

弾性支承を有する連続曲線桁について

勝 俣 征 也*

1. まえがき

近年交通の発達にともない橋梁構造の複雑化するなかで随所に曲線橋が用いられている。

最近では特に桁下空間の利用から 図-1 (a), (b) のような橋脚を有する曲線桁も用いられるに至った。

本文ではこうした弾性変形を許容する中間支点有する曲線橋の解析に関して考察を試る。

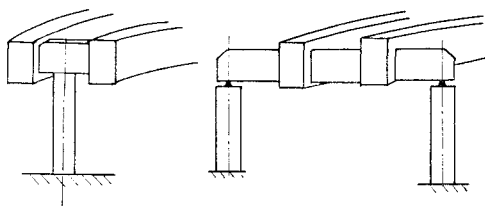


図-1 (a)

図-1 (b)

一般に支点での弾性変形を考慮しない連続曲線桁の解析では、箱桁断面を有する構造では曲げねじり剛性が特に小さい場合これを無視して支点上での曲げモーメントを不静定力にとる方法、あるいは、I 桁断面を有する場合のように曲げねじり剛性が無視出来ないときには支点上での曲げ及び曲げねじりモーメントを不静定力とする方法が普通であり、これらは文献^{1)~5)}に詳しい。

本文での解法は中間支点到たわみ及び回転バネを持つ構造を考へて、曲線桁の変位とバネの変位とのつりあいからバネに生ずる反力及びねじりモーメントを不静定力とし、これを解くものである。この解法では桁の曲げねじり剛性の有無は直接関係せず、同一の手法を用いる事が出来る。

なお数値計算には IBM 1130 電子計算機を用いて、FÖRTRAN 語のプログラムによったが、以下に述べる理論解析及びプログラムの正しさを裏付けする目的で、対称な構造に関する数値の対称性、変位に関する相反作用の定理の成立、及び中間支点で弾性変形を許さないとき、他の方法による連続曲線桁の解と一致するか等の点について確かめた。

2. 弾性支承の定義

中間の弾性支承の型式を二つに分けて 1), 2) のように仮

定する。

1) 円曲線の接線方向；

図-2(a) のようにたわみに対し弾性バネ支承で桁との結合はヒンジ結合とする。

2) 円曲線の半径方向；

図-2(b) のようにねじり変形に対し弾性バネ支承で桁との結合は剛結とする。

また端支点での支持条件は一般の曲線桁と同様曲げに対し単純支持、ねじりに対し固定である。

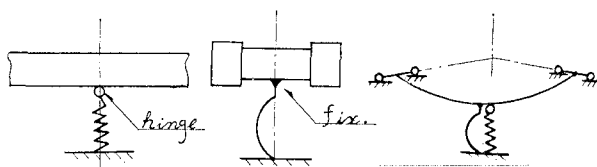


図-2 (a)

図-2 (b)

図-2 (c)

3. 静定基本系

弾性支承の条件からも明らかのように、これらの支承を解放するには不静定力としてたわみバネの反力 (X) 及び回

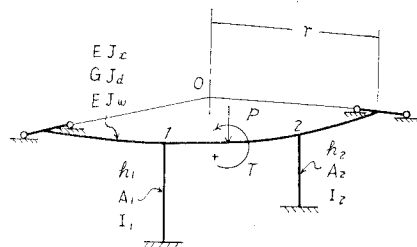


図-3 (a)

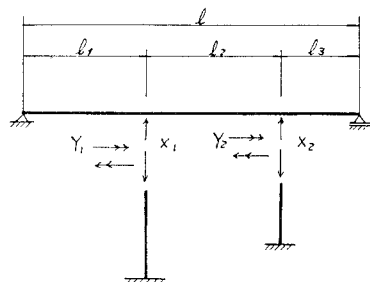


図-3 (b)

* 北海道開発コンサルタント K.K. 橋梁課

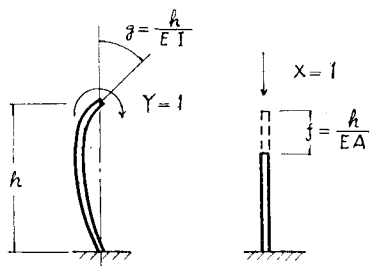


図-3(c)

転バネに生ずる曲げモーメント (Y) を考える必要がある。ここでは簡単のため3径間連続桁の場合を例にとって説明をすすめるが、弾性バネについては図-3に示すような細い柱でこれを代表させ柱頭の沈下及びたわみ角により変形を考慮する。

なお、以下に用いる記号は図-4、図-5を参照して下記の通りとする。

r (m)	桁の曲線半径
J_x (m ⁴)	" 曲げ剛性係数
J_d (m ⁴)	" ねじり剛性係数
J_w (m ⁶)	" 曲げねじり剛性係数
v (m)	" たわみ
τ (Radian)	" 回転角
θ (")	" ねじり角
h (m)	柱の高さ
A (m ²)	" 断面積
I (m ⁴)	" 曲げ剛性係数

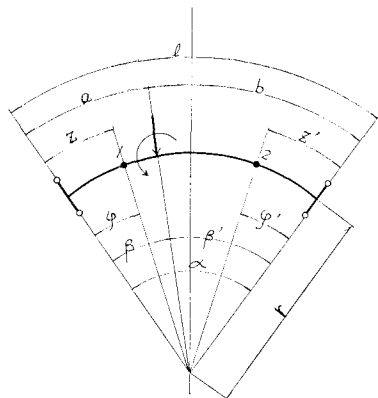


図-4

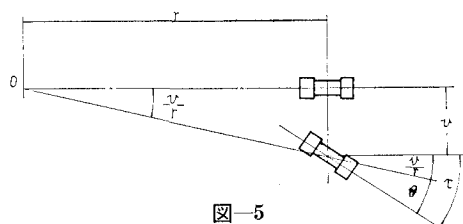


図-5

f (m)	" 伸び
g (Radian)	" たわみ角
P (t)	集中荷重
T (t-m)	集中トルク
E (t/m ²)	弾性係数
G (")	せん断弾性係数
$\eta = 1/(1+Kr^2)$	

$$K = \sqrt{GJ_d/EJ_w}$$

$$\mathcal{E} = EJ_x/GJ_d$$

S ; P 及び T を同時に表わす関数

また、特に本文で問題とする変位置 v 及び τ については図-4の着目点1での影響線の式を(1)、(2)式に示した。着目点2の場合は φ , β 等を φ' , β' におきかえてこれに代入して得られる。ただし τ は H_d (サンベナンのねじりモーメント) をもとに $1/GJ_d \int H_d dz$ から求める。

たわみ v , ねじり角 θ , 回転角 τ の関係は(3)式となる(文献^{(4),(5)} 参照)。

$$v = (Pr^3 - Tr^3) \frac{1 + \mathcal{E}(1 - \eta)}{2} \left[\frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \varphi \cos \varphi - \left(\beta \cos \beta' + \sin \beta' - \alpha \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right) \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} \right] - \mathcal{E} Pr^3 \left(\frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \sin \varphi - \frac{\beta'}{\alpha} \varphi \right) + \mathcal{E} [Pr^3 \eta^2 + Tr^2 (1 - \eta) \eta] \times \left(\frac{\sin \beta' \sin \varphi}{\sin \alpha} - \frac{\sinh Kb \sinh Kz}{Kr \sinh Kl} \right) \quad (1)$$

$$\tau = \frac{1}{GJ_d} \left[-r(Pr - T)(1 - \eta) \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \sin \varphi + Pr^2 \frac{\beta'}{\alpha} \varphi - \frac{Pr\eta + T(1 - \eta)}{K} \times \frac{\sinh Kb \sinh Kz}{\sinh Kl} \right] \quad (2)$$

$$\tau = \theta + \frac{v}{r} \quad (3)$$

4. 弾性方程式

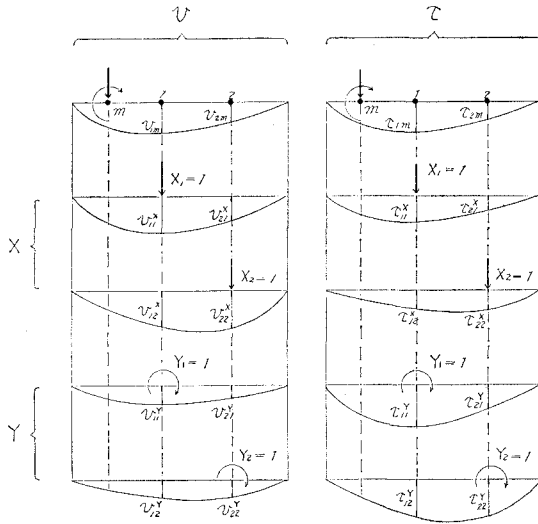
図-3(a), (b)の静定基本系 $l = l_1 + l_2 + l_3$ なる単純曲線桁及び弾性変形する柱とを考えたわみ図及び回転角図、更にこれに見合う不静定力 X , Y との組合わせを図-6のように定めると弾性支点1, 2における変形のつりあいから(4)式が得られる。これは単に3径間の直線連続桁を解く場合に中間支点の反力を不静定力にとったときの解法を拡張したに過ぎない。

ただ曲線桁では鉛直集中荷重 P を受けてもねじり変形を生じ、同時に集中トルク T によってもたわむと言う特性を有するので変位 v , τ 及び不静定力 X , Y との組合わせが釣りあう事となり、この関係は表-1の様にまとめる事が出来る。

表-1

不 静 定 力	変 位	
	v	τ
X	v^X	τ^X
Y	v^Y	τ^Y

$$\left. \begin{aligned} Sv_{1m} - \{(X_1 v_{11}^X + Y_2 v_{12}^X) \\ + (X_1 v_{11}^Y + Y_2 v_{12}^Y)\} &= X_1 f_1 \\ Sv_{2m} - \{(X_1 v_{21}^X + X_2 v_{22}^X) \\ + (Y_1 v_{21}^Y + Y_2 v_{22}^Y)\} &= X_2 f_2 \\ S\tau_{1m} - \{(X_1 \tau_{11}^X + X_2 \tau_{12}^X) \\ + (Y_1 \tau_{11}^Y + Y_2 \tau_{12}^Y)\} &= Y_1 g_1 \\ S\tau_{2m} - \{(X_1 \tau_{21}^X + X_2 \tau_{22}^X) \\ + (Y_1 \tau_{21}^Y + Y_2 \tau_{22}^Y)\} &= Y_2 g_2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$



m ; 荷重点
 $1, 2$; 弾性支点

図-6

(4) 式を整理し、マトリックス表示すると (5) 式が得られる。

$$\begin{pmatrix} f_1 + v_{11}^X & v_{12}^X & v_{11}^Y & v_{12}^Y \\ v_{21}^X & f_2 + v_{22}^X & v_{21}^Y & v_{22}^Y \\ \tau_{11}^X & \tau_{12}^X & g_1 + \tau_{11}^Y & \tau_{12}^Y \\ \tau_{21}^X & \tau_{22}^X & \tau_{21}^Y & g_2 + \tau_{22}^Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Sv_{1m} \\ Sv_{2m} \\ S\tau_{1m} \\ S\tau_{2m} \end{pmatrix} \quad (5)$$

上の弾性方程式の係数を点線で区分したように4箇に分割し、各々を V^X, V^Y, τ^X, τ^Y としその他のベクトルを X, Y, V_m, τ_m で代表させて一般的な構造についての式を書けば (6) 式となり、これを解けば X, Y は求める不静

定力である。

$$\begin{bmatrix} V^X & V^Y \\ \tau^X & \tau^Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_m \\ \tau_m \end{bmatrix} \quad (6)$$

更に影響線を求めるときは、文献²⁾の記号を用い、静定基本系の単純曲線桁に荷重が作用したときの任意点での影響線を αX_0 また各支点に $X_1 = X_2 = 1, Y_1 = Y_2 = 1$ を各々作用させたときの着目点における断面力及び変位の値を η_n 、不静定力の影響線を $\alpha X^*, \alpha Y^*$ で表わすものとする一般に任意の影響線 αL は (7) 式となる。ただし式中 n は中間支点の数である。

$$\alpha L = \alpha X_0 + \sum_{i=1}^n \eta_{ni}^X \alpha X_n + \sum_{i=1}^n \eta_{ni}^Y \alpha Y_n \quad (7)$$

5. 計算例

例-1

2 径間連続曲線桁の計算結果の一部を示した。桁の諸元は次の様な値であり、柱の諸元は図中に示す。

$$\begin{aligned} EJ_x &= 0.126 \times 10^7 \text{ (t-m}^2\text{)} \\ GJ_d &= 0.496 \times 10^6 \text{ (t-m}^2\text{)} \\ EJ_\omega &= 0.599 \times 10^7 \text{ (t-m}^4\text{)} \end{aligned}$$

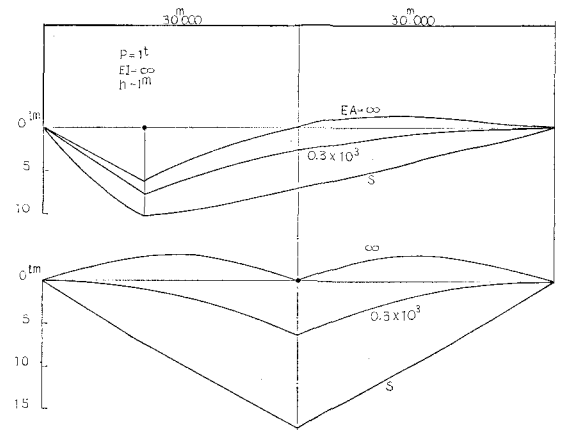


図-7(a) 曲げモーメント

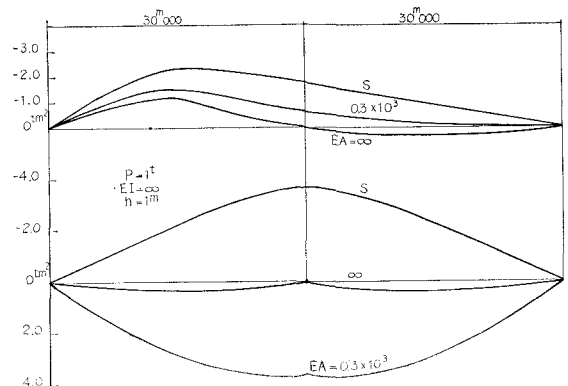


図-7(b) 曲げねじりモーメント

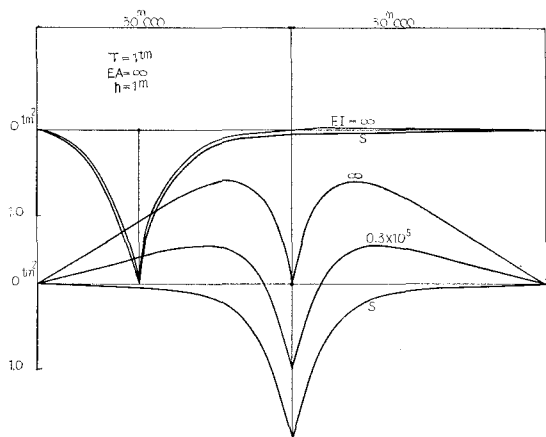


図-7(c) 曲げねじりモーメント

図中 S; 単純曲線桁の値.

・; 影響線の着目点.

$$r = 50 \text{ (m)}$$

$$l_1 = l_2 = 30 \text{ (m)}$$

図-7(a), (b) では求めた解が単純曲線桁を基調とし、弾性支承での変形を次第に少なくすると2径間連続曲線桁に近づいてゆく変化の状況を知る事が出来る。

ただし、 $EA=0.3 \times 10^3$ なるたわみバネは $P=1 \text{ t}$ に対して 3.3 mm 沈下するようなバネであるから実際の構造では普通の場合起り得ないであろう。また (b) の着目点が中央にある場合では一見考えられない変化を示しているが、これは桁のたわみ v が非常に大きいのでねじり角 θ に影響し、大きなねじりモーメントを生じた結果によるものである。いずれにせよ数字のいたずらの要素をもっている。

(c) においては $EI=0.3 \times 10^5$ の剛性を有する回転バネの場合が示されているが、これは $T=1 \text{ t-m}$ に対し先端で $1.6 \times 10^{-2} \text{ mm}$ 程度の移動しかしないので実際の構造でも考えられる影響線であろう。

例-2

実際ありそうな構造として下記の諸元をもつ構造について結果の一部を図-8に示した。なお、曲線橋のとりあつかいについては文献⁵⁾により全橋断面不変の仮定に従ったが、断面諸元は例-1と同じである。

また橋脚の型式は図-1(a)のような形とし、柱には鋼管 ($\phi=1000 \text{ mm}$, $t=25 \text{ mm}$) を用いたが、沈下量が小さく曲げモーメントについては普通の3径間連続曲線桁とほとんど変わらないので省略した。

$$r = 80 \text{ (m)}$$

$$l = 17.5 + 35.0 + 17.5 \text{ (m)}$$

$$EA_1 = EA_2 = 0.161 \times 10^7 \text{ (t)}$$

$$EI_1 = EI_2 = 0.191 \times 10^6 \text{ (t-m}^2\text{)}$$

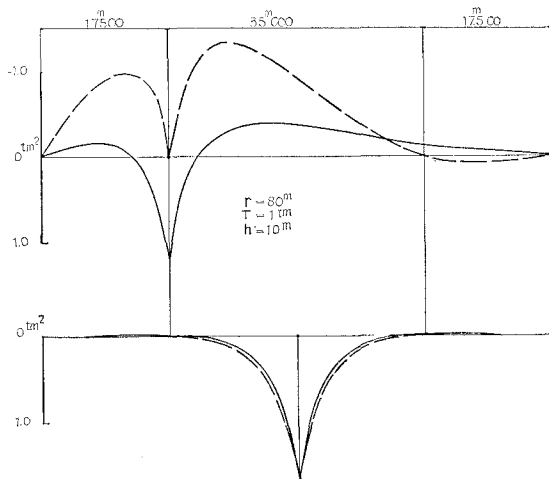


図-8(a) 曲げねじりモーメント

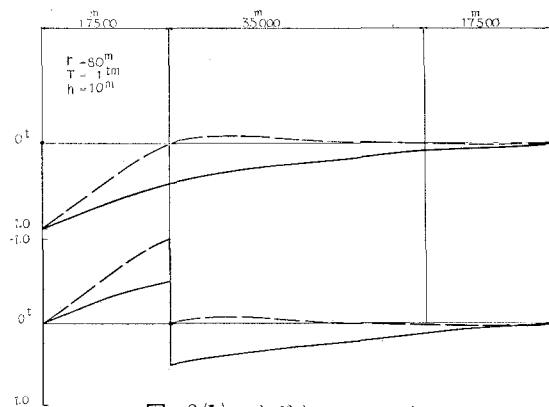


図-8(b) ねじりモーメント

図中 ---; 普通の3径間連続曲線桁の値.

6. 結 び

単純曲線桁の中間にバネ支承を設けて中間支点の弾性変形を考慮した連続曲線桁の解析を行なったが、特別の場合としてバネの剛性を無限大とするときは一般の中間支点の変位を考えない連続曲線桁の解と一致する。

この方法は従来の支点での曲げ及び曲げねじりモーメントを不静定力にとる方法に比較して全く単純で初歩的な考え方より出発しているため理解しやすいと思われる。

ただ、この方法では桁の中間で曲率が変化する場合、変断面桁の場合などは現在の所解析がかなり困難であるが、文献^{5),6)}等を利用する事により解決されよう。

実際の構造については、計算例-2に示した程度で十分な検討を行っていないが、中間の橋脚が先端の曲げに対して変形しやすい図-1(a)のような構造では特に支点上での曲げねじり及びねじりモーメントが普通の場合と大きく相違するので、この点に注意を払った設計をすべきであろう。また、図-1(b)のような構造では当然曲げモーメントの変

化が問題となろう。

参考文献

- 1) H. Fickel: "Analysis of curved girders" Jurnal of the structural division PASC 9/1959.
- 2) 渡辺 昇: "曲線げたの理論と計算" 技報堂.
- 3) 倉西 茂・島田静夫: "曲り梁の計算式" 技報堂.
- 4) 小松定夫: "曲線橋の理論と設計" 土木学会関西支部, 9/1968.
- 5) R. Dakrowski: "Zur Berechnung von gekrüm-
mten dünnwandigen Trägern mit offenem Profil"
DERSTAHLBAU 12/1964.
- 6) 渡辺 昇・薄木征三: "S字曲線桁の構造特性について" 土木学会北海道支部, 研究発表論文集, S. 42.
- 7) 深沢泰晴: "せん断中心の不連続性を考慮した変断面薄間曲線桁の解析法" 第14回橋梁・構造工学研究発表会, S. 42.
- 8) 安宅 勝: "橋梁力学" 共立出版, 応用力学講座 5.
- 9) 大地羊三: "電子計算機による構造解析" 橋梁編纂会刊.