

## 曲線折板による「 $\Gamma$ 」形曲線桁の解法

正員 能 町 純 雄\*  
 正員 松 岡 健 一\*\*  
 学生員 ○吉 田 紘 一\*\*\*

### 1. 序 言

曲線薄肉断面桁について、一般には変形後も断面形は変化しないという仮定に立って解析されており、断面の変形も考慮しての解析は興味のある問題である。ここでは、曲線開断面について、二主桁がラーメン剛性によって断面形を保つ場合をとりあげ検討する。

解析方法は、各帯板について「変位せん断方程式」と名付けたせん断力と変形の二次元応力の関係式を用いることによって断面形の変形も考慮して解く方法を適用した。先ず、曲線桁の各部材について、「曲率のある帯板の変位せん断方程式」及び「扇形帯板の変位せん断方程式」を誘導し、各帯板の節点で力のつり合式により各変位を関係づけて応力計算を遂行する。

### 2. 曲率のある帯板の変位せん断方程式

今、曲率のある矩形帯板部材について、図-1 のように座標  $r, \theta, z$  をとり、それぞれの方向の変位を  $u, v, w$  とする。 $\theta, z$  方向の法線断面力を  $p_\theta, p_z$ 、又  $\theta z$  方向のせん断力を  $q_{\theta z}, q_{z\theta}$  とし、 $r\theta$  方向のせん断力を無視すると力のつり合は、

$$\frac{\partial p_z}{\partial z} + \frac{q'_{\theta z}}{r} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{p'_\theta}{r} + \frac{\partial q_{\theta z}}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial q_{rz}}{\partial z} + \frac{p_\theta}{r} = 0 \quad (3)$$

歪と各力の関係は

$$p_\theta = \frac{Et}{1-\nu^2} \left( \epsilon_\theta + \nu \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (4)$$

$$p_z = \frac{Et}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \nu \epsilon_\theta \right) \quad (5)$$

$$q_{\theta z} = Gt \left( w' + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (6)$$

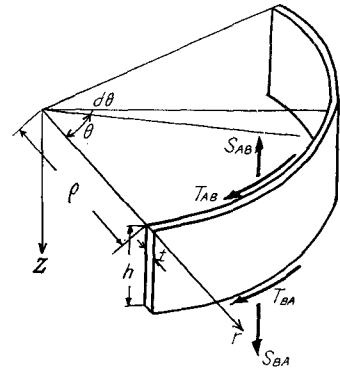


図-1

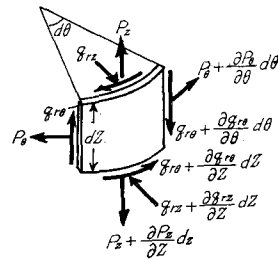


図-2

ただし、' は  $\theta$  についての一度微分を表わす。

$$\epsilon_\theta = v'/r + u/r$$

変位  $v$  については平面保持を仮定し、 $u, w$  については深さ方向に一次変化すると仮定すると

$$u = u_B z/h + u_A (h-z)/h \quad (7)$$

$$v = v_B z/h + v_A (h-z)/h \quad (8)$$

$$w = w_B z/h + w_A (h-z)/h \quad (9)$$

$$\epsilon_\theta = \epsilon_A z/h + \epsilon_B (h-z)/h \quad (10)$$

ただし、 $\epsilon_A = v'_A/r + u_A/r$ 、 $\epsilon_B = v'_B/r + u_B/r$

式(4)に(10)を代入し  $z=0$  で  $q'_{\theta z} = T'_{AB}$  なる境界条件

\* 室蘭工業大学 教授 工博

\*\* 室蘭工業大学 助教授 工修

\*\*\* 室蘭工業大学大学院

を考慮して、 $z$  について積分すると

$$q_{\theta z} = -\frac{Et}{1-\nu^2} \frac{1}{r} \left( \bar{\varepsilon}_B \frac{z^2}{2h} + \bar{\varepsilon}_A \frac{2hz-z^2}{2h} + \nu \frac{\ddot{w}_B - \ddot{w}_A}{h} z \right) + T'_{AB} \quad (11)$$

また、 $z=h$  で  $q_{\theta z} = -T'_{BA}$  であるから

$$T'_{AB} + T'_{BA} = \frac{Eth}{2(1-\nu^2)} \frac{1}{r} \left( \bar{\varepsilon}_B + \bar{\varepsilon}_A + 2\nu \frac{\ddot{w}_B - \ddot{w}_A}{h} \right) \quad (12)$$

式(1)に(11)を代入し、 $z=0$  で  $p_z = S_{AB}$ 、 $z=h$  で  $p_z = S_{BA}$  を考えて、0 から  $h$  まで積分すると

$$\frac{T'_{AB}}{r} = \frac{Eth}{6(1-\nu^2)} \frac{1}{r^2} \left( 2\bar{\varepsilon}_A + \bar{\varepsilon}_B + 3\nu \frac{\ddot{w}_B - \ddot{w}_A}{h} \right) + \frac{S_{AB} - S_{BA}}{h} \quad (13)$$

(12) 式、(13) 式より

$$\frac{T'_{BA}}{r} = \frac{Eth}{6(1-\nu^2)} \frac{1}{r^2} \left( 2\bar{\varepsilon}_B + \bar{\varepsilon}_A + 3\nu \frac{\ddot{w}_B - \ddot{w}_A}{h} \right) + \frac{S_{BA} - S_{AB}}{h} \quad (14)$$

変位と  $S$  との関係式は(6)式に(8)、(9)式を用いて(2)式に代入し、0 から  $h$  まで積分して

$$S_{BA} - S_{AB} = -\frac{Gth}{r^2} \left( \frac{\ddot{w}_B + \ddot{w}_A}{2} + r \frac{v'_B - v'_A}{h} \right)$$

$\varepsilon_\theta$  を用いると

$$S_{AB} - S_{BA} = Gth \left( \frac{\ddot{w}_B + \ddot{w}_A}{2r^2} - \frac{u_B - u_A}{rh} + \frac{\varepsilon_B - \varepsilon_A}{h} \right) \quad (15)$$

(5) 式に(9)、(10)式を代入して  $S_{AB} + S_{BA}$  を求めると

$$S_{AB} + S_{BA} = \frac{Et}{1-\nu^2} \left\{ 2 \frac{w_B - w_A}{h} + \nu (\varepsilon_A + \varepsilon_B) \right\} \quad (16)$$

### 3. 扇形帯板の変位せん断方程式

部材幅  $b$  の扇形帯板について  $r, \theta$  の座標を図-3 のようにとり、それぞれの方向の変位  $u, v$  をとする。又  $r, \theta$  方向の法線断面力を  $p_r, p_\theta$ 、せん断力を  $q$  とする力のつり合の方程式は

$$p'_\theta + \frac{\partial(r^2 q)}{r \partial r} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial(r p_r)}{\partial r} + q' - p_\theta = 0 \quad (18)$$

また

$$p_\theta = \frac{Et}{1-\nu^2} \left( \varepsilon_\theta + \nu \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (19)$$

$$p_r = \frac{Et}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \varepsilon_\theta \right) \quad (20)$$

$$q = Gt \left( \frac{u'}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \quad (21)$$

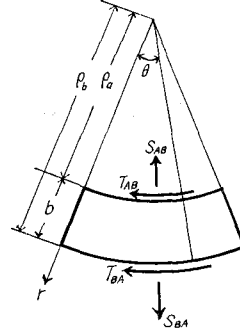


図-3

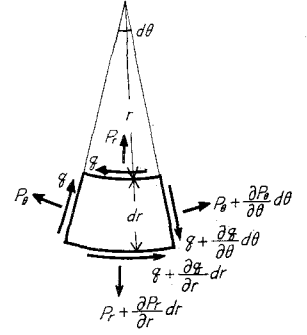


図-4

変位を(22)、(23)式のように仮定すると、歪  $\varepsilon_\theta$  は  $r$  方向に直線分布となる

$$\frac{v}{r} = v_B \frac{r - \rho_a}{\rho_b b} + v_A \frac{\rho_b - r}{\rho_a b} \quad (22)$$

$$\frac{u}{r} = u_B \frac{r - \rho_a}{\rho_b b} + u_A \frac{\rho_b - r}{\rho_a b} \quad (23)$$

$$\varepsilon_\theta = v'/r + u/r = \varepsilon_B (r - \rho_a)/b + \varepsilon_A (\rho_b - r)/b \quad (24)$$

式(19)に(23)、(24)式を代入し、(17)式に用いて  $r = \rho_a$  で  $q = T_{AB}$  を考慮し  $r$  について積分すると

$$\begin{aligned} r^2 q = & -\frac{Et}{1-\nu^2} \frac{1}{6b} \left[ \varepsilon'_B \left\{ 2(r^3 - \rho_a^3) - 3\rho_a(r^2 - \rho_a^2) \right\} \right. \\ & + \varepsilon'_A \left\{ 3\rho_b(r^2 - \rho_a^2) - 2(r^3 - \rho_a^3) \right\} \\ & + \nu \left\{ u'_B \frac{4(r^3 - \rho_a^3) - 3\rho_a(r^2 - \rho_a^2)}{\rho_b} \right. \\ & \left. \left. + u'_A \frac{3\rho_b(r^2 - \rho_a^2) - 4(r^3 - \rho_a^3)}{\rho_a} \right\} \right] + \rho_a^2 T_{AB} \end{aligned} \quad (25)$$

また、 $r = \rho_b$  で  $q = -T_{BA}$  である故

$$\begin{aligned} \rho_a^2 T_{AB} + \rho_b^2 T_{BA} = & \frac{Et}{1-\nu^2} \frac{1}{6b} \left[ \varepsilon'_B b^2 (2\rho_b + \rho_a) \right. \\ & + \varepsilon'_A b^2 (\rho_b + 2\rho_a) + \nu \left\{ u'_B \frac{b}{\rho_b} (4\rho_b^2 + \rho_a \rho_b + \rho_a^2) \right. \\ & \left. \left. - u'_A \frac{b}{\rho_a} (4\rho_a^2 + \rho_b \rho_a + \rho_b^2) \right\} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

式(18)に(19)、(25)式を代入し、 $r = \rho_a$  で  $p_r = S_{AB}$ 、 $r = \rho_b$  で  $S_{BA}$  を考慮し、 $\rho_a$  から  $\rho_b$  まで積分して、次のような変位せん断方程式を得る。

$$\begin{aligned} \rho_a T'_{AB} = & \frac{Eth}{6(1-\nu^2)} \left[ 2\bar{\varepsilon}_A + \bar{\varepsilon}_B + \nu \left\{ \bar{u}_B \frac{3\rho_b - b}{\rho_b} \right. \right. \\ & \left. \left. - \bar{u}_A \frac{3\rho_a - b}{\rho_a} \right\} \frac{1}{b} \right] + \frac{Et}{1-\nu^2} \frac{\rho_b}{b} \left\{ \frac{b}{2} (\varepsilon_A + \varepsilon_B) \right. \\ & \left. + \nu (u_B - u_A) \right\} + \frac{\rho_b (\rho_b S_{BA} - \rho_a S_{AB})}{b} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \rho_b T'_{BA} = & \frac{Eth}{6(1-\nu^2)} \left[ 2\bar{\varepsilon}_B + \bar{\varepsilon}_A + \nu \left\{ \bar{u}_B \frac{3\rho_b + b}{\rho_b} \right. \right. \\ & \left. \left. - \bar{u}_A \frac{3\rho_a + b}{\rho_a} \right\} \frac{1}{b} \right] - \frac{Et}{1-\nu^2} \frac{\rho_a}{b} \left\{ \frac{b}{2} (\varepsilon_A + \varepsilon_B) \right. \end{aligned}$$

$$+\nu(u_B-u_A)\Big\}+\frac{\rho_a(\rho_b S_{BA}-\rho_a S_{AB})}{b} \quad (28)$$

(20), (21) 式を(18)式に代入し,  $\rho_a$  から  $\rho_b$  まで積分すると, 変位と  $S$  の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \rho_a S_{AB}-\rho_b S_{BA} &= Gt \left\{ \frac{b}{2} \left( \frac{\ddot{u}_B}{\rho_b} + \frac{\ddot{u}_A}{\rho_a} \right) \right. \\ &+ \frac{\rho_a+\rho_b}{2} \left( \varepsilon_B-\varepsilon_A - \frac{u_B}{\rho_b} + \frac{u_A}{\rho_a} \right) \Big\} \\ &- \frac{Et}{1-\nu^2} \left\{ \frac{b}{2} (\varepsilon_B+\varepsilon_A) + \nu(u_B-u_A) \right\} \quad (29) \end{aligned}$$

また(20)式に(23), (24)を代入して  $\rho_a S_{AB}+\rho_b S_{BA}$  を作ると

$$\begin{aligned} \rho_a S_{AB}+\rho_b S_{BA} &= \frac{Et}{1-\nu^2} \left\{ \left( u_B \frac{\rho_a^2+\rho_b^2+\rho_b b}{\rho_b} \right. \right. \\ &- u_A \frac{\rho_a^2+\rho_b^2-\rho_a b}{\rho_a} \Big) \cdot \frac{1}{b} + \nu(\rho_a \varepsilon_A + \rho_b \varepsilon_B) \Big\} \end{aligned}$$

#### 4. 節点モーメント及びせん断力

断面変形に抵抗する力としての節点モーメントは, タワミ角公式を用いるが, 曲率のある帯板では,  $\theta$  方向力の半径方向分力が生じるので, これを荷重として考えることとする(図-5, 6)。又 St. Venant のねじれの項もこれに加える。

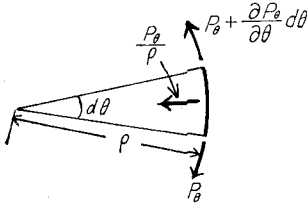


図-5

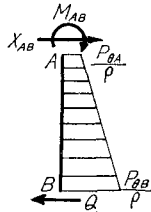


図-6

##### a) 曲率のある帯板 (一辺が自由辺の場合)

$$M_{AB} = -\frac{p_{\theta A}+2p_{\theta B}}{6\rho} \cdot h^2 - GJ \left( \frac{\dot{\varphi}}{\rho^2} - \frac{\ddot{v}}{\rho^3} \right) - Qh \quad (31)$$

$$M_{AB} = 3k_{AB}(\beta_a - \varphi) - \frac{8p_{\theta A}-7p_{\theta B}}{120\rho} \cdot h^2 \quad (32)$$

$$X_{AB} = \frac{(p_{\theta A}+p_{\theta B}) \cdot h}{2\rho} + Q \quad (33)$$

ただし  $\varphi = (u_A - u_B)/h$

$\beta_a$ : 節点 A の回転角

$Q$ : B 端に作用する外力

##### b) 扇形帯板

$$M_{AB} = 2k_{AB}(2\beta_a + \beta_b - 3\varphi) \quad (34-1)$$

$$M_{BA} = 2k_{AB}(2\beta_b + \beta_a - 3\varphi) \quad (34-2)$$

せん断力は扇形の影響を考慮して

$$\begin{aligned} \rho_a X_{AB} &= \rho_b X_{BA} = -\frac{1}{b} \left\{ \rho_a M_{AB} + \rho_b M_{BA} \right. \\ &+ GJ \left( \frac{\dot{\varphi}}{\rho} - \frac{\ddot{v}_A + \ddot{v}_B}{2\rho^2} \right) \Big\} \quad (35) \end{aligned}$$

ただし,  $J$ : St. Venant のねじれ定数,  $k_{AB}$ : 部材剛度  
 $\varphi = (w_B - w_A)/b$

#### 5. 二主桁曲線開断面の場合

図-7 のような断面で  $A'$ ,  $B'$  にそれぞれ断面積  $F$  の幅のある曲線桁に変位せん断方程式を適用してみる。ここでは簡単のために部材の深さ方向では, その方向の変位の変化はないとする桁理論の仮定を用いる。

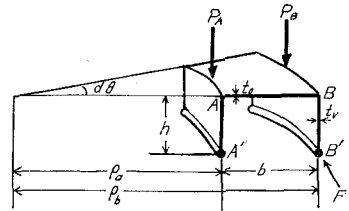


図-7

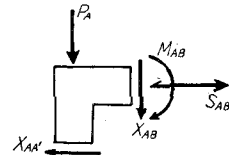


図-8

##### A) 各力の節点でのつり合

せん断力のつり合

$$T'_{AB} + T'_{AA'} = 0 \quad (36-1)$$

$$T'_{BA} + T'_{BB'} = 0 \quad (36-2)$$

$$\rho_a T'_{A'A} + E \cdot F \varepsilon_{A'} = 0 \quad (36-3)$$

$$\rho_b T'_{B'B} + E \cdot F \varepsilon_{B'} = 0 \quad (36-4)$$

水平方向力のつり合

$$S_{AB} - X_{AA'} = 0 \quad (37-1)$$

$$S_{BA} + X_{BB'} = 0 \quad (37-2)$$

鉛直方向力のつり合

$$S_{AA'} + X_{AB} + P_A = 0 \quad (38-1)$$

$$S_{BB'} - X_{BA} + P_B = 0 \quad (38-2)$$

$$S_{A'A} = 0 \quad S_{B'B} = 0 \quad (38-3, 4)$$

節点モーメントのつり合

$$M_{AA'} + M_{AB} = 0 \quad (39-1)$$

$$M_{BB'} + M_{BA} = 0 \quad (39-2)$$

## B) せん断力

(36)の各式に(13), (14)で $w$ —一定, (27), (28)で $u$ —一定の条件を入れて代入すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}(N_v+N_{AB})\varepsilon_A + \frac{N_{AB}}{6}\varepsilon_B + \frac{N_v}{6}\varepsilon_{A'} \\ & + \frac{N_{AB}}{b}\frac{\rho_b}{2}(\varepsilon_A+\varepsilon_B) + \rho_a^2\frac{S_{AA'}-S_{A'A}}{h} \\ & + \rho_a\frac{\rho_a S_{AB}-\rho_b S_{BA}}{b} = 0 \end{aligned} \quad (40-1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}(N_v+N_{AB})\varepsilon_B + \frac{N_{AB}}{6}\varepsilon_A + \frac{N_v}{6}\varepsilon_{B'} \\ & - \frac{N_{AB}}{b}\frac{\rho_a}{2}(\varepsilon_A+\varepsilon_B) + \rho_b^2\frac{S_{BB'}-S_{B'B}}{h} \\ & + \rho_b\frac{\rho_b S_{AB}-\rho_a S_{BA}}{b} = 0 \end{aligned} \quad (40-2)$$

$$\frac{N_v}{6}(2\varepsilon_{A'}+\varepsilon_A)+f\varepsilon_{A'}+\rho_a^2\frac{S_{A'A}-S_{AA'}}{h}=0 \quad (40-3)$$

$$\frac{N_v}{6}(2\varepsilon_{B'}+\varepsilon_B)+f\varepsilon_{B'}+\rho_b^2\frac{S_{B'B}-S_{BB'}}{h}=0 \quad (40-4)$$

ただし,  $N_v = \frac{Et_v h}{6(1-\nu^2)}$ ,  $N_{AB} = \frac{Et_0 b}{6(1-\nu^2)}$ ,  $f = EF$

式(39)に, (33)を $Q=f\varepsilon/\rho$ とおいて用いると

$$S_{AB} = X_{AA'} = \frac{N_v(\varepsilon_A+\varepsilon_{A'})}{2\rho_a} + f\frac{\varepsilon_{A'}}{\rho_a} \quad (41-1)$$

$$S_{BA} = -X_{BB'} = -\frac{N_v(\varepsilon_B+\varepsilon_{B'})}{2\rho_b} - f\frac{\varepsilon_{B'}}{\rho_b} \quad (41-2)$$

ここで

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= (\varepsilon_A+\varepsilon_B)/2, & \varepsilon_u &= (\varepsilon_{A'}+\varepsilon_{B'})/2 \\ \varepsilon_w &= (\varepsilon_A-\varepsilon_B)/2, & \varepsilon_{w'} &= (\varepsilon_{A'}-\varepsilon_{B'})/2 \end{aligned}$$

において(40)の(1)と(3)より $S_{A'A}-S_{B'B}$ , (2)と(4)より $S_{B'B}-S_{BB'}$ を消去し(41)を代入し, 両式の和を作り整理すると

$$\varepsilon_u = -\frac{N_{AB}+N_v}{N_v+2f}\varepsilon_0 \quad (42)$$

又両式の差を作り(42)を用いて整理すると

$$\varepsilon_{w'} = -\frac{N_{AB}+3N_v}{3N_v+6f}\varepsilon_w \quad (43)$$

次に, (38)式の $X$ は(35)式に(39)を用いて, (31)式を代入し $\varepsilon_0$ を用いて整理すると

$$\begin{aligned} \rho_a X_{AB} = \rho_b X_{BA} &= \frac{1}{b}\left\{\frac{h}{3}\left(N_v+2N_{AB}+2f\right)\right. \\ &\times \frac{N_{AB}+N_v}{N_v+2f}\varepsilon_0 - GJ_v\left(\frac{\ddot{\varphi}_a}{\rho_a} + \frac{\ddot{\varphi}_b}{\rho_b} - \frac{\ddot{w}_A}{\rho_a^2} \right. \\ &\left. \left. - \frac{\ddot{w}_B}{\rho_b^2}\right) - GJ_{AB}\frac{\rho_a\ddot{w}_B-\rho_b\ddot{w}_A}{\rho^2 b}\right\} \end{aligned} \quad (44)$$

ただし,  $\rho = (\rho_a + \rho_b)/2$

(38)式に(44)を用いて, (40-3), (40-4)の両式に代入し, この式の和及び差をとると

$$\begin{aligned} & -\frac{h}{3}\left(N_v+3N_{AB}+2f\frac{N_{AB}+N_v}{N_v+2f}\right)(\varepsilon_0+\varepsilon_0) \\ & + GJ_v\left(\frac{\ddot{\varphi}_a}{\rho_a} + \frac{\ddot{\varphi}_b}{\rho_b} - \frac{\ddot{w}_A}{\rho_a^2} - \frac{\ddot{w}_B}{\rho_b^2}\right) \\ & - GJ_{AB}\frac{\rho_a\ddot{w}_B-\rho_b\ddot{w}_A}{\rho^2 b} + \rho_a^2 P_A + \rho_b^2 P_B = 0 \quad (45) \\ & -\frac{bh}{6}\left(N_v+\frac{2}{3}N_{AB}+2f\frac{N_{AB}+3N_v}{3N_v+6f}\right)\varepsilon_w \\ & + \frac{\rho\cdot h}{3}\left(N_v+2N_{AB}+2f\frac{N_{AB}+N_v}{N_v+2f}\right)\varepsilon_0 \\ & - G\cdot\rho\left\{J_v\left(\frac{\ddot{\varphi}_a}{\rho_a} + \frac{\ddot{\varphi}_b}{\rho_b} - \frac{\ddot{w}_A}{\rho_a^2} - \frac{\ddot{w}_B}{\rho_b^2}\right)\right. \\ & \left. + J_{AB}\frac{\rho_a\ddot{w}_A-\rho_b\ddot{w}_B}{\rho^2 b}\right\} - \frac{b}{2}(\rho_b^2 P_B - \rho_a^2 P_A) = 0 \quad (46) \end{aligned}$$

## C) 変位の式

変位は(16), (28)式でそれぞれ $w$ —一定,  $u$ —一定であるから

$$S_{AA'}-S_{A'A} = Gt_v h\left\{\frac{\ddot{w}_A}{\rho_a^2} + \frac{\varphi_a}{\rho_a} + \frac{\varepsilon_{A'}-\varepsilon_A}{h}\right\} \quad (47-1)$$

$$S_{BB'}-S_{B'B} = Gt_v h\left\{\frac{\ddot{w}_B}{\rho_b^2} + \frac{\varphi_b}{\rho_b} + \frac{\varepsilon_{B'}-\varepsilon_B}{h}\right\} \quad (47-2)$$

$$\begin{aligned} \rho_a S_{AB}-\rho_b S_{BA} &= Gt_0 b\left\{(\ddot{u}_0+u_0)/\rho - \rho(\varepsilon_{A'}-\varepsilon_B)/b\right\} \\ &+ N_{AB}(\varepsilon_A+\varepsilon_B)/2 \end{aligned} \quad (48)$$

式(47-1), (47-2)の和及び差に(38), (44)を代入し, 整理すると

$$\begin{aligned} & \left\{\frac{h}{3}\left(N_v+2N_{AB}+2f\frac{N_{AB}+N_v}{N_v+2f}\right)\frac{1}{\rho^2} - 2Gt_v h\right. \\ & \times \left(2+\frac{N_{AB}-2f}{N_v+2f}\right)\varepsilon_0 - \frac{1}{\rho^2}\left\{GJ_v\left(\frac{\ddot{\varphi}_a}{\rho_a} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\ddot{\varphi}_b}{\rho_b} - \frac{\ddot{w}_A}{\rho_a^2} - \frac{\ddot{w}_B}{\rho_b^2}\right) + GJ_{AB} \right. \\ & \left. \times \frac{\rho_a\ddot{w}_B-\rho_b\ddot{w}_A}{\rho^2 b}\right\} + Gt_v h\left(\frac{\ddot{w}_A}{\rho_a^2} + \frac{\ddot{w}_B}{\rho_b^2} \right. \\ & \left. + \frac{\varphi_a}{\rho_a} + \frac{\varphi_b}{\rho_b}\right) + P_A + P_B = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{h}{3}\left(N_v+2N_{AB}+2f\frac{N_{AB}+N_v}{N_v+2f}\right)\varepsilon_0 + Gt_v b \\ & \times \left(2+\frac{N_{AB}-6f}{3N_v+6f}\right)\varepsilon_w + \frac{1}{\rho}\left\{GJ_v\left(\frac{\ddot{\varphi}_a}{\rho_a} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\ddot{\varphi}_b}{\rho_b} - \frac{\ddot{w}_A}{\rho_a^2} - \frac{\ddot{w}_B}{\rho_b^2}\right) + GJ_{AB} \right. \\ & \left. \times \frac{\rho_a\ddot{w}_B-\rho_b\ddot{w}_A}{\rho^2 b}\right\} - \frac{Gt_v bh}{2}\left\{\frac{\ddot{w}_A}{\rho_a^2} - \frac{\ddot{w}_B}{\rho_b^2} \right. \\ & \left. + \frac{\varphi_a}{\rho_a} - \frac{\varphi_b}{\rho_b}\right\} + \frac{b}{2}(P_B-P_A) = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

式(48)に(41)を用い(43)を考慮すると

$$\varepsilon_w = \frac{b}{2\rho^2}(\ddot{u}_0+u_0) \quad (51)$$

#### D) 節点モーメント

式(39)に(32), (34)を用いて

$$(4k_{AB}+3k_v)\beta_a+2k_{AB}\beta_b-3k_v\varphi_a-6k_{AB}\frac{w_B-w_A}{b}-N_v\cdot h\frac{8\varepsilon_A'+7\varepsilon_{A'}}{120\rho_a}=0 \quad (52-1)$$

$$(4k_{AB}+3k_v)\beta_b+2k_{AB}\beta_a-3k_v\varphi_b-6k_{AB}\frac{w_B-w_A}{b}-N_v\cdot h\frac{8\varepsilon_B'+7\varepsilon_{B'}}{120\rho_b}=0 \quad (52-2)$$

式(39)に(31), (32)を用いて, それぞれ  $\rho_a, \rho_b$  を乗じると

$$3k_v\rho_a(\beta_a-\varphi_a)+N_vh(4\varepsilon_A+11\varepsilon_{A'})/40+f h\varepsilon_{A'}+GJ_v(\ddot{\varphi}_a/\rho_a-\ddot{w}_A/\rho_a^2)=0 \quad (53-1)$$

$$3k_v\rho_b(\beta_b-\varphi_b)+N_vh(4\varepsilon_B+11\varepsilon_{B'})/40+f h\varepsilon_{B'}+GJ_v(\ddot{\varphi}_b/\rho_b-\ddot{w}_B/\rho_b^2)=0 \quad (53-2)$$

式(52-1)・ $\rho_a$ , (52-2)・ $\rho_b$  の和と差より

$$\left\{k_{AB}\left(6-\frac{b}{\rho}\right)+k_v\frac{\rho_a}{\rho}\right\}\beta_a+\left\{k_{AB}\left(6+\frac{b}{\rho}\right)+3k_v\frac{\rho_b}{\rho}\right\}\beta_b-12k_{AB}\frac{w_B-w_A}{b}-3k_v\left(\frac{\rho_a}{\rho}\varphi_a+\frac{\rho_b}{\rho}\varphi_b\right)+\frac{hN_v}{60}\times\left(7\frac{N_{AB}-2f}{N_v+2f}-1\right)\varepsilon_0=0 \quad (54)$$

$$\left\{k_{AB}\left(2-3\frac{b}{\rho}\right)+3k_v\frac{\rho_b}{\rho}\right\}\beta_a-\left\{k_{AB}\left(2+3\frac{b}{\rho}\right)+3k_v\frac{\rho_b}{\rho}\right\}\beta_b-3k_v\left(\frac{\rho_a}{\rho}\varphi_a-\frac{\rho_b}{\rho}\varphi_b\right)+6k_{AB}\frac{w_B-w_A}{\rho}+\frac{N_vh}{60}\left(7\frac{N_{AB}-6f}{3N_v+6f}-1\right)\varepsilon_w=0 \quad (55)$$

(53-1), (53-2) の和と差より

$$3k_v(\rho_a\beta_a+\rho_b\beta_b)-3k_v(\rho_a\varphi_a+\rho_b\varphi_b)+GJ_v\left(\frac{\ddot{\varphi}_a}{\rho_a}+\frac{\ddot{\varphi}_b}{\rho_b}\right)-GJ_v\left(\frac{\ddot{w}_A}{\rho_a^2}+\frac{\ddot{w}_B}{\rho_b^2}\right)-\frac{h}{20}\left(7N_v+11N_{AB}+18f\frac{N_{AB}+N_v}{N_v+2f}\right)\times\varepsilon_0=0 \quad (56)$$

$$3k_v(\rho_a\beta_a-\rho_b\beta_b)-3k_v(\rho_a\varphi_a-\rho_b\varphi_b)+GJ_v\left(\frac{\ddot{\varphi}_a}{\rho_a}-\frac{\ddot{\varphi}_b}{\rho_b}\right)-GJ_v\left(\frac{\ddot{w}_A}{\rho_a^2}-\frac{\ddot{w}_B}{\rho_b^2}\right)-\frac{h}{20}\left(7N_v+\frac{11}{3}N_{AB}+18f\frac{3N_v+N_{AB}}{3N_v+2f}\right)\times\varepsilon_w=0 \quad (57)$$

以上  $\varepsilon_0, \varepsilon_w, w_A, w_B, \varphi_a, \varphi_b, \beta_a, \beta_b$  の8個の未知数に対して(45), (46), (49), (50), (54), (55), (56), (57)の8方程式  $u_0$  に対して(51)の方程式が成立する。これらの式を連立に解くことになるが, 各未知数及び荷重をフーリエ級数に展開することによって, 各フーリエ係数の8元連立方程式を

解き, 未知量を求める事ができる。

#### 6. 数値計算

以上の結果を用いて数値計算を行なった。計算例として図-9に示されるようなコンクリート断面を用いた。又, 境界条件として両端で単純支持され, 軸方向には自由に變形でき, かつ両端で断面は不変であるとする。

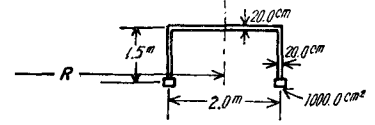


図-9

支間長  $l=30.0$  m

弾性係数  $E=3.0\times 10^5$  kg/cm<sup>2</sup>

ポアソン比  $\nu=0.2$ ,  $c$ : 荷重位置

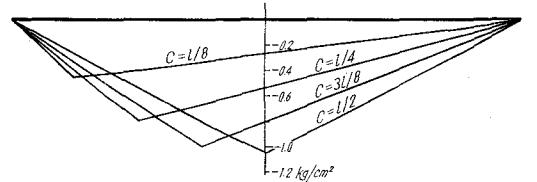


図-10(a) 曲げ応力  $(\sigma_A+\sigma_E)/2$  Case 1 ( $R=60.0$  m)

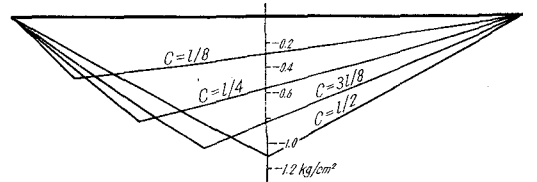


図-10(b) 曲げ応力  $(\sigma_A+\sigma_E)/2$  Case 1 ( $R=60.0$  m)

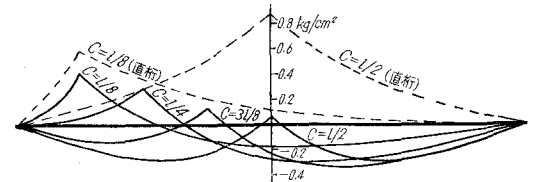


図-11(a) そり応力  $(\sigma_B-\sigma_A)/2$  Case 1 ( $R=60.0$  m)

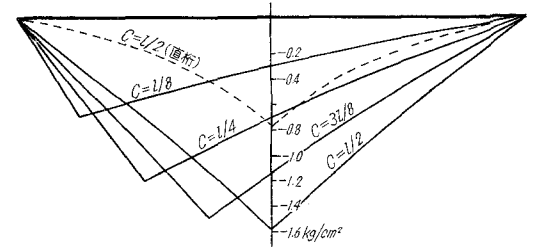


図-11(b) そり応力  $(\sigma_B-\sigma_A)/2$  Case 2 ( $R=60.0$  m)

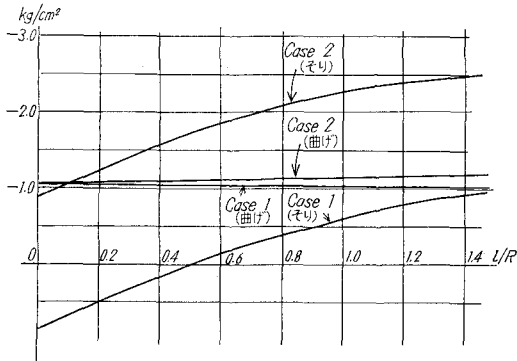


図-12 曲げ応力  $(\sigma_A + \sigma_B)/2$ , そり応力  $(\sigma_B - \sigma_A)/2$

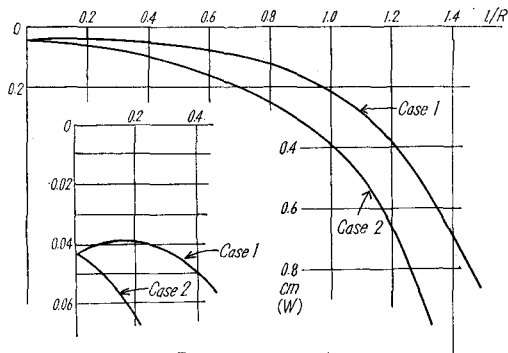


図-13 タワミ (w)

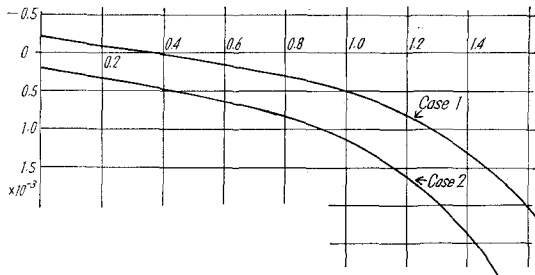


図-14 床板回転角  $(w_b - w_a)/b$

計算には室蘭工大計算機室の FACOM-231 を用い、フーリエ級数は 30 項までとった。

荷重は Case 1 では  $P=1$  ton を桁の内側に、Case 2 は  $P=1$  ton を桁の外側に载荷した場合である。

## 6. 結 言

以上の数値計算結果を見るに、図-10 は  $L/R=0.5$  の場合の曲げ応力で、これは直桁の場合と大差ない。図-11 は同じく、そり応力で Case 1 の場合、桁が外側にねじれる傾向があるため、直桁の場合に比べ小さな値を示す。又、この傾向は支間中央に荷重のある場合ほど著しい。Case 2 の場合も、同様の理由で直桁の場合より、はるかに大きい

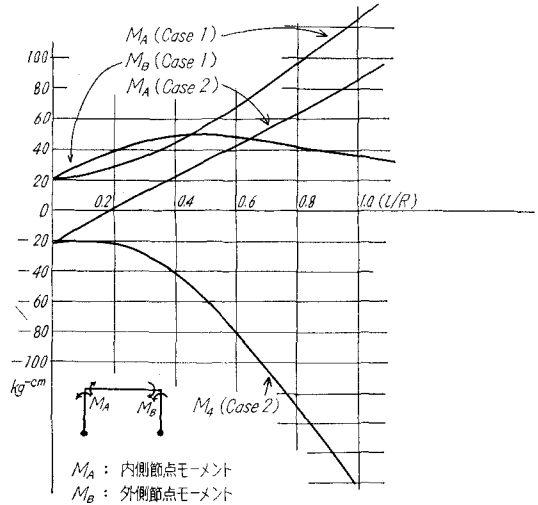


図-15 節点モーメント

そり応力が生じる。

図-12~15 は  $L/R$  の変化に伴う各場合の応力、タワミ、床板の回転角、節点モーメントの変化を示したものである。

そり応力は、Case 1 の場合  $L/R=0.5$  附近で正負が反転する。タワミ、床板の回転角は  $L/R=1.0$  より大になると急速に増加し、又、タワミは  $L/R$  が小さい時、Case 1 の場合直桁より小さい。

内側節点モーメント  $M_A$ 、外側節点モーメント  $M_B$  は、Case 2 では  $L/R=0.5$  を越えると直線的に増加し、 $L/R$  が約 0.7 以上では  $M_A, M_B$  の応力が曲げによる軸方向応力より大きくなる。 $M_A$  の応力は Case 1 の場合も軸方向応力より大きくなり Case 1 と Case 2 の場合では逆向きである。

以上、薄肉開断面曲線桁について、断面変形を考慮しての解析方法と計算結果を示した。この数値計算の結果からは、断面不変としての計算と大きな差は認められなかったが、ただ節点モーメントのみ 3 割程度の差が認められた。

隔壁等の影響も考慮した解法については、今後の研究に待ちたい。

## 参 考 文 献

- 1) 深沢泰晴：薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎理論，土木学会論文集，第 105 号，昭和 39 年 10 月。
- 2) 能町・尾崎・杉野：断面変形を考えた二室箱桁の応力解析について，研究発表会論文集，第 24 号，昭和 43 年，土木学会北海道支部。
- 3) 能町・吉田：断面変形を考慮した曲線箱桁の曲げについて，土木学会第 23 回年次学術講演会，昭和 43 年 10 月。