

箱桁の断面変形が固有振動におよぼす影響

正員 能 町 純 雄*
正員 ○尾 崎 詔**

1. はじめに

さきに、著者らは断面の変形を考慮した箱桁の曲げねじに関する研究結果を発表した^{1~5)}。これらはいずれも、箱桁を構成している各折板要素に対して変位せん断公式とたわみ角公式を設定し、箱桁断面のラーメン剛性を同時に考慮した剛結合折板理論によるものである。

今回、この理論によって箱桁断面の“回転”と“変形”に関する固有振動を検討してみたので、ここに発表する。ただし、断面は最も簡単な二軸対称断面を仮定し、数値計算ではコンクリート橋を想定した。なお、最後にハンチの影響をつけ加えた。

2. 折板要素に関する基本式

図-1に示すような箱桁において、断面を構成している折板要素 AB, AD に対し、図-2のような記号を用いて次の公式が書ける¹⁾。

変位せん断公式

$$\left. \begin{aligned} T_{AB} &= \frac{Eht_1}{6} \left(2 \frac{\partial^2 u_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_B}{\partial x^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{h} \left(\int S_{AB} dx - \int S_{BA} dx \right) \\ T_{AD} &= \frac{Ebt_2}{6} \left(2 \frac{\partial^2 u_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_D}{\partial x^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{b} \left(\int S_{AD} dx - \int S_{DA} dx \right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

たわみ角公式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_A}{\partial x} &= \frac{u_A - u_B}{h} + \frac{1}{Ght_1} \left(\int S_{AB} dx - \int S_{BA} dx \right) \\ \frac{\partial v_A}{\partial x} &= \frac{u_A - u_D}{b} + \frac{1}{Gbt_2} \left(\int S_{AD} dx - \int S_{DA} dx \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

上式中、 u_A, u_B, u_D は、それぞれ A, B, D 点における x 方向の変位、 v_A, w_A は、それぞれ AD, AB 部材の伸び縮みを無視した y および z 方向の変位を表わす。

3. 断面のラーメン剛性に関する基本式

箱桁断面のラーメン剛性を考慮すれば、サンブナシのね

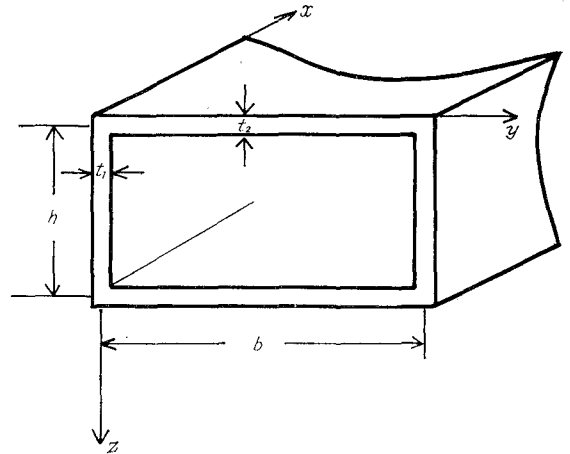


図-1

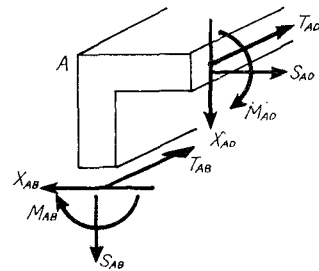


図-2

じりを無視して次の諸式が書ける。

せん断力と曲げモーメント

$$X_{AB} = -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{h}, \quad X_{AD} = -\frac{M_{AD} + M_{DA}}{b} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= Ek_1 (2\varphi_A + \varphi_B - 3\psi_{AB}) \\ M_{AD} &= Ek_2 (2\varphi_A + \varphi_D - 3\psi_{AD}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ただし、

$$k_1 = \frac{\ell_1^3}{6h}, \quad k_2 = \frac{\ell_2^3}{6b} \quad (4)'$$

* 室蘭工業大学 教授 工博

** 室蘭工業大学 助教授 工修

部材回転角

$$\left. \begin{aligned} \psi_{AB} &= \frac{v_A - v_B}{h} \\ \psi_{AD} &= \frac{w_D - w_A}{b} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

さらに、断面のねじれ角を ϕ 、変形度を $\Delta\phi$ とすれば、
図-3 から明かなように、

$$\left. \begin{aligned} \psi_{AB} &= \phi - \frac{\Delta\phi}{2} \\ \psi_{AD} &= \phi + \frac{\Delta\phi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

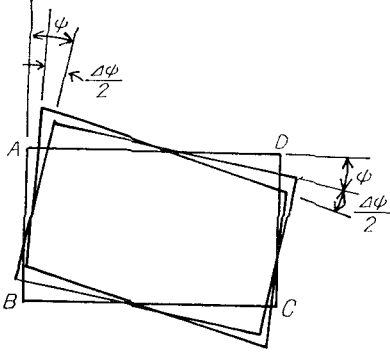


図-3

変形抵抗係数

節点 A における曲げモーメントのつりあい

$$M_{AB} + M_{AD} = 0 \quad (7)$$

に (4) 式を代入し、逆対称性から $\varphi_A = \varphi_B = \varphi_D$ を考慮して、

$$k_1(\varphi_A - \psi_{AB}) + k_2(\varphi_A - \psi_{AD}) = 0 \quad (8)$$

これに (6) 式を代入し、(4)、(3) 式から次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} X_{AB} &= -\frac{6E}{h} \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \Delta\phi \\ X_{AD} &= \frac{6E}{b} \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \Delta\phi \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

いま

$$\zeta = G_0 \cdot \Delta\phi \quad (10)$$

とおけば、図-4 を参照して、せん断力のつりあい

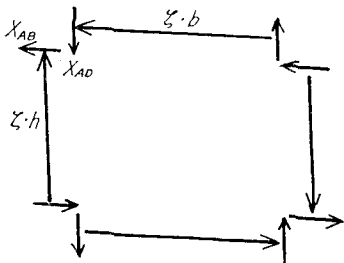


図-4

$$\left. \begin{aligned} 2X_{AB} + b\zeta &= 0 \\ 2X_{AD} - h\zeta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

から

$$G_0 = \frac{12E}{bh} \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad (12)$$

(4)' を代入して

$$G_0 = \frac{2Et__1^3 t_2^3}{bh(t_1^3 b + t_2^3 h)} \quad (12)'$$

となる。

4. 慣性力の導入

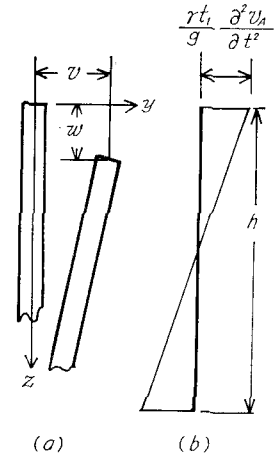
スパン方向に単位長さをとって、折板要素 AB の振動を考えると、単位体積重量を γ とすれば、 z 方向の変位 w により節点 A には、図-5(a) により $-\frac{\gamma t_1 h}{2g} \frac{\partial^2 w_A}{\partial t^2}$ なる慣性力が z 方向に働く。しかるに y 方向の変位 v による端部 A の慣性力は $-\frac{\gamma t_1}{g} \frac{\partial^2 v_A}{\partial t^2}$ であるから、図-5(b) のように直線的に変化するものとすれば、節点 A には、 $-\frac{\gamma t_1 h}{6g} \frac{\partial^2 v_A}{\partial t^2}$ なる大きさの慣性反力が y 方向に作用することになる。

同様のことが、折板要素 AD に対しても成立し、節点 A における y 方向の慣性力は $-\frac{\gamma t_2 b}{2g} \frac{\partial^2 v_A}{\partial t^2}$ 、 z 方向の慣性反力は $-\frac{\gamma t_2 b}{6g} \frac{\partial^2 w_A}{\partial t^2}$ となる。

したがって、節点 A における鉛直方向 (z 方向) の力のつりあい、および水平方向 (y 方向) の力のつりあいは、さきに示した図-2 を参照して、次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} S_{AB} &= \frac{\gamma}{2g} \left(t_1 h + \frac{bt_2}{3} \right) \frac{\partial^2 w_A}{\partial t^2} - X_{AD} \\ S_{AD} &= \frac{\gamma}{2g} \left(t_2 b + \frac{ht_1}{3} \right) \frac{\partial^2 v_A}{\partial t^2} + X_{AB} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

さらに、(5)、(6) 式からえられる $v_A = \frac{h}{2} \left(\phi - \frac{\Delta\phi}{2} \right)$ 、



(a)

(b)

図-5

$w_A = -\frac{b}{2}\left(\phi + \frac{\Delta\phi}{2}\right)$ なる関係を利用し、かつ G_0 を用いて (9) 式を代入すれば、

$$\left. \begin{aligned} S_{AB} &= \frac{-\gamma b h}{4g} \left(t_1 + \frac{bt_2}{3h}\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\gamma b h}{8g} \left(t_1 + \frac{bt_2}{3h}\right) \frac{\partial^2 \Delta\phi}{\partial t^2} - \frac{hG_0}{2} \Delta\phi \\ S_{AD} &= \frac{\gamma b h}{4g} \left(t_2 + \frac{ht_1}{3b}\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\gamma b h}{8g} \left(t_2 + \frac{ht_1}{3b}\right) \frac{\partial^2 \Delta\phi}{\partial t^2} - \frac{bG_0}{2} \Delta\phi \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

5. ねじり振動の方程式

せん断力のつりあい

$$T_{AB} + T_{AD} = 0 \quad (15)$$

に (1) 式を適用し、 $u_A = -u_B = -u_D$, $S_{AB} = -S_{BA}$ なる逆対称性を考慮して次の微分方程式をうる。

$$\frac{E}{6} (ht_1 + bt_2) \frac{\partial^3 u_A}{\partial x^3} + \frac{2S_{AB}}{h} + \frac{2S_{AD}}{b} = 0 \quad (16)$$

一方、(6) 式を (5) 式に代入し、微分して (2) 式とから

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\phi - \frac{\Delta\phi}{2}\right) - \frac{4}{bh} \frac{\partial u_A}{\partial x} - \frac{4S_{AD}}{Gbht_2} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\phi + \frac{\Delta\phi}{2}\right) + \frac{4}{bh} \frac{\partial u_A}{\partial x} + \frac{4S_{AB}}{Gbht_1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

なる式がえられる。これを微分し、(16) 式を代入すれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 \Delta\phi}{2\partial x^4} - \frac{4}{Gbht_2} \frac{\partial^2 S_{AD}}{\partial x^2} + \frac{48}{E(ht_1 + bt_2)} \left(\frac{S_{AB}}{h} + \frac{S_{AD}}{b}\right) &= 0 \\ \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \Delta\phi}{2\partial x^4} + \frac{4}{Gbht_1} \frac{\partial^2 S_{AB}}{\partial x^2} - \frac{48}{E(ht_1 + bt_2)} \left(\frac{S_{AB}}{h} + \frac{S_{AD}}{b}\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

さきに求めた (14) 式の S_{AB} , S_{AD} を上式に代入すれば、 ϕ および $\Delta\phi$ に関する次の振動の連立微分方程式をうる。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - \frac{\gamma}{Ggt_2} \left(t_2 + \frac{t_1 h}{3b}\right) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{12\gamma}{Eg(ht_1 + bt_2)} \left\{b \left(t_1 + \frac{bt_2}{3h}\right) - h \left(t_2 + \frac{ht_1}{3b}\right)\right\} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 \Delta\phi}{2\partial x^4} \\ &+ \frac{\gamma}{2Ggt_2} \left(t_2 + \frac{t_1 h}{3b}\right) \frac{\partial^4 \Delta\phi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{2G_0}{Ght_2} \frac{\partial^2 \Delta\phi}{\partial x^2} - \frac{6\gamma}{Egbh(ht_1 + bt_2)} \left\{b \left(t_1 + \frac{bt_2}{3h}\right) \right. \\ &\left. + h \left(t_2 + \frac{ht_1}{3b}\right)\right\} \frac{\partial^2 \Delta\phi}{\partial t^2} - \frac{48G_0 \Delta\phi}{Ebh(ht_1 + bt_2)} = 0 \\ &\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - \frac{\gamma}{Ggt_1} \left(t_1 + \frac{bt_2}{3h}\right) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{12\gamma}{Eg(ht_1 + bt_2)} \left\{b \left(t_1 + \frac{bt_2}{3h}\right) - h \left(t_2 + \frac{ht_1}{3b}\right)\right\} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 \Delta\phi}{2\partial x^4} \\ &- \frac{\gamma}{2Ggt_1} \left(t_1 + \frac{bt_2}{3h}\right) \frac{\partial^4 \Delta\phi}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{2G_0}{Gbt_1} \frac{\partial^2 \Delta\phi}{\partial x^2} + \frac{6\gamma}{Egbh(ht_1 + bt_2)} \left\{b \left(t_1 + \frac{bt_2}{3h}\right) \right. \\ &\left. + h \left(t_2 + \frac{ht_1}{3b}\right)\right\} \frac{\partial^2 \Delta\phi}{\partial t^2} + \frac{48G_0 \Delta\phi}{Ebh(ht_1 + bt_2)} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{式中, } I_x &= \frac{bh^2}{2} \left(t_2 + \frac{ht_1}{3b}\right), \quad I_x' = \frac{bh^2 t_2}{2}, \quad I_y = \frac{b^2 h}{2} \left(t_1 + \frac{bt_2}{3h}\right), \quad I_y' = \frac{b^2 ht_1}{2}, \\ I_p &= \frac{bh}{2} \left\{\left(b + \frac{h^2}{3b}\right)t_1 + \left(h + \frac{b^2}{3h}\right)t_2\right\}, \quad I_A = \frac{bh}{2} (ht_1 + bt_2) \end{aligned}$$

とおけば、(19) の連立微分方程式は、次のようになる。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - \frac{\gamma I_x}{Gg I_x'} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{12\gamma (I_y - I_x)}{Egbh I_A} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \\ &- \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^4 \Delta\phi}{\partial x^4} - \frac{4G_0}{Ght_2} \frac{\partial^2 \Delta\phi}{\partial x^2} + \frac{48G_0}{EI_A} \Delta\phi - \frac{\gamma I_x}{Gg I_x'} \frac{\partial^4 \Delta\phi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{12\gamma I_p}{Egbh I_A} \frac{\partial^2 \Delta\phi}{\partial t^2} \right\} = 0 \\ &\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - \frac{\gamma I_y}{Gg I_y'} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{12\gamma (I_y - I_x)}{Egbh I_A} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^4 \Delta\phi}{\partial x^4} - \frac{4G_0}{Gbt_1} \frac{\partial^2 \Delta\phi}{\partial x^2} + \frac{48G_0}{EI_A} \Delta\phi - \frac{\gamma I_y}{Gg I_y'} \frac{\partial^4 \Delta\phi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{12\gamma I_p}{Egbh I_A} \frac{\partial^2 \Delta\phi}{\partial t^2} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

6. 単純桁の場合の算式

いま、単純支持を仮定し

$$\phi = \sum_m A_m \sin \frac{m\pi x}{l} \cdot \sin pt, \quad \Delta\phi = \sum_m B_m \sin \frac{m\pi x}{l} \cdot \sin pt \quad (21)$$

とおけば、

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 - \left\{ \frac{\gamma I_x}{Gg I'_x} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 - \frac{12\gamma (I_y - I_x)}{Eg b h I_A} \right\} p^2 \right] A_m \\ & - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 + \frac{4G_0}{Ght_2} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{48G_0}{EI_A} - \left\{ \frac{\gamma I_x}{Gg I'_x} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{12\gamma I_p}{Eg b h I_A} \right\} p^2 \right] B_m = 0 \\ & \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 - \left\{ \frac{\gamma I_y}{Gg I'_y} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{12\gamma (I_y - I_x)}{Eg b h I_A} \right\} p^2 \right] A_m \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 + \frac{4G_0}{Gbt_1} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{48G_0}{EI_A} - \left\{ \frac{\gamma I_y}{Gg I'_y} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{12\gamma I_p}{Eg b h I_A} \right\} p^2 \right] B_m = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

となるから、 A_m, B_m を消去すれば

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 - \left\{ \frac{\gamma I_x}{Gg I'_x} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 - \frac{12\gamma (I_y - I_x)}{Eg b h I_A} \right\} p^2 \right] \times \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 + \frac{4G_0}{Gbt_1} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{48G_0}{EI_A} \right. \\ & \left. - \left\{ \frac{\gamma I_y}{Gg I'_y} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{12\gamma I_p}{Eg b h I_A} \right\} p^2 \right] + \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 - \left\{ \frac{\gamma I_y}{Gg I'_y} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{12\gamma (I_y - I_x)}{Eg b h I_A} \right\} p^2 \right] \\ & \times \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 + \frac{4G_0}{Ght_2} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{48G_0}{EI_A} - \left\{ \frac{\gamma I_x}{Gg I'_x} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{12\gamma I_p}{Eg b h I_A} \right\} p^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

なる二次方程式がえられるから、これを計算して、断面の回転および変形の固有円振動数 p が求まる。

7. 変形を無視した場合

(23) 式を G_0 で除し、 $G_0 = \infty$ において、変形を無視した場合の式をつくと、次のようになる。

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{Gg}{\gamma} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \times \frac{EI_A \left(\frac{1}{bt_1} + \frac{1}{ht_2} \right) \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + 24G}{EI_A \left(\frac{I_x}{bt_1 I'_x} + \frac{I_y}{ht_2 I'_y} \right) \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + 12G \left(\frac{I_x}{I'_x} + \frac{I_y}{I'_y} + \frac{(I_x - I_y)(bt_1 - ht_2)}{b^2 h^2 t_1 t_2} \right)} \\ &= \frac{Gg}{\gamma I_p} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \times \frac{Eb^2 h^2 (bt_2 + ht_1)(bt_1 + ht_2) + 48Gb^2 h^2 t_1 t_2}{2Eb h (bt_2 + ht_1) \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + 24G (bt_1 + ht_2)} \end{aligned} \quad (24)$$

この式は、Benscoter の曲げねじりの微分方程式を用い

$$\left. \begin{aligned} EI_w \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= -\frac{I_p \gamma}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \\ G(I_p - J) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - GI_w \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= -\frac{I_p \gamma}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

を解いて求まった

$$p^2 = \frac{Gg}{\gamma I_p} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \times \frac{EI_w I_p \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + GJ(I_p - J)}{EI_w \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + G(I_p - J)} \quad (26)$$

$$\text{ただし、} \quad I_w = \frac{b^2 h^2 (bt_1 - ht_2)^2 (bt_2 + ht_1)}{24 (bt_1 + ht_2)^2},$$

$$J = \frac{2b^2 h^2 t_1 t_2}{bt_1 + ht_2}$$

の計算式と完全に一致する。

8. 数値計算による検討

いま、スパン 30 m のコンクリート桁を例にとって試算

してみる。断面等の諸元は次のように仮定した。

$$l = 30 \text{ m}, \quad t_1 = 30 \text{ cm}, \quad t_2 = 15 \text{ cm}, \quad h = 1.5 \text{ m}, \quad b = 4.0 \text{ m},$$

$$E = 300 \text{ t/cm}^2, \quad G = 125 \text{ t/cm}^2 \quad (\nu = 0.2)$$

式 (23) により、断面の回転および変形の円振動数 p が計算され、固有振動数 $s = p/2\pi$ は次のように求まった。

断面の回転振動数

$$(1 \text{ 次}) \quad s = 15.29 \text{ c/s}$$

$$(2 \text{ 次}) \quad s = 18.33 \text{ c/s}$$

$$(3 \text{ 次}) \quad s = 19.67 \text{ c/s}$$

断面の変形振動数

$$(1 \text{ 次}) \quad s = 38.76 \text{ c/s}$$

$$(2 \text{ 次}) \quad s = 45.41 \text{ c/s}$$

$$(3 \text{ 次}) \quad s = 51.69 \text{ c/s}$$

これをみると、断面の変形振動数は回転振動数よりも、さらに、高い周波数を固有することがわかり、かつ、どちらの振動数とも高次になっても変化があまりないことがわかる。

つぎに、変形を無視した場合の値を(24)式で計算し、1次の振動数のみを比較してみる。なお、参考までに、純ねじりの固有振動数も $p = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{GJ_g}{I_p \gamma}}$ から純曲げの固有振動数も $p = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_g}{A \gamma}}$ からそれぞれ計算し、付記して次表にまとめた。

固有振動数の比較 (c/s)

	断面の回転	断面の変形	曲 げ
変形を考えた場合	15.29	38.76	—
変形を無視した場合	22.72	—	—
純 ね じ り	22.63	—	—
純 曲 げ	—	—	3.81

これによれば、曲げ振動の場合における固有値に比べれば、かなり高い振動数ではあるが、断面の変形を無視した場合に比較してかなり小さくなることがわかる。

なお、変形を無視した場合の、いわゆる曲げねじり理論による固有振動数は、純ねじりの式で計算した値と大差がない。

なお、ハンチあるいは間隔などで剛性が高まった場合の変化を図-6に示した。この図には、剛性が低下した場合(ひびわれ、ある種の折板結合等による準固定)も考慮して、 G_0 以下の変形抵抗係数の場合の固有振動数も示した。

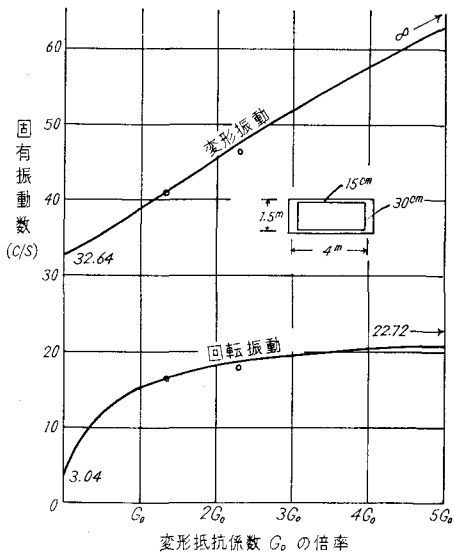


図-6

9. ハンチを有する場合の影響

さきに、実施した静力学的研究では、ハンチをつけることによって、かなり曲げねじり応力を減少させるのに効果があることがわかったが^{4,5)}、固有振動に関しても、これが

どの程度影響するかを調べてみる。

このことは、ハンチをつけることによって剛性が増大するから、さきに示した図-6の結果からも当然その影響が予測されるが、ハンチ断面の質量が慣性力として加わるので、図-6の結果をそのまま用いることはできない。

変形抵抗係数

ハンチを有する場合の変形抵抗係数 G_0 は、いわゆる変断面不静定桁における要領で計算できる。すなわち、さきに示した(4)式の曲げモーメント表示は

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= Ek_1(a_1\varphi_A + b_1\varphi_B - c_1\psi_{AB}) \\ M_{AD} &= Ek_2(a_2\varphi_A + b_2\varphi_B - c_2\psi_{AD}) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

となるから、前と同様の手法により(12)および(12)'式に相当する変形抵抗係数 G_0 を計算すると、次のように求まる。

$$G_0 = \frac{4E}{bh} \times \frac{c_1 c_2 k_1 k_2}{c_1 k_1 + c_2 k_2} \quad (28)$$

さらに、

$$G_3 = \frac{2E}{3bh} \times \frac{c_1 c_2 t_1^2 t_2^2}{c_1 b t_1^3 + c_2 h t_2^3} \quad (28)'$$

式中、 c_1, c_2 は図-7のように記号をとり、次式で計算した。

$$c = \frac{3}{2\alpha - \beta} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし、} \quad \alpha &= \frac{3\nu^3}{e^3} \left\{ 2 \log(1+e) - e(2-e) \right\} + (1-\nu)^3 - \nu^3 \\ &\quad + \frac{3\nu(2+e)}{2(1+e)^2} - \frac{3\nu^2}{1+e}, \\ \beta &= 3 \left\{ 1 - 2\nu + \frac{\nu(2+e)}{(1+e)^2} \right\} - 2\alpha \end{aligned}$$

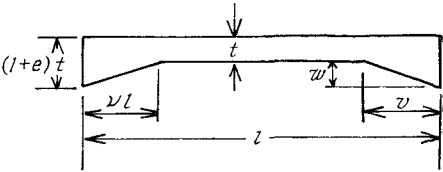


図-7

ハンチ断面を考慮した慣性力

いま、ハンチ断面積が節点にあるものとし、これをハンチの換算断面積 f とすれば、 y 方向、 z 方向の変位 v, w に対応するハンチの慣性力は、それぞれの方向に

$$-\frac{\gamma f}{g} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad -\frac{\gamma f}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

だけ働くから、(13)式に対応する力のつりあいは、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} S_{AB} &= \frac{\gamma}{2g} \left(t_1 h + \frac{b t_2}{3} + 2f \right) \frac{\partial^2 w_A}{\partial t^2} - X_{AD} \\ S_{AD} &= \frac{\gamma}{2g} \left(t_2 b + \frac{h t_1}{3} + 2f \right) \frac{\partial^2 v_A}{\partial t^2} + X_{AB} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

せん断力のつりあい

換算断面積 f をもったハンチには節点における曲げねじ

り応力 $E \frac{\partial u}{\partial x}$ が働いているから、(15)式に対応する節点におけるせん断力のつりあいは、次のようになる。

$$T_{AB} + T_{AD} + E f \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (31)$$

以上の三点を考慮して、ハンチがない場合と同様の計算をおこなえば、(20)式に対応する微分方程式は、式中の定数を次のように変えて、(20)式と全く同じ型の基本式となる。

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \frac{bh^2}{2} \left(t_2 + \frac{ht_1}{3b} + 2\frac{f}{b} \right) \\ I_y &= \frac{b^2h}{2} \left(t_1 + \frac{bt_2}{3h} + 2\frac{f}{h} \right) \\ I_p &= \frac{bh}{2} \left\{ \left(b + \frac{h^2}{3b} \right) t_1 + \left(h + \frac{b^2}{3h} \right) t_2 + 2f \left(\frac{b}{h} + \frac{h}{b} \right) \right\} \\ I_A &= \frac{bh}{2} (ht_1 + bt_2 + 6f) \\ G_0 &= \frac{2E}{3bh} \times \frac{c_1 c_2 t_1^2 t_2^2}{c_1 b t_1^2 + c_2 h t_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

したがって、ハンチのない場合と同様に単純支持を仮定すれば、(32)式の定数を用いて、ハンチがない場合の(23)と同じ式を計算すれば、断面の回転および変形の円振動数 p が計算されるから、これからハンチを有する場合の固有振動数 s が明らかになる。

いま、ハンチがない場合の計算例に用いたと同じ断面のコンクリート箱桁に対し、 $v:w=1:1$ および $2:1$ の寸法のハンチに対し、 $w=0 \sim 30$ cm と変化させて計算してみると、図-8および図-9のようになる。

これによれば、その影響は著しくないが、ハンチをつけることによってかなり固有振動数が変化する (10~20% ほど大きくなる) ことが分った。なお、さきに G_0 の変化だけ

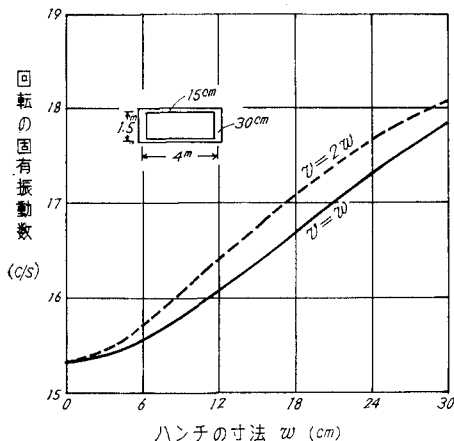


図-8

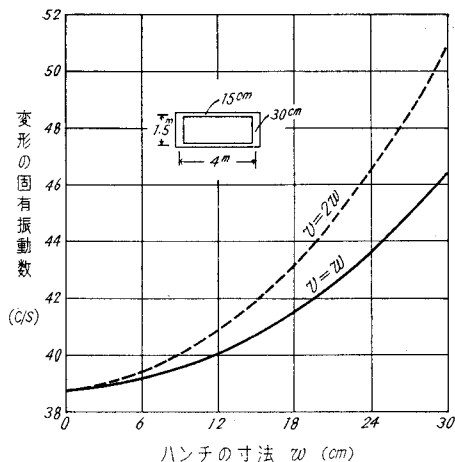


図-9

を考慮した場合の図-6と比較してみると、 $v=w=30$ cm のハンチではハンチのない場合の G_0 に対し、約 $2.3G_0$ となり、図-6中にプロットしてみるとわずかな差があるが、 $v=w=15$ cm の小さなハンチでは約 $1.32G_0$ となり、同様にプロットすれば、殆んど曲線上にのり差がないことがわかる。

10. おわりに

剛結合折板理論によって、断面の変形を考慮した場合の曲げねじりに関する固有振動の微分方程式を求め、コンクリート箱桁の断面を仮定した計算例を示した。

その結果、断面の変形に関する固有振動数が高周波振動ではあるが明らかになり、断面の回転に関する固有振動は変形を無視した曲げねじりの場合よりもかなり小さな振動数を示し、剛性の大小によってかなり差があることなどがわかった。

参考文献

- 1) 能町・尾崎：断面の変形を考慮した箱桁のねじりについて、土木学会道支部技術資料第22号，昭41.2.
- 2) 能町・尾崎：一室箱桁における中央隔壁の曲げねじりに対する影響，土木学会第21回年次講演会概要，IV-36，昭41.5.
- 3) 尾崎・能町：張出部を有する箱桁の断面変形を考えた曲げねじりについて，土木学会第22回講演会概要，I-112，昭42.5.
- 4) 尾崎 諒：コンクリート箱桁の曲げねじりに関するハンチ等の影響について，土木学会道支部論文集24号，昭43.2.
- 5) 尾崎 諒：コンクリート箱桁の曲げねじりに関する研究，土木学会第23回大会講演概要，IV-5，昭43.10.