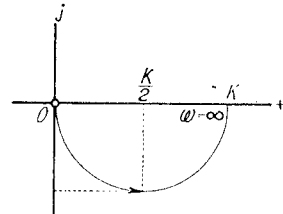


Fig. 6. (4) の場合

$$\left. \begin{aligned} A &= \int_0^{\infty} i(t) \cos \omega t dt & B &= \int_0^{\infty} i(t) \sin \omega t dt \\ C &= \int_0^{\infty} O(t) \cos \omega t dt & D &= \int_0^{\infty} O(t) \sin \omega t dt \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$G(j\omega) = \frac{C - jD}{A - jB} = \frac{AC + BD}{A^2 + B^2} + j \frac{BC - AD}{A^2 + B^2} \quad (15)$$

したがって(14)、(15)式により、定数部と虚数部を各々独立に計算できる。(14)式で A, B, C, D が有限値になる条件として、 $\int_0^{\infty} i(t) dt, \int_0^{\infty} O(t) dt$ が有限値をもつことが必要である。しかし降雨流出系においては、この条件は満足されている。

2. ベクトル軌跡の計算例

著者は、(14)、(15)式でベクトル軌跡を計算する手始めとして微分方程式を仮定してその式に適当な入力を与え、その出力を求め、入力-出力間から求めたベクトル軌跡とその理論値とを比較し、(14)、(15)式でベクトル軌跡が求められる事を示した。計算は全て北海道大学のアナログ計算機(日立 ALS-2000)を使用した。アナログ計算機を使用した理由は、(14)式で A, B, C, D の各値を求める際 ω の値が大(高周波)となるとデジタル量で計算する場合、補正を行なう必要があるが、アナログ計算機を使用する場合は連続量で計算を行なうのでプログラムが非常に簡単である。

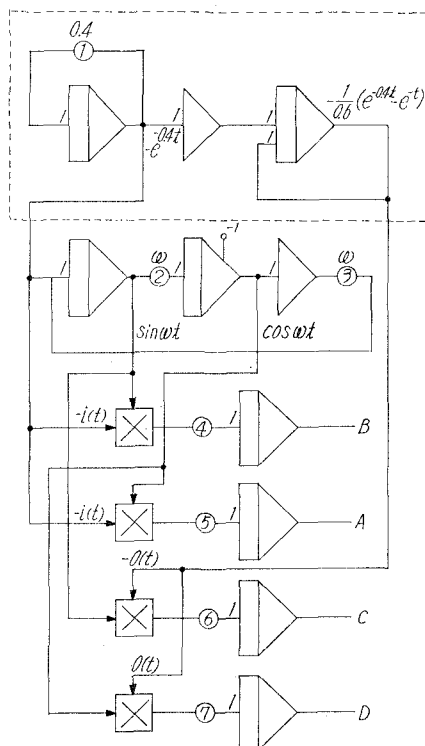


Fig. 7.

2.1 一次要素の計算例

簡単化のため次のような微分方程式を考える。

$$\frac{dO}{dt} + O(t) = i(t) \quad O(0) = 0 \quad (16)$$

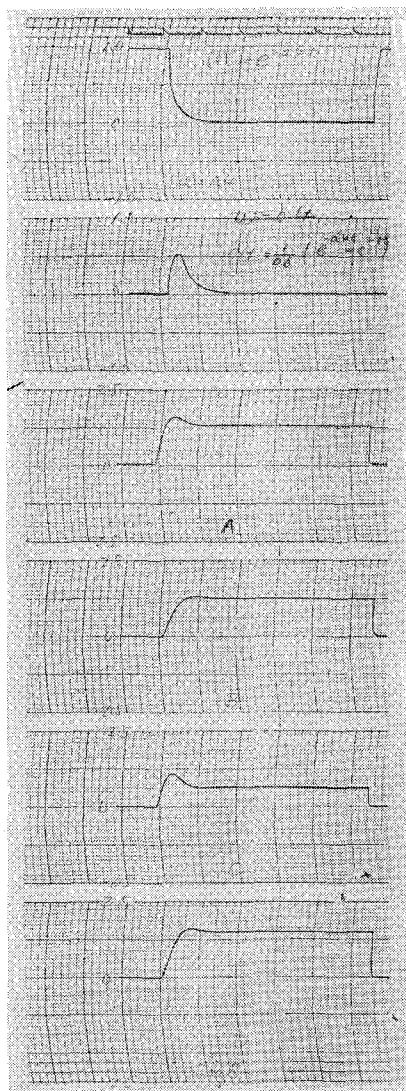


Fig. 8.

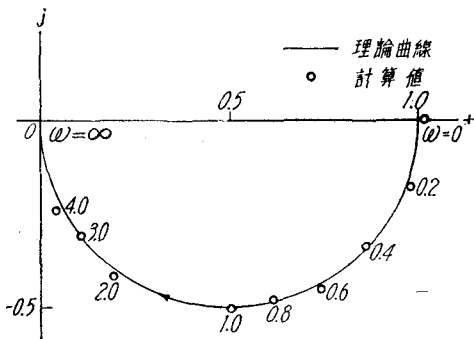


Fig. 9.

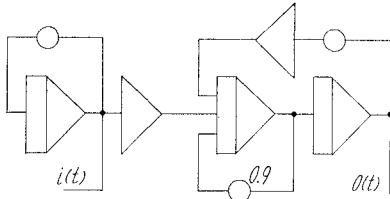


Fig. 10.

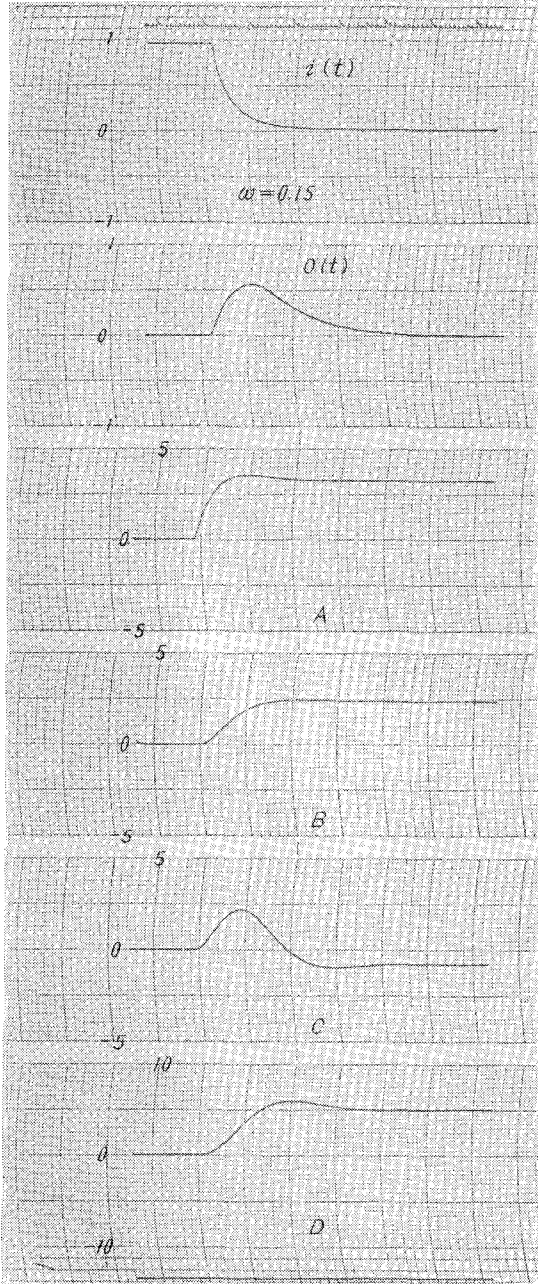


Fig. 11. 2 次 要 素

$i(t) = e^{-0.4t}$ とすると

$$O(t) = (1/0.6) (e^{-0.4t} - e^{-t}) \quad (17)$$

アナログ計算機のプログラムは Fig. 7 に示す。2, 3 のポテンシオメーターで ω を設定する。4~7 のポテンシオメーターは、 A, B, C, D の値がスケールオーバーしないように適当な値を設定する。Fig. 7 のプログラムで計算した一例を Fig. 8 に示す。Fig. 9 に (16) 式から求めたベクトル軌跡の理論値と、(14), (15), (17) 式から求めた計算値を示す。この図からわかるように、理論値と計算値は非常に一致している。

2.2 二次要素の計算例

(18) で与えられる微分方程式を考える。

$$10 \frac{d^2 O(t)}{dt^2} + 9 \frac{dO(t)}{dt} + O(t) = 2i(t) \quad (18)$$

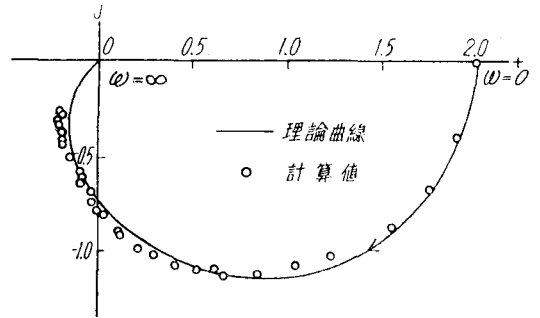
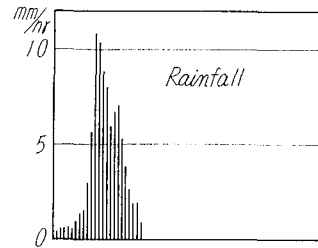


Fig. 12.



KAMIMUKA
S 37.8

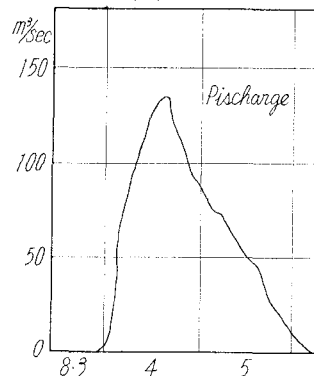


Fig. 13.

$$O(0) = 0$$

$$i(t) = e^{-0.2t}$$

(18) 式の周波数伝達関数は

$$G(j\omega) = \frac{2}{10(j\omega)^2 + 9(j\omega) + 1} \quad (19)$$

(19) 式において実数部 X と虚数部 Y を分離すると

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{2(1-10\omega^2)}{(1-10\omega^2)^2 + (9\omega)^2} \\ Y &= \frac{-2 \cdot 9\omega}{(1-10\omega^2)^2 + (9\omega)^2} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

(20) 式の X と Y をそれぞれ横軸、縦軸にプロットしたものが、ベクトル軌跡の理論曲線である。アナログ計算機のプログラムは、Fig. 7 の破線枠内を Fig. 10 の要素で置

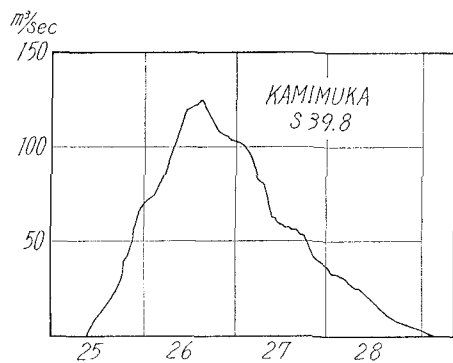
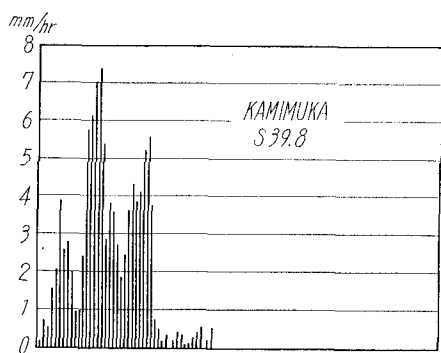


Fig. 14.

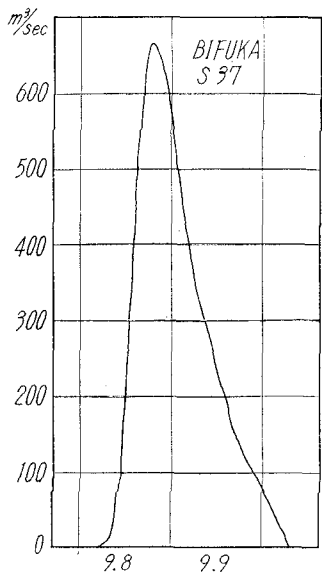
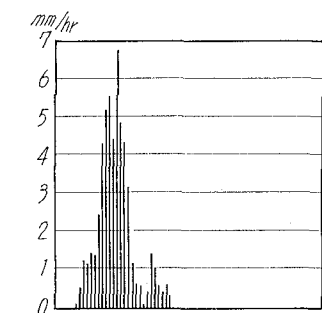


Fig. 15.

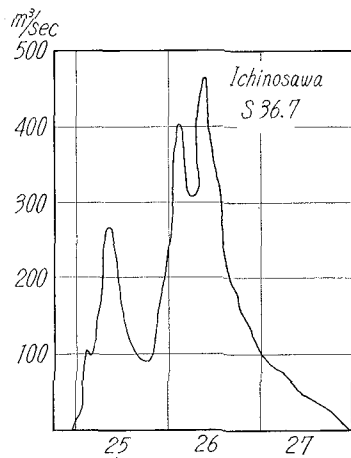
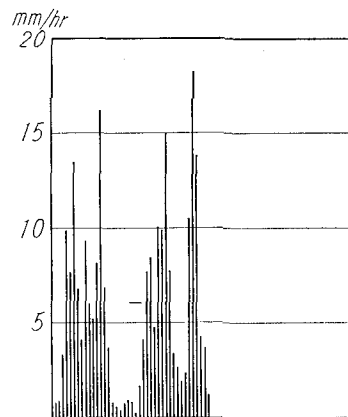


Fig. 16.

き換えればよい。アナログ計算機で計算した結果の一部を Fig. 11 に示す。これら計算結果と (15) 式を用いてベクトル軌跡を求めた結果を Fig. 12 に示す。一次要素の場合と同様と理論値と計算値はかなり適合している。三次、四次要素と更に高次の系についても計算できる。一次要素、二次要素の計算例に示されるように、ベクトル軌跡を (15) 式によって求める事によりかなり、正確にその系を支配している微分方程式の階数又、その係数まで求められる事がわかった。

3. 実際河川におけるベクトル軌跡の計算

流域平均雨量を $i(t)$ 、実測流量から求めた直接流出量を

$O(t)$ として、前述した手法に従ってベクトル軌跡を計算した。この場合も同じくアナログ計算機を用いて計算した。

計算例は常呂川上無加地点 2 例、天塩川美深地点 1 例、豊平川一の沢地点 1 例を示す。Fig. 13~Fig. 16 に雨量資料と流量資料を示す。(常呂川、豊平川²⁾の水文資料は北海道大学工学部河川研究室、天塩川³⁾の資料は北海道開発局の御好意による)。

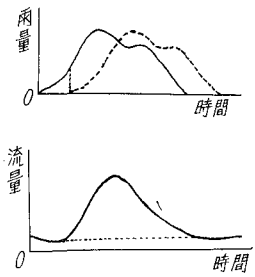


Fig. 17.

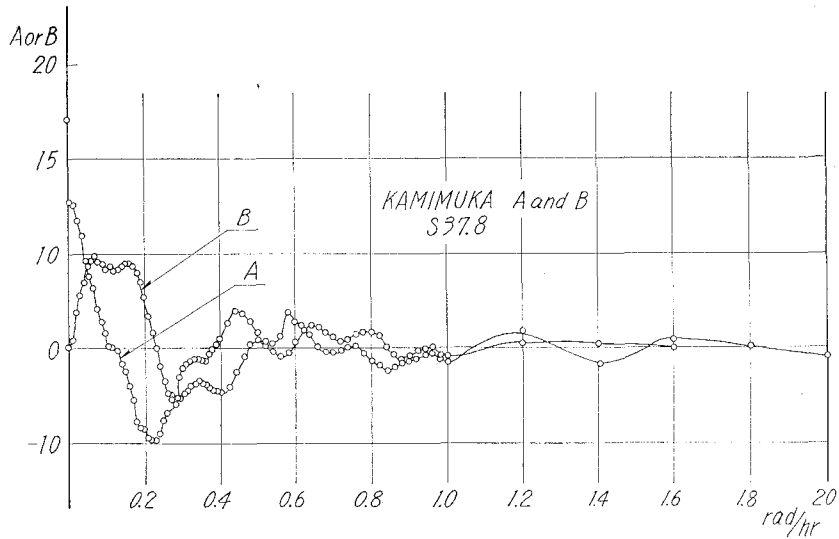


Fig. 18.

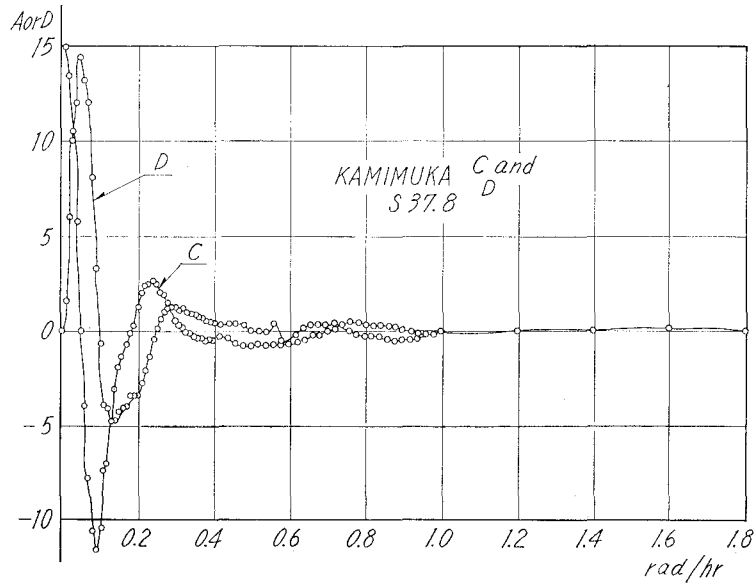


Fig. 19.

計算にあたっては、これらの資料をカーブトレーサーを使用して磁気テープに収めて、磁気テープよりデータを再生しながら演算を行なった。したがってプログラムは、Fig. 7 のものをそのまま使用した。実測資料を観測すると Fig. 17 のようにハイドログラフの立上り以前にもかなりの降雨量があり、これらの雨量をどのように考えるかによって、ベクトル軌跡はかなり変わるであろう。そこで著者等りは実際のままの資料で計算する場合、Fig. 17 の破線のように時間をずらして計算する場合、初期損失雨量を除去して計算する場合の3とおりについて計算してみた。又直接流出量の分離については、Fig. 17 に示すようにハイドログラフの立上り点の流量をもって、一定の基底流量とした。

Fig. 18~Fig. 22 に常呂川上加地点における実際のままの資料で求めた (14) 式における A , B , C , D を示す。

Fig. 23~Fig. 32 に各地点におけるベクトル軌跡を示す。

Fig. 23 から Fig. 25 までは、実際の資料をそのまま使用した場合 (case 1), Fig. 26~Fig. 28 は、降雨の開始時間をハイドログラフの立上り時間までずらした場合 (case 2), Fig. 29~Fig. 32 は初期損失雨量と言われている部分を除去した場合についてのベクトル軌跡の計算例である。

なお計算例における各地点の流域面積を Table 2 に示す。各ベクトル軌跡がループを描いているのは時間遅れの影響と思われる。例えば入力 $i(t)$ と出力 $O(t)$ との関係を示す式を (21) 式とし、更に $i(t)$ と $O(t)$ と τ だけの時間遅れがあるとすると

$$\left. \begin{aligned} T \frac{dO_1(t)}{dt} + O_1(t) &= i(t) \\ O(t-\tau) &= O_1(t) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

したがって周波数伝達関数 $G(j\omega)$ は

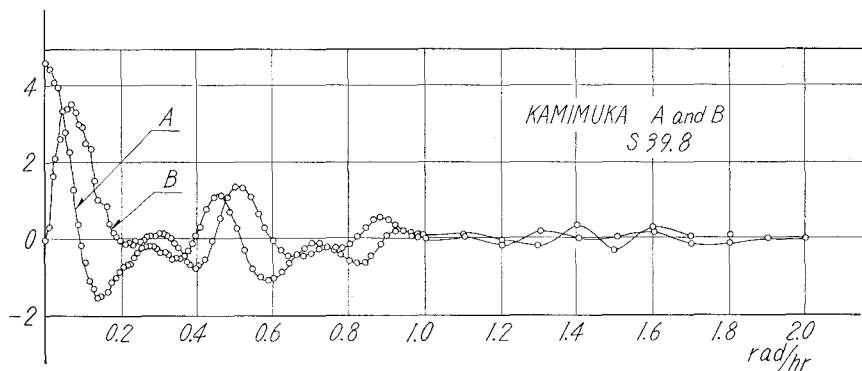


Fig. 20.

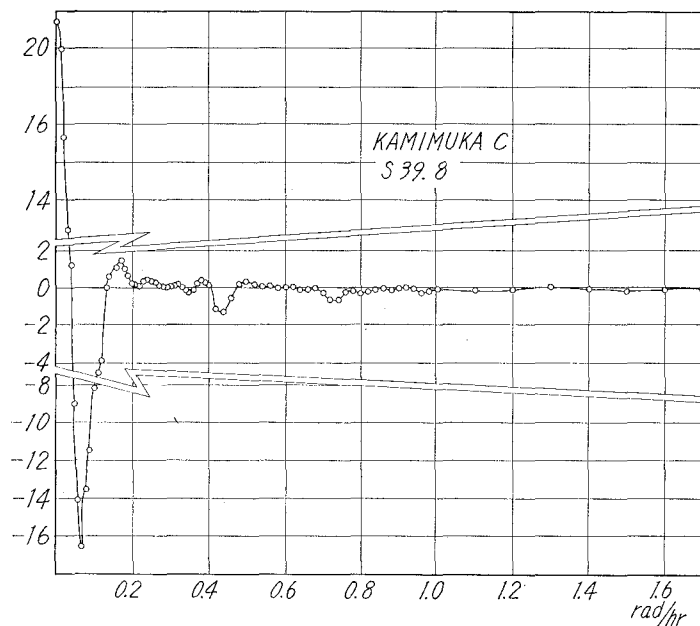


Fig. 21.

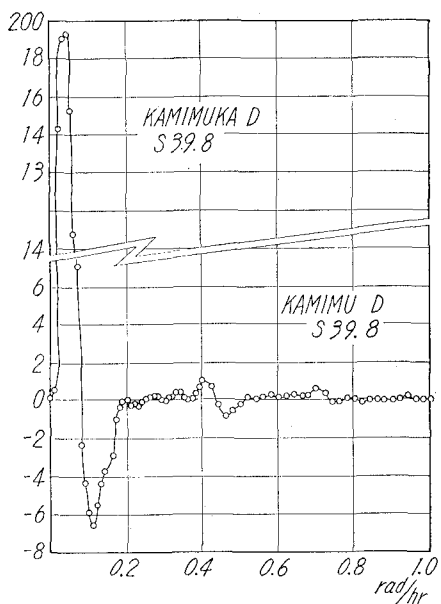


Fig. 22.

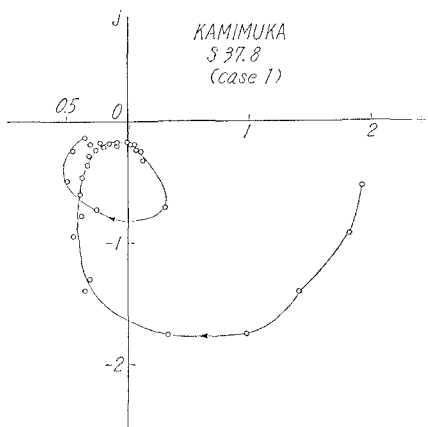


Fig. 23.

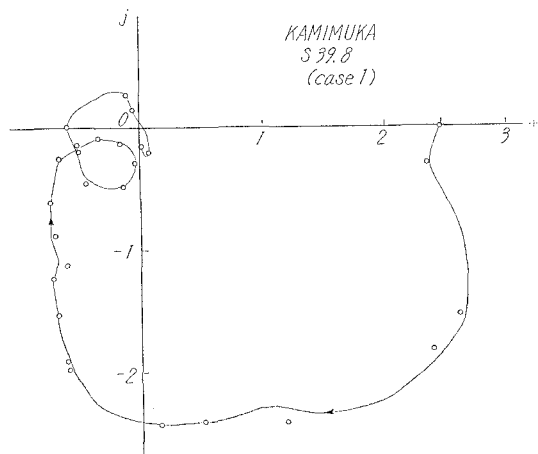


Fig. 24.

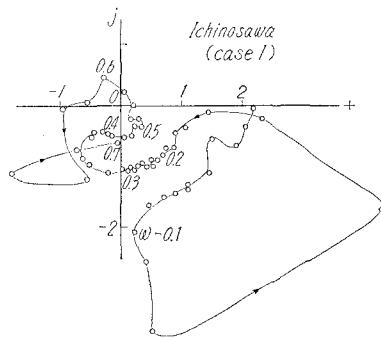


Fig. 25.

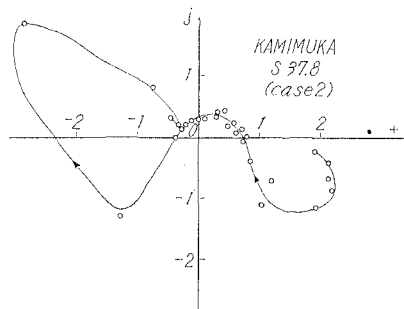


Fig. 26.

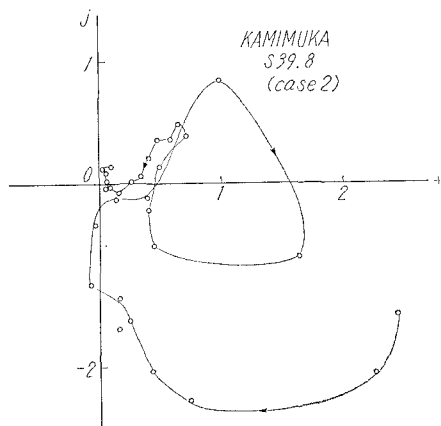


Fig. 27.

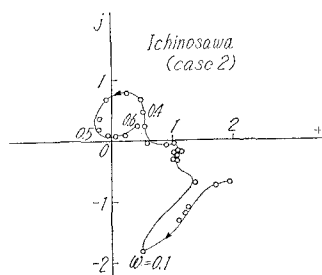


Fig. 28.

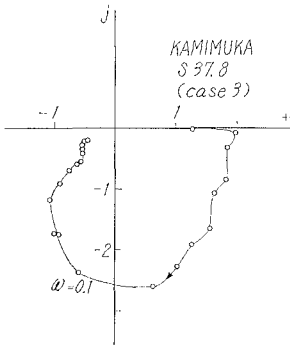


Fig. 29.

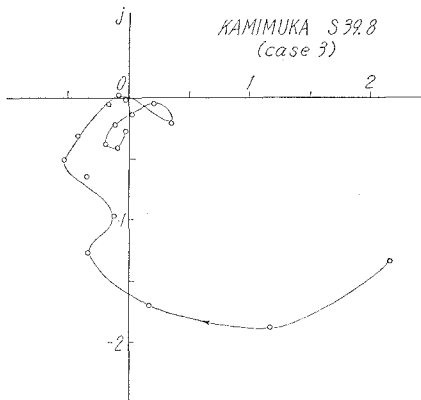


Fig. 30.

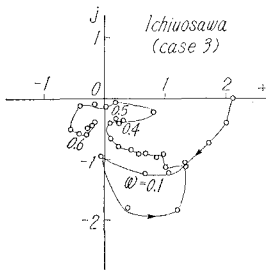


Fig. 31.

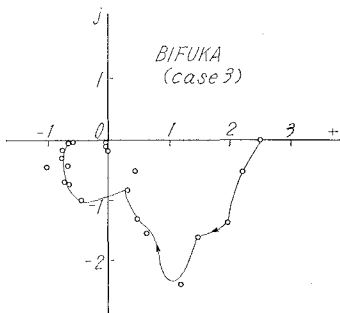


Fig. 32.

Table 2.

上	無	加	227.2 km ²
一	の	沢	423 km ²
美		深	2,899 km ²

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\tau\omega}}{T(j\omega)+1} \quad (22)$$

(22) 式のベクトル軌跡を示したものが Fig. 33 である。

(21) 式の上式のベクトル軌跡は、前述したように始点 (1, j0), 終点 (0, j0) の半円を描くが、Fig. 33 においては時間遅れの影響で原点の回りにループを描く事がわかる。

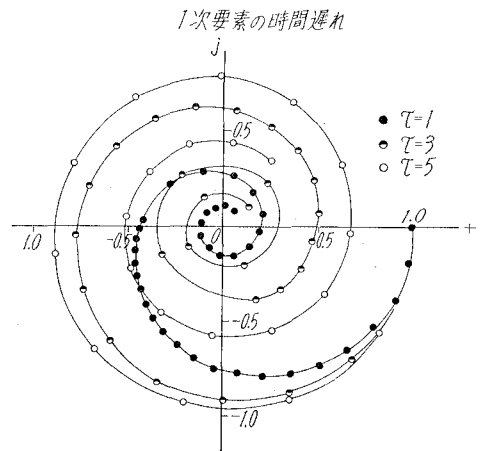


Fig. 33.

む す び

case 1 のベクトル軌跡は当然降雨量とその流出量の間に時間遅れがあるのでループを描く事がわかる。case 2 の場合は降雨を故意にすましてベクトル軌跡を求めたが、その結果は時間遅れの影響と思われるループをなす形状が小さくならず逆に複雑な形状をなしている。この事実は時間をずらす事により降雨流出系の物理的機構を故意に壊したものであると思われる。case 3 の初期損失雨量を除去した場合は、ベクトル軌跡がループをなす現象が多少みられるが、かなりその物理的機構を明らかにしていると思われる。case 1, case 3 の各ベクトル軌跡図より降雨量とその流出量の関係を結びつけている微分方程式は、2 階の微分方程式に近いと思われる。又各ベクトル軌跡の始点が、正の実軸上にある事を考慮して (23) 式のような 2 階の微分方程式の係数の変化

$$T^2 \frac{d^2 O(t)}{dt^2} + 2TP \cdot \frac{dO(t)}{dt} + 1 = i(t) \quad (23)$$

によるベクトル軌跡の変化を図示したものが Fig. 34 である。これらのベクトル軌跡に時間遅れの影響を加味するとかなり計算したベクトル軌跡を近似できると思われる。

又 case 3 の初期損失雨量を除去した時のベクトル軌跡が比較的きれいに求まるといふ事は、Fig. 35 のような不感帯

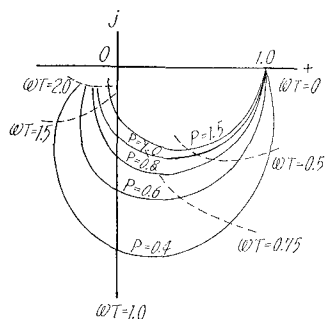


Fig. 34.

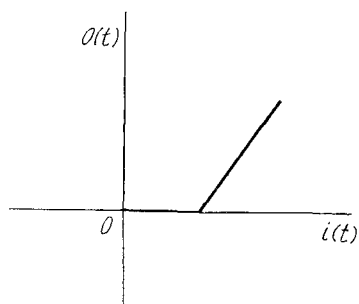


Fig. 35.

のような要素が降雨流出系に存在するものと思われる。

いずれの case においても、一の沢地点のベクトル軌跡図は非常に複雑な形をしている。この事は一の沢地点のハイドログラフは複数個のピークを有し、これらのピークと対応降雨量間の性質が洪水期間中にもかなり変化している事を示している。

上述の如く周波数特性のベクトル表示は、河川流出の物理的機構の解明にも役立つ発展性のある手法と考える。

最後にこの研究に終始御指導をいただいた山岡教授に感謝します。

参 考 文 献

- 1) 自動制御に関する書
例えば
榎木義一・砂原善文： 自動制御工学，養賢堂。
高橋利衛： 自動制御の数字，オーム社。
Raven, F. H.: Automatic Control Engineering, McGraw-Hill.
- 2) 北海道大学工学部河川研究室(岸)： 第2回洪水予報技術会議資料，流出率，損失雨量の実例，1965, 11.
- 3) 北海道開発局： 天塩川計画高水流量の検討
- 4) 山岡・藤田： ナイキスト図による河川流出モデルの適合性の判別，第13回水理講演会講演集，土木学会水理委員会編，1969. 2.