

直交異方性平行四辺形板の曲げについて

正 員 奥 村 勇*

要 旨

本文は直角な二方向で曲げ剛度を異にする、直交異方性平行四辺形板（斜角板）の曲げの二重無限級数による一般解法について述べたものである。斜交座標で表わされた曲げの基本微分方程式の特殊積分が、集中荷重の場合に対して、二重 Fourier 級数を単一 Fourier 級数に変換することにより、取扱いの便利な形で求められた。

1. 緒 言

土木構造物、特に橋梁構造物において重要な意義を持った平行四辺形板の問題は、A. Anzelius (1939) 以来、多くの著名な数理物理学者や工学者により取扱われている。

曲げの微分方程式を直接解いて、平行四辺形板のたわみ曲面の級数解を求める方法には、主として、二つの考え方がある。一つは直角座標で表わされた普通の曲げの微分方程式 $F^4 w = p/D$ に基づくものであり、他の一つはそれを斜交座標に変換した形で取扱う方法である。前者の方法によるものには、W. Fuchssteiner (1953), K. Okamoto (1961)¹⁾ らの研究がある。後者の方法によるものには、J. Krettnner (1954), P. M. Quinlan (1962)²⁾ および J. B. Kennedy and M. W. Huggins (1964) らの研究がある。この他に平行四辺形を単一円に等角写像して、解を複素関数形で与えた小松氏 (1956) の解法が異色である。

しかし、従来取扱われた平行四辺形板の問題は、ほとんどが等方性の場合についてである。直交異方性の場合については、筆者の知る限り、数値計算法による研究が主たるものである。解析的方法では等分布荷重載荷を扱った山崎氏、彦坂氏の研究がみられるだけであり、今だ不十分なように思われる。

本論文では、直交異方性板に対して有効な M. T. Huber の公式を導入して、曲げの基本微分方程式および曲げモーメント、せん断力、反力等を斜交座標で表わすことから出発した。荷重状態を集中荷重の場合に限定し、これに対する基本微分方程式の特殊積分を二重 Fourier 級数の形で求め、さらにそれを取扱いの容易な単一 Fourier 級数に変換した。同次微分方程式の余関数中の積分定数を決定するための連立方程式を、境界関数を用いて、電子計算機の

プログラミングがしやすい一般的な形で与えた。

2. 基本微分方程式と諸断面力

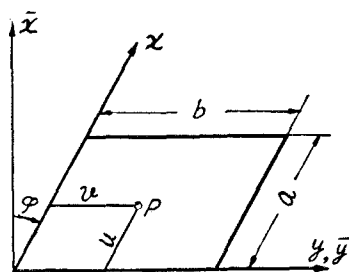


図-1

$\bar{x}$ 軸および $\bar{y}$ 軸の二つの直角方向における板の曲げ剛度を B_1, B_2 とし、ポアソン比を ν_1, ν_2 とすると、直角座標における直交異方性薄板のたわみ曲面の微分方程式および諸断面力は次のように表わされる。

たわみ曲面の微分方程式

$$B_1 \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + B_2 \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{y}^4} = p \quad (1)$$

$$2H = \nu_1 B_2 + \nu_2 B_1 + 4C \quad (1a)$$

曲げモーメントおよびねじりモーメント

$$\left. \begin{aligned} M_{\bar{x}} &= -B_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ M_{\bar{y}} &= -B_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{y}^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2} \right) \\ M_{\bar{x}\bar{y}} &= -M_{\bar{y}\bar{x}} = 2C \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

せん断力および反力

$$\left. \begin{aligned} Q_{\bar{x}} &= \frac{\partial M_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial M_{\bar{y}\bar{x}}}{\partial \bar{y}} \\ Q_{\bar{y}} &= \frac{\partial M_{\bar{y}}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial M_{\bar{x}\bar{y}}}{\partial \bar{x}} \\ V_{\bar{x}} &= Q_{\bar{x}} - \frac{\partial M_{\bar{x}\bar{y}}}{\partial \bar{y}} \\ V_{\bar{y}} &= Q_{\bar{y}} + \frac{\partial M_{\bar{y}\bar{x}}}{\partial \bar{x}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

図-1 により任意点 p の斜交座標 (x, y) は次のように与えられる。

$$x = \bar{x} / \cos \varphi, \quad y = \bar{y} - \bar{x} \tan \varphi \quad (4)$$

* 北海道大学工学部 助手 工修

式(1)の偏微分商の係数に、

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1^2 &= \frac{1}{B_1} \left(H + \sqrt{H^2 - B_1 B_2} \right) \\ \kappa_2^2 &= \frac{1}{B_1} \left(H - \sqrt{H^2 - B_1 B_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

を導入し、式(4)の関係を用いて、式(1)、(2)および式(3)を斜交座標に変換すると次のようになる。

たわみ曲面の基本微分方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2s_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2s_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = \frac{c_0^4 P}{B_1} \quad (6)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= s_0^2 + \kappa_1^2 c_0^2, \quad c_2 = s_0^2 + \kappa_2^2 c_0^2 \\ s_0 &= \sin \varphi, \quad c_0 = \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

曲げモーメント、ねじりモーメント、せん断力

$$\left. \begin{aligned} -M_n/B_1 &= B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + B_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ M_{ns}/B_1 &= B_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + B_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -Q_n/B_1 &= C_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + C_{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + C_{13} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\ &\quad + C_{14} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} B_{11} &= [\cos^2 \alpha + \nu_1 \sin^2 \alpha B_2/B_1]/c_0^2 \\ B_{12} &= -2s_0 B_{11} - 4C \cos \alpha \sin \alpha / B_1 c_0 \\ B_{13} &= [\nu_2 + t_0^2] \cos^2 \alpha + \{B_2(1 + \nu_1 t_0^2) \sin^2 \alpha + 4C t_0 \sin \alpha \cos \alpha\} / B_1 \\ B_{21} &= -(1 - \nu_1 B_2/B_1) \sin \alpha \cos \alpha / c_0^2 \\ B_{22} &= -2s_0 B_{21} + 2C \cos 2\alpha / B_1 c_0 \\ B_{23} &= \{(1 + \nu_1 t_0^2) B_2/B_1 - (t_0^2 + \nu_2)\} \sin \alpha \cos \alpha - 2C t_0 \cos 2\alpha / B_1 \\ C_{11} &= \cos \alpha / c_0^3 \\ C_{12} &= \{\nu_2 B_2 + 2C\} \sin \alpha / B_1 - 3t_0 \cos \alpha / c_0^2 \\ C_{13} &= \{3t_0^2 + \nu_2 + 2C/B_1\} \cos \alpha - 2t_0 \{\nu_1 B_2 + 2C\} \sin \alpha / B_1 / c_0 \\ C_{14} &= -t_0 \{t_0^2 + \nu_2 + 2C/B_1\} \cos \alpha + \{B_2 + t_0^2 \nu_1 B_2 + 2C\} \sin \alpha / B_1 \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

反力

$$\left. \begin{aligned} -V_n/B_1 &= C_{21} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + C_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + C_{23} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\ &\quad + C_{24} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで、任意の断面に立てた外向の法線と x 軸とのなす角度を α とすると

i) x = 一定の境界辺: $\alpha = 0$ として

$$\left. \begin{aligned} C_{21} &= C_{11}, \quad C_{22} = C_{12} + B_{21}, \\ C_{23} &= C_{13} + B_{23}, \quad C_{24} = C_{14} + B_{23} \end{aligned} \right\} \quad (9a)$$

ii) y = 一定の境界辺: $\alpha = \pi/2 - \varphi$ として

$$\left. \begin{aligned} C_{21} &= C_{11} - B_{21}, \quad C_{22} = C_{12} - C_{22}, \\ C_{23} &= C_{13} - B_{23}, \quad C_{24} = C_{14} \end{aligned} \right\} \quad (9b)$$

3. 基本微分方程式の特殊積分

基本微分方程式(6)の特殊積分は、荷重状態によって決められるものであるが、直交異方性板の場合には、さらに式(5)中の根号式 $\sqrt{H^2 - B_1 B_2}$ における H^2 と $B_1 B_2$ との大小、すなわち $H \gtrless \sqrt{B_1 B_2}$ により解の形が違ってくる。

これは板の構造によって決まる要素であるが、本文では主として、 $H = \sqrt{B_1 B_2}$ の場合について述べる。この場合には、式(6)は次のように変形される。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa' \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2s_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right)^2 w = \frac{P c_0^4}{B_1} \quad (10)$$

ここで

$$\kappa' = s_0^2 + \kappa^2 c_0^2, \quad \kappa^2 = \sqrt{B_2/B_1} \quad (11)$$

点 (u, v) に作用する集中荷重 P を二重正弦フーリエ級数で表わすと次のようになる。

$$P = \sum_M \sum_N \frac{4P}{ab} \sin mu \sin nv \sin mx \sin ny \quad (12)$$

ここで

$$m = M\pi/a, \quad n = N\pi/b$$

式(10)に式(12)と次の二重フーリエ級数展開

$$w(x, y) = \sum_M \sum_N \{A_{mn} \cos mx \cos ny + B_{mn} \cos mx \sin ny + C_{mn} \sin mx \cos ny + D_{mn} \sin mx \sin ny\} \quad (13)$$

を代入し、両辺の係数を比較すると A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} および D_{mn} は次のように決められる。

$$\left. \begin{aligned} B_{mn} &= C_{mn} = 0 \\ A_{mn} &= -\frac{G_2}{G_3} P' \sin mu \sin nv \\ D_{mn} &= \frac{G_1}{G_3} P' \sin mu \sin nv \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= (m^2 + \kappa' n^2)^2 + 4s_0^2 m^2 n^2 \\ G_2 &= 4s_0 mn (m^2 + \kappa' n^2) \\ G_3 &= G_1^2 - G_2^2 = \{(m^2 + \kappa' n^2)^2 - 4s_0^2 m^2 n^2\}^2 \\ P' &= \frac{4c_0^4 P}{ab B_1} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

従って式(13)は次のようになる。

$$\begin{aligned} w(x, y) &= P' \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=1}^{\infty} \left[-\frac{G_2}{G_3} \cos mx \cos ny \right. \\ &\quad \left. + \frac{G_1}{G_3} \sin mx \sin ny \right] \sin mu \sin nv \end{aligned} \quad (16)$$

M について上式の級数の和を求めるため、 G_2/G_3 および G_1/G_3 を部分分数に展開する。 $G_3=0$ において、 m について解くと、 $m_{1,2} = \pm \omega ni$, $m_{3,4} = \pm \omega ni$ が得られる。

ゆえに、 G_3 は次のような形で与えられる。

$$G_3 = [m^2 + \omega^2 n^2] [m^2 + \bar{\omega}^2 n^2]^2 \quad (17)$$

ここで

$$\omega = c_0 \kappa + i s_0, \quad \bar{\omega} = c_0 \kappa - i s_0 \quad (18)$$

従って、 G_1/G_3 の部分分数展開は次の形で得られる。

$$\frac{G_1}{G_3} = \frac{A}{m^2 + \omega^2 n^2} + \frac{B}{m^2 + \bar{\omega}^2 n^2} + \frac{C}{(m^2 + \omega^2 n^2)^2} + \frac{D}{(m^2 + \bar{\omega}^2 n^2)^2} \quad (19)$$

ここで

$$A n^2 = -B n^2 = -\frac{s_0 i}{4 c_0^3 \kappa^3} \\ C = \frac{\omega^2}{2 c_0^3 \kappa^2}, \quad D = \frac{\bar{\omega}^2}{2 c_0^3 \kappa^2} \quad (20)$$

同様にして、 $n G_2/m G_3$ の部分分数展開の係数は

$$A' n^2 = -B' n^2 = -\frac{i}{4 c_0^3 \kappa^3} \\ C' = \frac{i \omega}{2 c_0^3 \kappa^2}, \quad D' = -\frac{i \bar{\omega}}{2 c_0^3 \kappa^2} \quad (21)$$

となる。よって、式(16)に G_1/G_3 および G_2/G_3 の部分分数展開を代入し、変形すると、特殊積分 w_p は次のような形で求められる。

$$w_p(x, y) \Big|_{\frac{R a b c_0}{\kappa^3 \pi^4 B_1}} = w_1(x, y) - w_2(x, y) \quad (22)$$

ここで

$$w_1(x, y) = \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{M=1}^{\infty} \left\{ \frac{s_0}{N^2} \left[\frac{i}{M^2 + \Omega^2} - \frac{i}{M^2 + \bar{\Omega}^2} \right] + 2 c_0 \kappa h^2 \left[\frac{\omega^2}{(M^2 + \Omega^2)^2} + \frac{\bar{\omega}^2}{(M^2 + \bar{\Omega}^2)^2} \right] \right\} \\ \sin m x \sin n y \times \sin m u \sin n v \quad (23)$$

$$w_2(x, y) = \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{N h} \left\{ \frac{1}{N^2} \left[\frac{M i}{M^2 + \Omega^2} - \frac{M i}{M^2 + \bar{\Omega}^2} \right] + 2 c_0 \kappa h^2 \left[\frac{M \omega i}{(M^2 + \Omega^2)^2} - \frac{M \bar{\omega} i}{(M^2 + \bar{\Omega}^2)^2} \right] \right\} \\ \cos m x \cos n y \times \sin m u \sin n v \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \omega h N = h N [c_0 \kappa + i s_0] \equiv K + i J \\ \bar{\Omega} &= \bar{\omega} h N = h N [c_0 \kappa - i s_0] \\ K &= h N c_0 \kappa, \quad J = h N s_0, \quad h = a/b \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

次に、 w_1 および w_2 の二重級数を、 M について総和する。まず、次のように定義されたステップ関数 λ

$$\lambda = \begin{cases} -1 & (u > x) \\ 1 & (u < x) \end{cases} \quad (26)$$

を導入すると、式(23)、式(24)の m についての余弦および正弦関数の積は、次のように変形される。

$$2 \cos m x \sin m u = \sin m (u+x) - \lambda \sin m |u-x| \\ = \sum_{s=1}^2 \lambda_s \sin M \theta_s \quad (27)$$

$$2 \sin m x \sin m u = \cos m |x-u| - \cos m (x+u) \\ = - \sum_{s=1}^2 (-1)^s \cos M \theta_s \quad (28)$$

ここで

$$\lambda_s = \begin{cases} -\lambda & s=1 \\ 1 & s=2 \end{cases} \quad (29)$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{a} |x-u|, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{a} (x+u)$$

フーリエ級数の総和に対して、よく知られた公式

$$\sum_{M=1}^{\infty} \frac{\cos M \theta}{M^2 + \Omega^2} = -\frac{1}{2 \Omega^2} + \frac{\pi}{2 \Omega} \frac{\cosh \Omega \theta'}{\sinh \pi \Omega} \quad (30) \\ (0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \theta' = \pi - \theta)$$

と、それを θ あるいは Ω について微分した諸公式を用いて式(23)、(24)中の $[\quad] \cos M \theta (\sin M \theta)$ を M について総和すると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_2 &= \frac{\pi}{g_0 (K^2 + J^2)} (J g_1 + K g_2) - I_2 \\ \bar{C}_4 &= R_p(\omega^2) \left\{ \frac{\pi}{2} (g_7 + g_8) - R_4 \right\} \\ &\quad + I_p(\omega^2) \left\{ \frac{\pi}{2} (g_9 + g_{10}) - I_4 \right\} \\ \bar{S}_2 &= \frac{g_3}{g_0} \pi \\ \bar{S}_4 &= \frac{\pi}{2 (K^2 + J^2)} \left\{ R_p(i \omega) (K g_{11} - J g_{12}) \right. \\ &\quad \left. + I_p(i \omega) (K g_{12} + J g_{11}) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

ここで、 $R_p(\quad)$ および $I_p(\quad)$ はそれぞれ $(\quad)$ 内の実数部および虚数部を表すものとする。また、 $g_0, g_1, \dots, g_{12}$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} g_0 &= \cosh 2\pi K - \cos 2\pi J, \quad \bar{\theta} = 2\pi - \theta, \quad \theta' = \pi - \theta \\ g_1 &= \sinh \bar{\theta} K \cos \theta J + \sinh \theta K \cos \bar{\theta} J \\ g_2 &= \cosh \bar{\theta} K \sin \theta J + \cosh \theta K \sin \bar{\theta} J \\ g_3 &= \sinh \bar{\theta} K \sin \theta J - \sinh \theta K \sin \bar{\theta} J \\ g_4 &= \cosh \bar{\theta} K \cos \theta J - \cosh \theta K \cos \bar{\theta} J \\ g_5 &= (-\theta' g_4 g_0 + \pi g_1 \sinh 2\pi K - \pi g_2 \sin 2\pi J) / g_0^2 \\ g_6 &= (-\theta' g_3 g_0 + \pi g_1 \sin 2\pi J + \pi g_2 \sinh 2\pi K) / g_0^2 \\ g_7 &= R_2 g_5 - I_2 g_6 \\ g_8 &= (R_3 g_1 - I_3 g_2) / g_0 \\ g_9 &= R_2 g_6 + I_2 g_5 \\ g_{10} &= (R_3 g_2 + I_3 g_1) / g_0 \\ g_{11} &= \{\pi (g_4 \sinh 2\pi K - g_3 \sin 2\pi J) - \theta' g_0 g_1\} / g_0^2 \\ g_{12} &= \{\pi (g_4 \sin 2\pi J + g_3 \sinh 2\pi K) - \theta' g_0 g_2\} / g_0^2 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} R_2 &= (K^2 - J^2) / (K^2 + J^2)^2 \\ R_3 &= (K^3 - 3KJ^2) / (K^2 + J^2)^3 \\ R_4 &= (K^4 - 6K^2 J^2 + J^4) / (K^2 + J^2)^4 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} I_2 &= 2KJ/(K^2+J^2)^2 \\ I_3 &= (3K^2J-J^3)/(K^2+J^2)^3 \\ I_4 &= 4KJ(K^2-J^2)/(K^2+J^2)^4 \end{aligned} \right\}$$

したがって、式(26)から式(31)を用いて式(22)を単一フーリエ級数に展開すると次式が得られる。

$$w_p(x, y)/(\bar{P}/B_1) = \sum_{N=1}^{\infty} E_n(u, x) \sin nv \sin ny + \sum_{N=1}^{\infty} F_n(u, x) \sin nv \cos ny \quad (34)$$

ここで

$$\begin{aligned} E_n(u, x) &= -\sum_{s=1}^2 (-1)^s \left\{ \frac{s_0}{N^2} \bar{C}_2 + 2c_0 \kappa h^2 \bar{C}_4 \right\} \\ F_n(u, x) &= -\sum_{s=1}^2 \left\{ \lambda_s \left[\frac{1}{hN^3} \bar{S}_2 + \frac{2c_0 \kappa h}{N} \bar{S}_4 \right] \right\} \\ \bar{P} &= Pabc_0/(2\pi^4 \kappa^3) \end{aligned} \quad (35)$$

また、式(32)の g_1 から g_{12} における θ は θ_s でおきかえなければならない。

調和関数 $\cos ny$ および $\sin ny$ を含む式(34)の単一級数は、 x —一定の境界においては適した形であるが、 y —一定の境界においては、調和関数 $\cos mx$ 、 $\sin mx$ を含む形で表わした方が取扱上便利である。従って、式(16)の二重級数を N について求めるため、式(19)から式(35)において次の対を互に交換する。

$$\begin{aligned} (m, n), (M, N), (x, y), \\ (u, v), (a, b) \end{aligned} \quad (36)$$

さらに

$$\begin{aligned} \omega &= \omega/\kappa', \quad \bar{\omega} = \bar{\omega}/\kappa', \quad \bar{C}_2 = \kappa' \bar{C}_2 \\ \theta_1 &= \frac{\pi}{a} |v-y|, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{a} (v+y) \end{aligned} \quad (37)$$

とおくと、式(16)は次のようになる。

$$w_p(x, y)/(\bar{P}/B_1) = \sum_{M=1}^{\infty} \bar{E}_m(v, y) \sin mu \sin mx + \sum_{M=1}^{\infty} \bar{F}_m(v, y) \sin mu \cos mx \quad (38)$$

次に、特殊積分に対する曲げモーメント、反力などを計算するため、 $\bar{C}_2$ 、 $\bar{S}_2$ 、 $\bar{C}_4$ および $\bar{S}_4$ に対する偏微分商を求めると次式を得る。

$$\begin{aligned} \bar{C}_2' &= -\frac{\pi}{a} \bar{\lambda}_s \bar{S}_2 = -\frac{\pi}{a} \bar{\lambda}_s \frac{g_3}{g_0} \pi \\ \bar{C}_2'' &= -\frac{\pi}{a} \bar{\lambda}_s \bar{S}_2' = -\frac{\pi^2}{a^2 g_0} [Kg_2 - Jg_1] \\ \bar{C}_2''' &= -\frac{\pi^4}{a^3 g_0} \bar{\lambda}_s [g_3(K^2 - J^2) - 2JKg_4] \\ \bar{S}_2''' &= -\frac{\pi^4}{a^3 g_0} \bar{\lambda}_s [g_2(D_5K - D_6J) - g_1(D_5J + D_6K)] \\ \bar{C}_4' &= -\frac{\pi}{a} \bar{\lambda}_s \bar{S}_4 = -\frac{\pi}{a} \bar{\lambda}_s \frac{\pi}{2(K^2 + J^2)} \left\{ B(Kg_{11} - Jg_{12}) \right. \\ &\quad \left. + C(Kg_{12} + Jg_{11}) \right\} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_4' &= \frac{\pi^4}{2a^2(K^2 + J^2)g_0^2} \left[(BK + CJ) \{ g_1D_1 + g_2D_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\theta' g_0}{\pi} (Jg_3 + Kg_4) \} + (CK - BJ) \{ -g_1D_2 \right. \\ &\quad \left. + g_2D_1 - \frac{\theta' g_0}{\pi} (Kg_3 - Jg_4) \} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_4''' &= \frac{\pi^5 \bar{\lambda}_s}{2a^3(K^2 + J^2)g_0^2} \left[(BK + CJ) \{ -g_3D_3 + g_4D_4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\theta' g_0}{\pi} (g_1D_5 + g_2D_6) \} + (CK - BJ) \{ g_3D_4 + g_4D_3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\theta' g_0}{\pi} (-g_1D_6 + g_2D_5) \} \right] \end{aligned}$$

ここで

$$B = R_p(\omega^2), \quad C = I_p(\omega^2)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_4''' &= \frac{\pi^5 \bar{\lambda}_s}{2a^3(K^2 + J^2)g_0^2} \left[(BK + CJ) \{ g_1D_7 - g_2D_8 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\theta' g_0}{\pi} (g_3D_9 + g_4D_{10}) \} + (CK - BJ) \{ g_1D_8 + g_2D_7 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\theta' g_0}{\pi} (g_3D_{10} - g_4D_9) \} \right] \end{aligned}$$

ここで

$$B = R_p(i\omega), \quad C = I_p(i\omega)$$

$$\bar{\lambda}_s = \begin{cases} \lambda & s=1 \\ 1 & s=2 \end{cases} \quad (40)$$

また、 $D_1, D_2, \dots, D_{10}$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= K \sinh 2\pi K + J \sin 2\pi J - g_0/\pi \\ D_2 &= J \sinh 2\pi K - K \sin 2\pi J \\ D_3 &= JD_1 + KD_2 - g_0J/\pi \\ D_4 &= -KD_1 + JD_2 + g_0K/\pi \\ D_5 &= K^2 - J^2 \\ D_6 &= 2KJ \\ D_7 &= JD_3 + KD_4 + g_0D_5/\pi \\ D_8 &= KD_3 - JD_4 - g_0D_6/\pi \\ D_9 &= JD_5 + KD_6 \\ D_{10} &= KD_5 - JD_6 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

式(38)および式(39)を式(8)に代入して、特殊積分に対する曲げモーメント、反力などを求めると次式となる。

$$\begin{aligned} -M_n^p/\bar{P} &= \sum_{N=1}^{\infty} E_n^{(2)}(u, x) \sin nv \sin ny \\ &\quad + \sum_{N=1}^{\infty} F_n^{(2)}(u, x) \sin nv \cos ny \end{aligned} \quad (42)$$

ここで

$$\begin{aligned} E_n^{(2)}(u, x) &= -\sum_{s=1}^2 \left[(-1)^s B_{11} \left\{ \frac{s_0}{N^2} \bar{C}_2'' + 2c_0 \kappa h^2 \bar{C}_4' \right\} \right. \\ &\quad \left. - \lambda_s n B_{12} \left\{ \frac{1}{hN^3} \bar{S}_2' + 2c_0 \kappa \frac{h}{N} \bar{S}_4' \right\} \right] - n^2 B_{13} E_n(u, x) \\ F_n^{(2)}(u, x) &= -\sum_{s=1}^2 \left[\lambda_s B_{11} \left\{ \frac{1}{hN^3} \bar{S}_2'' + 2c_0 \kappa \frac{h}{N} \bar{S}_4'' \right\} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^s n B_{12} \left\{ \frac{s_0}{N^2} \bar{C}_2' + 2c_0 \kappa h^2 \bar{C}_4 \right\} \right] - n^2 B_{13} F_n(u, x) \end{aligned} \quad (43)$$

$M_{ns}^p/\bar{P}$ は上式において、 B_{1j} を B_{2j} におきかえると得ら

れる。また、反力は次のようになる。

$$-V_n^p/\bar{P} = \sum_{N=1}^{\infty} E_n^{(3)}(u, x) \sin nv \sin ny \\ + \sum_{N=1}^{\infty} F_n^{(3)}(u, x) \sin nv \cos ny \quad (44)$$

ここで

$$E_n^{(3)}(u, x) = -\sum_{s=1}^2 \left[(-1)^s C_{21} \left\{ \frac{s_0}{N^2} \bar{C}_2''' + 2c_0 \kappa h^2 \bar{C}_4''' \right\} \right. \\ \left. - \lambda_s n C_{22} \left\{ \frac{1}{hN^3} \bar{S}_2'' + 2c_0 \kappa \frac{h}{N} \bar{S}_4'' \right\} \right. \\ \left. - (-1)^s n^2 C_{23} \left\{ \frac{s_0}{N^2} \bar{C}_2'' + 2c_0 \kappa h^2 \bar{C}_4'' \right\} \right] + n^3 C_{24} F_n(u, x) \\ F_n^{(3)}(u, x) = -\sum_{s=1}^2 \left[\lambda_s C_{21} \left\{ \frac{1}{hN^3} \bar{S}_2''' + 2c_0 \kappa \frac{h}{N} \bar{S}_4''' \right\} \right. \\ \left. + (-1)^s n C_{22} \left\{ \frac{s_0}{N^2} \bar{C}_2'' + 2c_0 \kappa h^2 \bar{C}_4'' \right\} \right. \\ \left. - \lambda_s n^2 C_{23} \left\{ \frac{1}{hN^3} \bar{S}_2'' + 2c_0 \kappa \frac{h}{N} \bar{S}_4'' \right\} \right] - n^3 C_{24} E_n(u, x) \quad (45)$$

$-Q_n^p/\bar{P}$ は上式の c_{1j} を c_{2j} でおきかえる。

4. 基本微分方程式の一般解

たわみ曲面の基本微分方程式 (10) の右辺を零とおいた同次微分方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa' \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2s_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \omega_1 = 0 \quad (46)$$

の余関数は $\omega_1 = e^{imx} e^{iny}$ を上式に代入して得られた特性方程式を m および n について解き、実数部を重ね合わせることににより次式の形で与えられる。

$$\omega_1 = \omega_c + \omega_{c'} \quad (47)$$

ここで

$$\omega_c = \sum_{N=1}^{\infty} \left[(A_n + nx B_n) e^{-c_0 \kappa n (a-x)} \right. \\ \left. + (C_n + nx D_n) e^{-c_0 \kappa n x} \right] \cos n (s_0 x + y) \quad (48)$$

$$\omega_{c'} = \sum_{M=1}^{\infty} \left[(\bar{A}_m + my \bar{B}_m) e^{-\frac{c_0 \kappa}{\kappa'} m (b-y)} \right. \\ \left. + (\bar{C}_m + my \bar{D}_m) e^{-\frac{c_0 \kappa}{\kappa'} m y} \right] \cos m \left(\frac{s_0}{\kappa'} y + x \right) \quad (49)$$

従って、式 (10) の一般解は次のようになる。

$$\omega = \omega_p + \omega_1 = \omega_p + \omega_c + \omega_{c'} \quad (50)$$

次に、前節で特殊積に対して求めたように、ここでは余関数に対する曲げモーメント、反力などを求めると、次に示すような一般的な形で得られる。

$$-Q_n^c/B_1 = \sum_{N=1}^{\infty} n^q \left[\left\{ (A_n + nx B_n) h(c_0) + B_n \bar{h}(c_0) \right\} \right. \\ \left. \cos nz + \left\{ (A_n + nx B_n) f(c_0) + B_n \bar{f}(c_0) \right\} \sin nz \right] \\ e^{-c_0 \kappa n x} + \sum_{N=1}^{\infty} n^q \left[\left\{ (C_n + nx D_n) h(-c_0) + D_n \bar{h}(-c_0) \right\} \right.$$

$$\cos nz + \left\{ (C_n + nx D_n) f(-c_0) + D_n \bar{f}(-c_0) \right\} \\ \sin nz \Big] e^{-c_0 \kappa n x} \quad (51)$$

ここで、 $q' = 1, 2, \dots$ に対する $h, \bar{h}, f$ および $\bar{f}$ は表-1 によって与えられる。表中の B_{ij} および C_{ij} は式 (8 a), (9 a) および式 (9 b) で与えられる α の関数である。

表-1 境界関数

q'	$Q_{q'}^c(\alpha)$	q	$h(c_0); \bar{h}(c_0); f(c_0); \bar{f}(c_0)$
1	$-B_1 \omega_c$	0	1; 0; 1; 0
2	$M_n^c(\alpha)$	2	$B_{11}(c_0^2 \kappa^2 - s_0^2) - B_{12} s_0 - B_{13};$ $2B_{11} c_0 \kappa;$ $-2B_{11} c_0 s_0 \kappa - B_{12} c_0 \kappa;$ $-2B_{11} s_0 - B_{12}$
3	$M_{ns}^c(\alpha)$	2	$B_{21}(c_0^2 \kappa^2 - s_0^2) - B_{22} s_0 - B_{23};$ $2B_{21} c_0 \kappa;$ $-2B_{21} c_0 s_0 \kappa - B_{22} c_0 \kappa;$ $-2B_{21} s_0 - B_{21}$
4	$Q_n^c(\alpha)$	3	$C_{11}(c_0^3 \kappa^3 - 3c_0 \kappa s_0^2) - 2C_{12} c_0 s_0 \kappa$ $- C_{13} c_0 \kappa;$ $3C_{11}(c_0^2 \kappa^2 - s_0^2) - 2C_{12} s_0 - C_{13};$ $C_{11}(s_0^3 - 3s_0 c_0^2 \kappa^2) + C_{12}(s_0^2 - c_0^2 \kappa^2)$ $+ C_{13} s_0 + C_{14};$ $-6C_{11} c_0 s_0 \kappa - 2C_{12} c_0 \kappa$
5	$V_n^c(\alpha)$	3	$C_{21}(c_0^3 \kappa^3 - 3c_0 \kappa s_0^2) - 2C_{22} c_0 s_0 \kappa$ $- C_{23} c_0 \kappa;$ $3C_{21}(c_0^2 \kappa^2 - s_0^2) - 2C_{22} s_0 - C_{23};$ $C_{21}(s_0^3 - 3s_0 c_0^2 \kappa^2) + C_{22}(s_0^2 - c_0^2 \kappa^2)$ $+ C_{23} s_0 + C_{24};$ $-6C_{21} c_0 s_0 \kappa - 2C_{22} c_0 \kappa$

また、 $\omega_{c'}$ に対しても次のような一般形で表わされる。

$$-Q_n^{c'}/B_1 = \sum_{M=1}^{\infty} m^q \left[\left\{ (\bar{A}_m + my \bar{B}_m) h'(c_0) + \bar{B}_m \bar{h}'(c_0) \right\} \right. \\ \left. \cos m\bar{z} + \left\{ (\bar{A}_m + my \bar{B}_m) f'(c_0) + \bar{B}_m \bar{f}'(c_0) \right\} \sin m\bar{z} \right] \\ e^{-\frac{c_0 \kappa}{\kappa'} m \bar{y}} + \sum_{M=1}^{\infty} m^q \left[\left\{ (\bar{C}_m + my \bar{D}_m) h'(-c_0) + \bar{D}_m \bar{h}'(-c_0) \right\} \right. \\ \left. \cos m\bar{z} + \left\{ (\bar{C}_m + my \bar{D}_m) f'(-c_0) + \bar{D}_m \bar{f}'(-c_0) \right\} \right. \\ \left. \sin m\bar{z} \right] e^{-\frac{c_0 \kappa}{\kappa'} m y} \quad (52)$$

ここで

$$\bar{x} = a - x, \quad \bar{z} = y + s_0 x \\ \bar{y} = b - y, \quad \bar{z} = x + s_0 y/\kappa' \quad (53)$$

また、関数 $h', \bar{h}', f'$ および $\bar{f}'$ は表-1において、次の変換をおこなう。

$$\left. \begin{aligned} c_0 \kappa &\longrightarrow c_0 \kappa' / \kappa', & s_0 &\longrightarrow s_0 / \kappa' \\ B_{i1} &\longleftrightarrow B_{i3}, & C_{i1} &\longleftrightarrow C_{i4} \\ C_{i2} &\longleftrightarrow C_{i3} & (i=1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

5. 境界条件式と連立方程式

式(47)で与えられた余関数の未定係数 A_n, B_n, C_n, D_n および $\bar{A}_m, \bar{B}_m, \bar{C}_m, \bar{D}_m$ は、周辺固定長方形板の場合と同様に、有限な形では表現できない。しかし、平行四辺形板の境界边における8個の境界条件式をおのおのフーリエ級数に展開して、 N において $\bar{N}$ 、 M において $\bar{M}$ より大きな調和関数を零、すなわち $N > \bar{N}$ 、 $M > \bar{M}$ に対する未定係数を零と仮定することにより、8個の境界条件式は4($\bar{M} + \bar{N}$)元連立一次方程式となるので、それを解くことにより未定係数を定めることができる。

例題として、二斜辺 $y=0, y=b$ で単純支持され、他の二辺 $x=0, x=a$ で完全自由の境界条件を持った直交異方性平行四辺形板を扱う。

境界条件

$$x=0, x=a; [M_n]_{\alpha=0}=0, [V_n]_{\alpha=0}=0 \quad (55)$$

$$y=0, y=b; [M_n]_{\alpha=\frac{\pi}{2}-\varphi}=0, \tau v=0 \quad (56)$$

境界条件式(55)は式(42)、(43)および式(51)、(52)を用いて次のような一般形で表わされる。

$$\begin{aligned} -\bar{P} \sum_{N=1}^{\infty} E_n^{(k)}(u, x) \sin n v \sin n y \\ -\bar{P} \sum_{N=1}^{\infty} F_n^{(k)}(u, x) \sin n v \cos n y = Q_{q'}^{\alpha} + Q_{q'}^{\beta} \end{aligned} \quad (57)$$

ここで

$$\begin{aligned} x = \begin{cases} 0 \\ a \end{cases}; \quad z = \begin{cases} y \\ y+s_0 a \end{cases}; \quad \bar{z} = \begin{cases} s_0 y \\ a+s_0 y/\kappa' \end{cases} \\ k=2, 3; \quad q'=2, 5 \end{aligned} \quad (58)$$

また、 y —一定の边における境界条件式(56)は式(36)、(37)および式(38)より次のようになる。

$$\begin{aligned} -\bar{P} \sum_{M=1}^{\infty} E_m^{(k)}(v, y) \sin m u \sin m x \\ -\bar{P} \sum_{M=1}^{\infty} \bar{F}_m^{(k)}(v, y) \sin m u \cos m x = Q_{q'}^{\alpha} + Q_{q'}^{\beta} \end{aligned} \quad (59)$$

ここで

$$y=0, b; \quad k=0, 2; \quad q'=1, 2 \quad (60)$$

式(57)の左辺はフーリエ級数で表わされているので、右辺もこれに対応したフーリエ級数に展開することが必要となる。一般に、式(22)より式(57)の $E_n^{(k)}$ および $F_n^{(k)}$ は $x=0$ および $x=a$ において、どちらかが零となるので、次の二つの場合において考える。

$$i) \quad E_n^{(2)}(u, \alpha) = E_n^{(2)}(u, 0) = 0$$

この場合は、式(57)の両辺に $\cos n'y$ をかけて、0から b まで積分し、 $x=a$ とおくと次式が得られる。

$$\begin{aligned} -\frac{b\bar{P}}{2} F_n^{(2)}(u, a) \sin n v = \sum_{N=1}^N n^q \left[A_n \left\{ h(c_0) C_n(n', b, a s_0) \right. \right. \\ \left. \left. + f(c_0) S_n(n', b, a s_0) \right\} + B_n \left\{ (n a h(c_0) + \bar{h}(c_0)) C_n(n', b, a s_0) \right. \right. \\ \left. \left. + (n a f(c_0) + \bar{f}(c_0)) S_n(n', b, a s_0) \right\} \right] + \\ \sum_{N=1}^N n^q e^{-c_0 \kappa n a} \left[C_n \left\{ h(-c_0) C_n(n', b, a s_0) + f(-c_0) S_n \right. \right. \\ \left. \left. (n', b, a s_0) \right\} + D_n \left\{ (n a h(-c_0) + \bar{h}(-c_0)) C_n(n', b, a s_0) \right. \right. \\ \left. \left. + (n a f(-c_0) + \bar{f}(-c_0)) S_n(n', b, a s_0) \right\} \right] + \\ \sum_{M=1}^M m^q e^{-c_0 \kappa m b / \kappa'} \left[\bar{A}_m \left\{ h'(c_0) C_{mn'}(c_0, s_0, a) + f'(c_0) S_{mn'} \right. \right. \\ \left. \left. (c_0, s_0, a) \right\} + \bar{B}_m \left\{ h'(c_0) C'_{mn'}(c_0, s_0, a) + \bar{h}'(c_0) C_{mn'} \right. \right. \\ \left. \left. (c_0, s_0, a) + f'(c_0) S'_{mn'}(c_0, s_0, a) + \bar{f}'(c_0) S_{mn'}(c_0, s_0, a) \right\} \right] + \\ \sum_{M=1}^M m^q \left[\bar{C}_m \left\{ h'(-c_0) C_{mn'}(-c_0, s_0, a) + f'(-c_0) S_{mn'} \right. \right. \\ \left. \left. (-c_0, s_0, a) \right\} + \bar{D}_m \left\{ h'(-c_0) C'_{mn'}(-c_0, s_0, a) \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{h}'(-c_0) C_{mn'}(-c_0, s_0, a) + f'(-c_0) S'_{mn'}(-c_0, s_0, a) \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{f}'(-c_0) S_{mn'}(-c_0, s_0, a) \right\} \right] \\ n' = N' \pi / b, \quad N' = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (61)$$

ここで

$$\begin{aligned} C_n(n', b, a s_0) &= \int_0^b \cos n(s_0 a + y) \cos n' y \, dy \\ S_n(n', b, a s_0) &= \int_0^b \sin n(s_0 a + y) \cos n' y \, dy \\ C'_{mn'}(c_0, s_0, a) &= \int_0^b m y e^{\frac{s_0 \kappa}{\kappa'} m y} \cos m \left(\frac{s_0}{\kappa'} y + a \right) \cos n' y \, dy \\ S'_{mn'}(c_0, s_0, a) &= \int_0^b m y e^{\frac{s_0 \kappa}{\kappa'} m y} \sin m \left(\frac{s_0}{\kappa'} y + a \right) \cos n' y \, dy \end{aligned} \quad (62)$$

$x=0$ では、上式で $a=0$ とおき、最初の総和記号中の n^q を $n^q e^{-c_0 \kappa n a}$ でおきかえる。

$$ii) \quad F_n^{(3)}(u, \alpha) = F_n^{(3)}(u, 0) = 0$$

式(57)の両辺に $\sin n'y$ をかけて積分すると次式が得られる。

$$-\frac{\bar{P}b}{2} E_n^{(2)}(u, a) \sin n v = F(\bar{C}_n, \bar{S}_n, \bar{C}_{mn}, \bar{S}_{mn}, \dots) \quad (63)$$

ここで、 $\bar{C}_n, \bar{S}_n, \bar{C}_{mn}$ などは式(62)における $\cos n'y$ を $\sin n'y$ におきかえたものである。

また、 y —一定の边においては式(59)により、 $\bar{M}$ についての同様の式が得られる。したがって、4($\bar{M} + \bar{N}$)元連立一次方程式が得られることになり、これを解いて、未定係数が決定されることになる。

6. $H \approx \sqrt{B_1 B_2}$ の場合

H が $\sqrt{B_1 B_2}$ より大きい場合および小さい場合の特殊積分について簡単に述べる。

i) $H > \sqrt{B_1 B_2}$

たわみ曲面の微分方程式 (6) に式 (13) を代入すると次式が得られる。

$$w(x, y) = P' \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=1}^{\infty} \left[-\frac{G_2}{G_3} \cos mx \cos ny + \frac{G_1}{G_3} \sin mx \sin ny \right] \sin mu \sin nv \quad (16)$$

ここで

$$\begin{aligned} G_1 &= (m^2 + c_1 n^2)(m^2 + c_2 n^2) + 4s_0^2 m^2 n^2 \\ G_2 &= 2s_0 mn \{ (m^2 + c_1 n^2) + (m^2 + c_2 n^2) \} \\ G_3 &= G_1^2 - G_2^2 \end{aligned} \quad (64)$$

したがって、第3節における同様の手法で計算し、結局特殊積分は次のような形で得られる。

$$w_p(x, y) / \frac{Pabc_0}{\pi^4 B_1} = w_1(x, y) - w_2(x, y) \quad (65)$$

$$\begin{aligned} w_1(x, y) &= \frac{2}{\kappa_2^2 - \kappa_1^2} \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2} \left[\frac{1}{\kappa_1} \left(\frac{\omega_1}{M^2 + \Omega_1^2} + \frac{\bar{\omega}_1}{M^2 + \bar{\Omega}_1^2} \right) - \frac{1}{\kappa_2} \left(\frac{\omega_2}{M^2 + \Omega_2^2} + \frac{\bar{\omega}_2}{M^2 + \bar{\Omega}_2^2} \right) \right] \\ &\quad \sin mx \sin ny \sin mu \sin nv \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} w_2(x, y) &= \frac{2}{\kappa_2^2 - \kappa_1^2} \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{Mi}{N^3 h} \left[\frac{1}{\kappa_1} \left(\frac{1}{M^2 + \Omega_1^2} - \frac{1}{M^2 + \bar{\Omega}_1^2} \right) - \frac{1}{\kappa_2} \left(\frac{1}{M^2 + \Omega_2^2} - \frac{1}{M^2 + \bar{\Omega}_2^2} \right) \right] \\ &\quad \cos mx \cos ny \sin mu \sin nv \end{aligned} \quad (67)$$

ここで

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \omega_1 hN = \{c_0 \kappa_1 + is_0\} hN \equiv K_1 + iJ_1 \\ \bar{\Omega}_1 &= \bar{\omega}_1 hN = \{c_0 \kappa_1 - is_0\} hN \\ \Omega_2 &= \omega_2 hN = \{c_0 \kappa_2 + is_0\} hN \equiv K_2 + iJ_2 \\ \bar{\Omega}_2 &= \bar{\omega}_2 hN = \{c_0 \kappa_2 - is_0\} hN \end{aligned} \quad (68)$$

いま、式 (65) において、 $\varphi=0$ すなわち、 $s_0=0$ 、 $c_0=1$ とおくと、

$$\Omega_1 = \bar{\Omega}_1 = \kappa_1 hN, \quad \Omega_2 = \bar{\Omega}_2 = \kappa_2 hN$$

となり、 $w_2(x, y)=0$ となる。したがって、 w_p は

$$\begin{aligned} w_p(x, y) &= \frac{Pab}{\pi^4 B_1} w_1(x, y) \\ &= \frac{4Pab}{\pi^4 B_1} \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{h^2}{M^4 + h^2 N^2 M^2 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) + \kappa_1^2 \kappa_2^2 h^4 N^4} \\ &= \frac{1}{\pi^4} \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=1}^{\infty} a_{mn} \frac{\sin(M\pi x/a) \sin(N\pi y/b)}{B_1 \frac{M^4}{a^4} + 2H \frac{M^2 N^2}{a^2 b^2} + B_2 \frac{N^4}{b^4}} \\ a_{mn} &= \frac{4P}{ab} \sin \frac{M\pi}{a} u \sin \frac{N\pi}{b} v \end{aligned} \quad (69)$$

となり、集中荷重を受けた周辺単純支持直交異方性矩形板の Navier の解に一致する。

第3節と同様にして、式 (65) を単一級数に変換すると次のようになる。

$$\begin{aligned} w_p(x, y) &= \frac{Pabc_0}{2\pi^4 B_1} \left[\frac{2}{\kappa_2^2 - \kappa_1^2} \left\{ -\sum_{s=1}^2 \sum_{N=1}^{\infty} (-1)^s \frac{1}{N^2} \left(\frac{\bar{C}_2}{\kappa_1} - \frac{\bar{C}_2'}{\kappa_2} \right) \right\} \sin nv \sin ny - \frac{2}{\kappa_2^2 - \kappa_1^2} \left\{ \sum_{s=1}^2 \sum_{N=1}^{\infty} \lambda_s \frac{1}{N^3 h} \left(\frac{\bar{S}_2}{\kappa_1} - \frac{\bar{S}_2'}{\kappa_2} \right) \right\} \sin nv \cos ny \right] \end{aligned} \quad (70)$$

ここで

$$\begin{aligned} \bar{C}_2(K, J, \theta_s, B, C) &= \frac{\pi}{(K^2 + J^2) g_0} \left[B(g_1 K - g_2 J) + C(g_1 J + g_2 K) \right] - BR_2 - CI_2 \\ \bar{S}_2(K, J, \theta_s, B, C) &= \frac{\pi g_3}{g_0} \\ (K &= K_1, J = J_1, B = R_p(\omega_1), C = I_p(\omega_1)) \end{aligned} \quad (71)$$

また、 $\bar{C}_2'$ 、 $\bar{S}_2'$ は上式において、 $K=K_2$ 、 $J=J_2$ 、 $\omega_1=\omega_2$ とおきかえる。 R_2 、 I_2 および g_0 、 g_1 などは式 (32)、(33) における K, J を K_1, K_2 および J_1, J_2 におきかえて得られるものである。

ii) $H < \sqrt{B_1 B_2}$

$$\kappa_1 = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2, \quad \kappa_2 = \varepsilon_1 - i\varepsilon_2 \quad (72)$$

$$\varepsilon_1 = \sqrt{(\sqrt{B_1 B_2} + H)/2B_1}, \quad \varepsilon_2 = \sqrt{(\sqrt{B_1 B_2} - H)/2B_1}$$

とにおいて計算すると、式 (65) の右辺は次式となる。

$$\begin{aligned} w_1(x, y) &= \frac{1}{2\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)} \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2} \left[\frac{a_1}{M^2 + \Omega_1^2} + \frac{a_1}{M^2 + \bar{\Omega}_1^2} + \frac{b_1}{M^2 + \Omega_2^2} + \frac{b_1}{M^2 + \bar{\Omega}_2^2} \right] \\ &\quad \sin mx \sin ny \sin mu \sin nv \\ w_2(x, y) &= \frac{-1}{2\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)} \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{M}{N^3 h} \left[\frac{\varepsilon_1 - i\varepsilon_2}{M^2 + \Omega_1^2} + \frac{\varepsilon_1 + i\varepsilon_2}{M^2 + \bar{\Omega}_1^2} - \frac{\varepsilon_1 + i\varepsilon_2}{M^2 + \Omega_2^2} - \frac{\varepsilon_1 - i\varepsilon_2}{M^2 + \bar{\Omega}_2^2} \right] \\ &\quad \cos mx \cos ny \sin mu \sin nv \end{aligned} \quad (73)$$

ここで

$$\begin{aligned} a_1 &= -s_0 \varepsilon_1 + i \{c_0 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + s_0 \varepsilon_2\} \\ b_1 &= s_0 \varepsilon_1 - i \{c_0 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) - s_0 \varepsilon_2\} \\ \Omega_1 &= \omega_1 hN = hN \{c_0 \varepsilon_1 + i(s_0 + c_0 \varepsilon_2)\} \\ &\equiv K_1 + iJ_1 \\ \Omega_2 &= \omega_2 hN = hN \{c_0 \varepsilon_1 + i(s_0 - c_0 \varepsilon_2)\} \\ &\equiv K_2 + iJ_2 \end{aligned} \quad (74)$$

上式を単一級数で表わすと次のようになる。

$$\begin{aligned} w_p(x, y) / \frac{Pabc_0}{2\pi^4 B_1} &= \frac{1}{2\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)} \left[-\sum_{s=1}^2 \sum_{N=1}^{\infty} (-1)^s \frac{1}{N^2} (\bar{C}_2 + \bar{C}_2') \sin nv \sin ny + \sum_{s=1}^2 \sum_{N=1}^{\infty} \lambda_s \frac{1}{N^3 h} (\bar{S}_2 - \bar{S}_2') \sin nv \cos ny \right] \end{aligned} \quad (75)$$

ここで

$$\bar{S}_2\{K, J, \theta_s, B, C\} = \pi (Bg_4 + Cg_3)/g_0 \quad (76)$$

$$B = R_p\{\varepsilon_1 + i(-\varepsilon_2)\}, \quad C = I_p\{\varepsilon_1 + i(-\varepsilon_2)\}$$

$$K = K_1, \quad J = J_1$$

他の $\bar{S}_2'$, $\bar{C}_2$ および $\bar{C}_2'$ についても同様に得られる。

7. 結 言

未定係数を定める連立方程式中の k および q, q' の値を境界条件に応じて適宜に決めることにより、種々の境界条件を持った直交異方性平行四辺形板の解が電子計算機により容易に計算されることになる。 $\bar{N}$ および $\bar{M}$ は解の収束具合により決められるが、どちらか一つが決まれば、他の一つは平行四辺形の辺長比と境界条件を目安として決める

ことができる。数値計算例は他の機会に発表する。

終りに、本研究に関して種々の御指導をいただいた北海道大学の酒井教授ならびに芳村助教授に心から感謝する次第であります。

参 考 文 献

- 1) K. Okamoto: The Solution of the Skewed Plate, Transaction of JSCE, No. 77, 1961.
- 2) P. M. Quinlan: The λ -method for skew Plates, 4th U. S. Natl. Cong of Appl. Mech., 1962.
- 3) K. Girkmann: Flächentragwerke, Wien-Springer-Verlag. 1963.