

ヒンジで連結された2本箱桁を有するコンクリート桁橋の ねじりの影響を考慮した荷重分配について

学生員 佐 伯 昇*

1. ま え が き

最近コンクリートの2-Boxの桁において、プレキャストで施工するにあたってBoxとBoxとの橋軸方向の連結をヒンジと考えて設計する場合がある。この種の設計の資料とするために、スパン、桁高、幅員、床版厚を変数として、横方向の曲げモーメント、せん断力、ねじりモーメント、拘束ねじりモーメントの分配を図示し、考察を行なった。これらに関する論文にはBieger¹⁾、Bretthauer²⁾等の研究があるが、本論文では主桁の拘束ねじりを考慮し、主桁と主桁の間を2方向板として解析を行なった。

2. 理論の概要

図-3に示しているように、板の中央で切断し不静定せん断力を挿入する。BoxとBoxの連結をヒンジ連結と考えるので曲げモーメント、軸方向力は働かない。

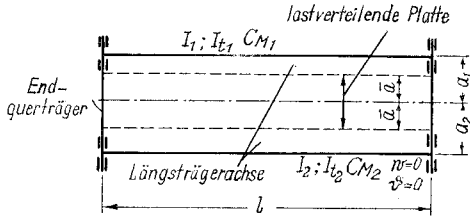


図-1

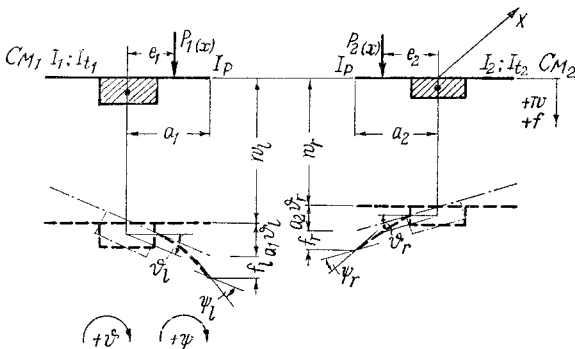


図-2

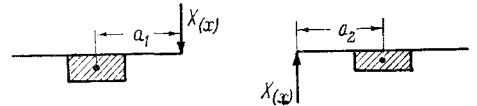


図-3

2.1 pが载荷する時

基本型として1-Boxの桁を考える。これに荷重pを載荷すると、左右切断位置にたわみ δ_{pl} , δ_{pr} が生じ

$$\begin{aligned} \delta_{pl} - \delta_{pr} &= (w_l(x) + a_1 \theta_l(x) + f_l(x)) \\ &\quad - (w_r(x) + a_2 \theta_r(x) + f_r(x)) \end{aligned} \quad (1)$$

垂直荷重p、ねじり荷重epによる微分方程式は

$$\begin{aligned} EI_1 \frac{d^4}{dx^4} w_l(x) &= p_1(x) \\ EI_2 \frac{d^4}{dx^4} w_r(x) &= p_2(x) \\ -(ECM_1 \theta_l')'' + (GI_{t1} \theta_l')' &= -e_1 p_1(x) \\ -(ECM_2 \theta_r')'' + (GI_{t2} \theta_r')' &= +e_2 p_2(x) \end{aligned} \quad (2)$$

$$f_l(x) = \frac{\alpha_{01}}{EI_p} p_1(x)$$

$$f_r(x) = \frac{\alpha_{02}}{EI_p} p_2(x) \quad W(x) = e \sum \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \lambda^2} \cdot p(x)$$

2.2 不静定力 X

$\delta_{xl} + \delta_{pl} - \delta_{xr} - \delta_{pr} = 0$ の条件から

$$\begin{aligned} X(x) \left(1 + \frac{I_1}{I_2} \right) - \frac{EI_1}{GI_{t1}} \left(1 + \frac{I_{t1}}{I_2} \cdot \frac{a_2^2}{a_1^2} \right) a_1^2 X''(x) \\ + 2 \frac{I_1}{I_p} \alpha_X X^{IV}(x) \\ - \frac{EI_1}{GI_{t1}} \cdot a_1^2 \left(\frac{1}{a_1} \cdot W_{xl}^{IV}(x) + \frac{a_2}{a_1^2} \cdot \frac{I_{t1}}{I_2} \cdot W_{xr}^{IV}(x) \right) \\ = -p_1(x) + \frac{I_1}{I_2} p_2(x) + \frac{EI_1 a_1}{GI_{t1}} e_1 p_1'(x) \\ - \frac{EI_1}{GI_{t2}} a_2 e_2 p_2''(x) - \frac{I_1}{I_p} \alpha_{01} p_1^{IV}(x) + \frac{I_1}{I_p} \alpha_{02} p_2^{IV}(x) \\ + \frac{EI_1 a_1}{GI_{t1}} W_{xl}^{IV}(x) + \frac{EI_1 a_2}{GI_{t2}} W_{xr}^{IV}(x) \end{aligned} \quad (3)$$

2.3 集中荷重の場合

不静定力 $X(x) = \sum k_n \sin \frac{n\pi}{l} x$

$$\text{集中荷重 } p_1(x) = \frac{2p_1}{l} \sum \sin \frac{n\pi u}{l} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (4)$$

* 北海道大学 大学院

$$p_2(x) = \frac{2p_2}{l} \sum \sin \frac{n\pi u}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \omega = \frac{n\pi}{l}$$

$$k_n \left[\left(1 + \frac{I_1}{I_2} \right) + \frac{EI_1}{GI_{t1}} \left(1 + \frac{I_{t1}}{I_2} \cdot \frac{a_2^2}{a_1^2} \right) a_1^2 \omega^2 + 2 \cdot \frac{I_1}{I_p} \alpha_X \omega^4 \right. \\ \left. - \frac{EI_1}{GI_{t1}} \left(a_1^2 \cdot \frac{\omega^4}{\omega^2 + \lambda_1^2} + a_2^2 \cdot \frac{I_{t1}}{I_2} \cdot \frac{\omega^4}{\omega^2 + \lambda_2^2} \right) \right] \quad (5)$$

$$= \frac{2}{l} \sin \omega u \left[\left(-p_1 + \frac{I_1}{I_2} p_2 \right) + \omega^2 EI_1 \left(-\frac{a_1 e_1}{GI_{t1}} p_1 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{a_2 e_2}{GI_{t2}} p_2 \right) + \omega^4 \cdot \frac{I_1}{I_p} \left(-\alpha_{01} p_1 + \alpha_{02} p_2 \right) \right. \\ \left. + EI_1 \left(e_1 p_1 \cdot \frac{a_1}{GI_{t1}} \cdot \frac{\omega^4}{\omega^2 + \lambda_1^2} - \frac{p_2 a_2 e_2}{GI_{t2}} \cdot \frac{\omega^4}{\omega^2 + \lambda_2^2} \right) \right]$$

2.4 線荷重の場合

$$k_n \left[1 + \frac{I_1}{I_2} + \frac{EI_1}{GI_{t1}} \left(1 + \frac{I_{t1}}{I_2} \cdot \frac{a_2^2}{a_1^2} \right) a_1^2 \omega^2 + 2 \cdot \frac{I_1}{I_p} \alpha_X \omega^4 \right. \\ \left. - \frac{EI_1}{GI_{t1}} \left(a_1^2 \cdot \frac{\omega^4}{\omega^2 + \lambda_1^2} + a_2^2 \cdot \frac{I_{t1}}{I_2} \cdot \frac{\omega^4}{\omega^2 + \lambda_2^2} \right) \right] \quad (6)$$

$$= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sin^2 \frac{n\pi}{2} \left[\left(-p_1 + \frac{I_1}{I_2} p_2 \right) + \omega^2 EI_1 \left(-\frac{a_1 e_1}{GI_{t1}} p_1 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{a_2 e_2}{GI_{t2}} p_2 \right) + \omega^4 \cdot \frac{I_1}{I_p} \left(-\alpha_{01} p_1 + \alpha_{02} p_2 \right) \right. \\ \left. + EI_1 \left(\frac{a_1 e_1 p_1}{GI_{t1}} \cdot \frac{\omega^4}{\omega^2 + \lambda_1^2} - \frac{a_2 e_2 p_2}{GI_{t2}} \cdot \frac{\omega^4}{\omega^2 + \lambda_2^2} \right) \right]$$

等断面の場合には $I = I_1 = I_2$, $I_t = I_{t1} = I_{t2}$, $a = a_1 = a_2$

$$p_1 = 1, p_2 = 0, \lambda = \lambda_1 = \lambda_2$$

$$X(x) = \frac{-2 \sin^2 \frac{n\pi}{l}}{n\pi} \\ \cdot \sum \frac{1 + \frac{EI}{GI_t} a e_1 \omega^2 + \frac{I}{I_p} \alpha_{01} \omega^4 - \frac{EI}{GI_t} a e_1 \cdot \frac{\omega^4}{\omega^2 + \lambda^2}}{1 + \frac{EI}{GI_t} a^2 \omega^2 + \frac{I}{I_p} \alpha_X \omega^4 - \frac{EI}{GI_t} a^2 \cdot \frac{\omega^4}{\omega^2 + \lambda^2}} \times \\ \sin \omega x \quad (7)$$

2.5 主桁と主桁の間を板として考えた場合の α_X

図-4 のように考えると境界条件として

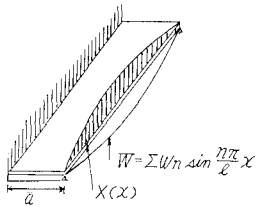


図-4

$$\begin{aligned} x=0 \quad x=l \quad w=0 \quad m_x=0 \\ y=0 \quad w=w_n \sin \omega x \quad m_y=0 \\ \bar{q}_y = -X(x) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} y=a \quad w=0 \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ \text{今 } SH = \sinh A' \quad CH = \cosh A' \quad A' = \omega \cdot a \\ \alpha_X = \frac{1}{\omega^3} \cdot \frac{SH \cdot CH - A'}{CH^2 + 0.5 + 0.5 A'} \end{aligned} \quad (9)$$

3. 数値計算及び考察

3.1

図-5 のような断面で, $l=32$ m, $I=2.8$ m⁴, $I_T=6.1$ m⁴, $A=5.1$ m, $C_M=4.6$ m⁶ で単位幅の床板の断面 2 次モーメントを $0.3 \times 10^{-3} \sim 3 \times 10^{-3}$ まで変化させた。床板厚として 7 cm ~ 33 cm となる。この時の 1-Box とした時の値と 2-Box とした時の値の比, 及び不静定力によるセン断力, 拘束ねじりモーメントねじり角の値を図-6 に表示した。

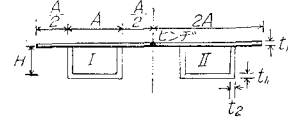


図-5

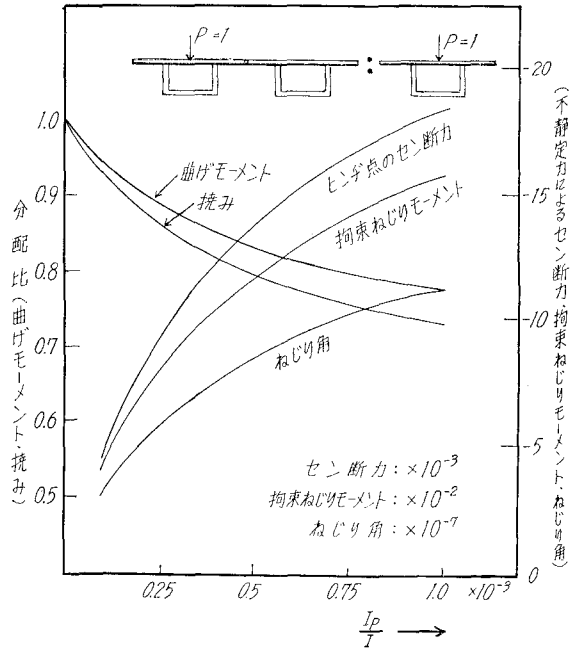


図-6 分配比及び $X(x)$ による主桁の捩り角, セン断力, 拘束ねじりモーメント

3.2

線荷重 $p(y)$ が移動する場合ヒンジ $\frac{l}{2}$ 点のセン断力, 式 7 より $x=l/2$ とすると

$$X(x) = \frac{-2p}{\pi} \sum \frac{1}{n} \sin^3 \frac{n\pi}{2} A_n = q$$

$$a = e_1, \alpha_{01} = \alpha_X, \text{ で } A_n = 1 \text{ であるから}$$

$$X(x) = -\frac{2p_1}{\pi} \sum \frac{1}{n} \sin^3 \frac{n\pi}{2} = -0.5 p = q_0$$

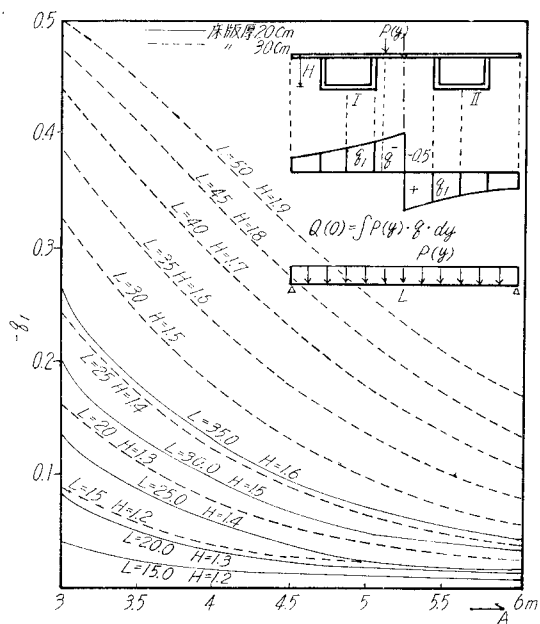


図-7.1 線荷重 $p(y)$ が移動する場合の
ヒンジ上 $\frac{L}{2}$ 点のせん断力

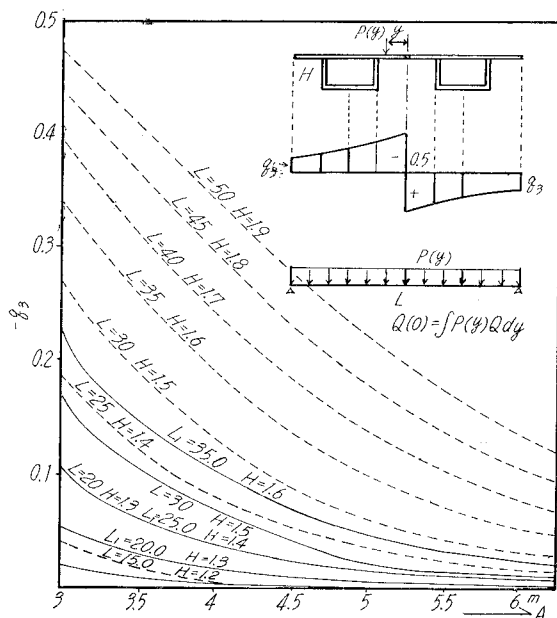


図-7.3 線荷重 $p(y)$ が移動する場合の
ヒンジ上 $\frac{L}{2}$ 点のせん断力

3.3

線荷重 $p(y)$ が移動する場合の主桁 $I\left(\frac{L}{2}\right)$ 点の曲げモーメント

$$\begin{aligned} M\left(\frac{L}{2}\right) &= -\iint (p(x) + X(x)) dx dx \\ &= pL^2/8 \left[1 - \frac{16}{\pi^3} \sum \frac{1}{n^3} \sin^3 \frac{n\pi}{2} A_n \right] \\ &= \frac{pL^2}{8} \cdot m \end{aligned}$$

$$a=e_1, A_n=1 \text{ で } \frac{pL^2}{8} (1-0.5) = \frac{p}{8} L^2 \cdot 0.5$$

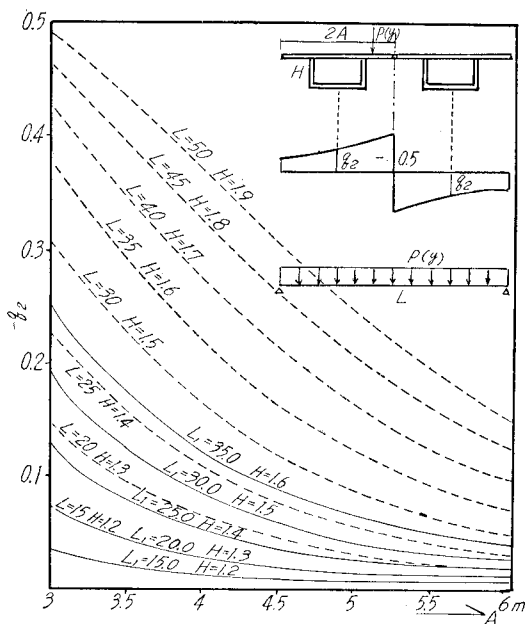


図-7.2 線荷重 $p(y)$ が移動する場合の
ヒンジ上 $\frac{L}{2}$ 点のせん断力

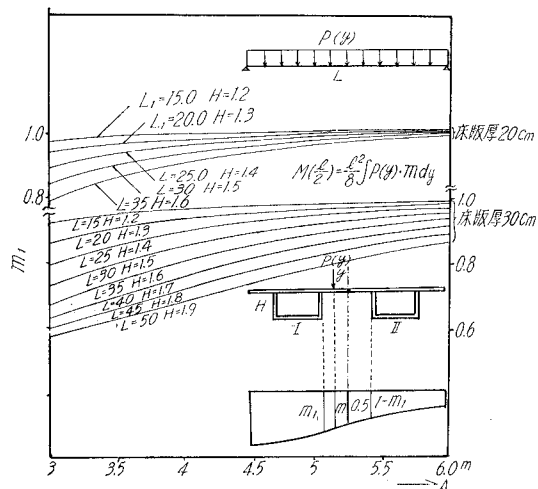
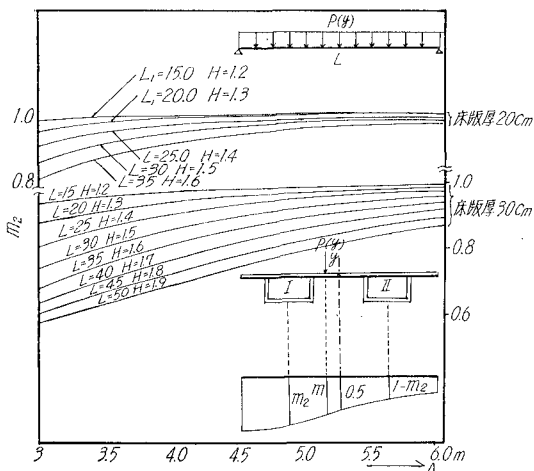
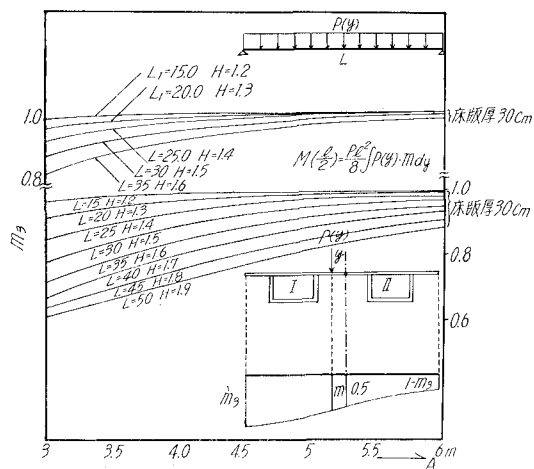


図-8.1 線荷重 $p(y)$ が移動するときの
主桁 $I\left(\frac{L}{2}\right)$ 点の曲げモーメント



図—8.2 線荷重 $p(y)$ が移動する場合の主桁 $I\left(\frac{L}{2}\right)$ の曲げモーメント



図—8.3 線荷重 $p(y)$ が移動する場合の主桁 $I\left(\frac{L}{2}\right)$ の曲げモーメント

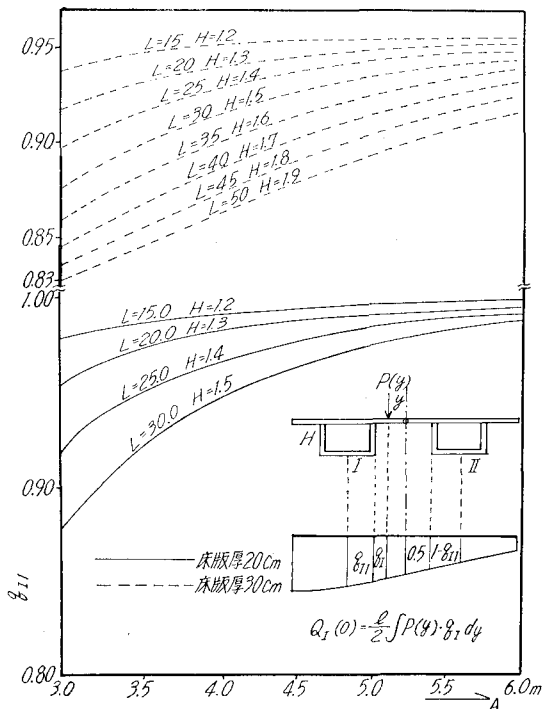
3.4

線荷重 $p(y)$ が移動する場合の主桁支点のせん断力

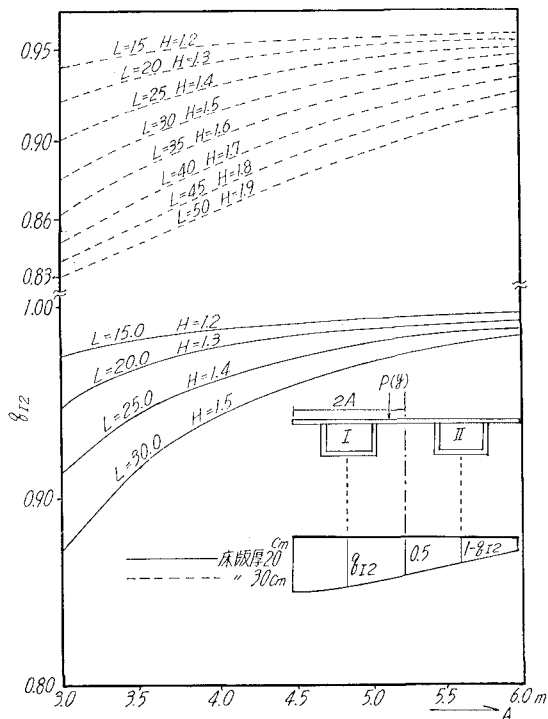
$$Q(0) = \frac{p}{2} l \left(1 - \frac{4}{\pi^2} \sum \frac{1}{n^2} \sin^2 \cdot \frac{n\pi}{2} A_n \right) = \frac{pl}{2} q_I$$

$$a = c_1 \quad A_n = 1$$

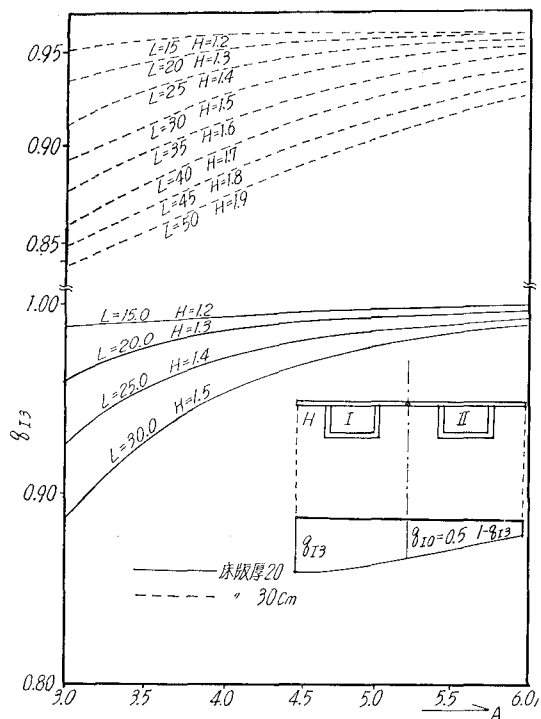
$$\frac{p}{2} l (1 - 0.5) = 0.5 \cdot \frac{p}{2} l$$



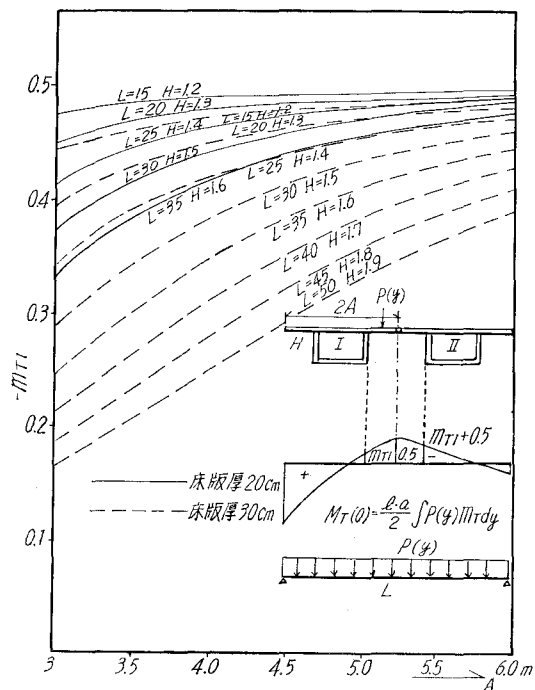
図—9.1 線荷重 $p(y)$ が移動する場合の主桁 I 支点のせん断力



図—9.2 線荷重 $p(y)$ が移動する場合の主桁 I 支点のせん断力



図—9.3 線荷重 $p(y)$ が移動する場合の主桁 I 支点でのせん断力



図—10.1 線荷重 $p(y)$ が移動する場合の主桁 I 支点でのせん断力

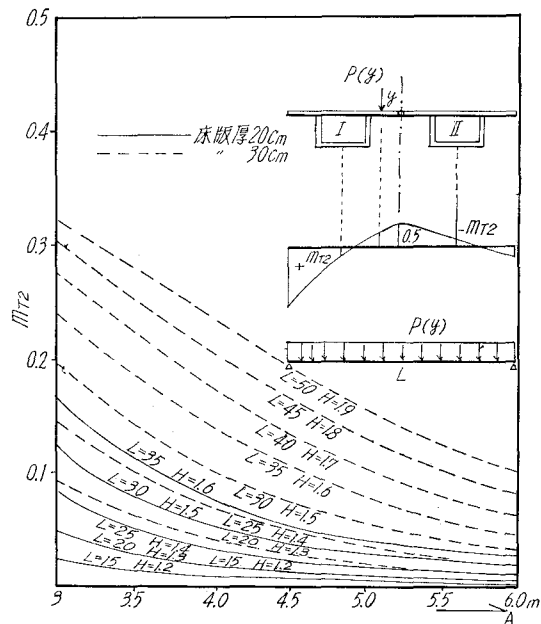
3.5

線荷重 $p(y)$ が移動する場合の主桁 I 支点のねじりモーメント

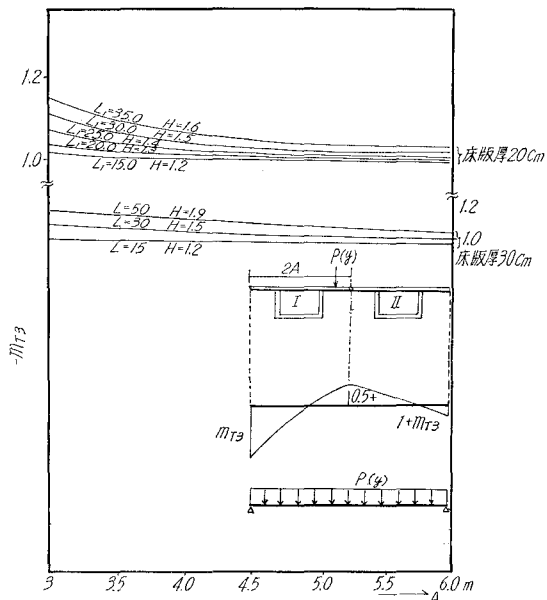
$$M_T(0) = \frac{pl}{2} A \left[-\left(1 - \frac{y}{A}\right) + \left(1 - q_T\right) \right] = m_T \cdot \frac{pl}{2} \cdot A$$

$$a = e_1, A_n = 1$$

$$\frac{pl}{2} A (-1 + 0.5) = \frac{pl}{2} A \cdot (-0.5)$$



図—10.2 線荷重 $p(y)$ が移動する場合の主桁 I 支点でのねじりモーメント

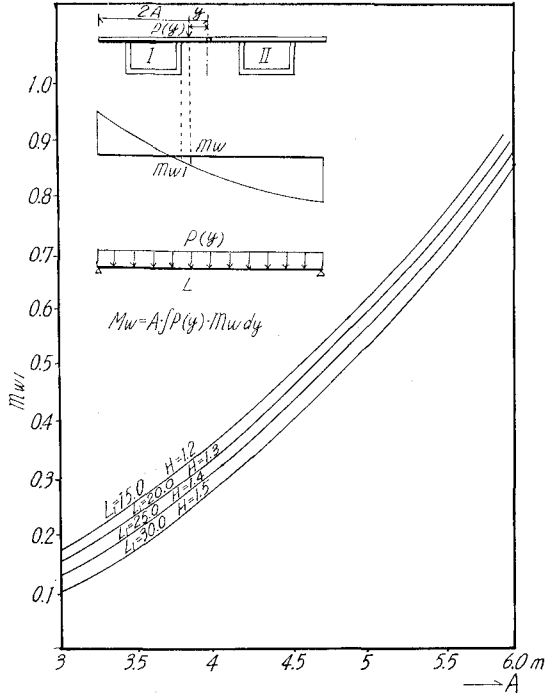


図—10.3 線荷重 $p(y)$ が移動する場合の主桁 I 支点でのねじりモーメント

3.6

線荷重 $p(y)$ が移動する場合の主桁 $I\left(\frac{l}{2}\right)$ 点の拘束ねじりモーメント

$$M_w\left(\frac{l}{2}\right) = -A \cdot p \Sigma \left[\frac{1}{\omega^2 + \lambda^2} \cdot \frac{2}{n\pi} \sin^3 \frac{n\pi}{2} \left(\frac{2e_1}{A} - A_n \right) \right] \\ = A \cdot p m_w$$



図—11.1 線荷重 $p(y)$ が移動する場合の主桁 $I\left(\frac{l}{2}\right)$ 点の拘束ねじりモーメント

3.7

線荷重 $p(y)$ が移動する場合の主桁 I 支点の一次ねじりモーメント

$$M_{DP}(0) = -\lambda^2 \cdot A \Sigma \left[\frac{1}{\omega^3 + \lambda^2 \omega} \cdot \frac{2p}{\pi n} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \left(\frac{2e_1}{A} - A_n \right) \right]$$

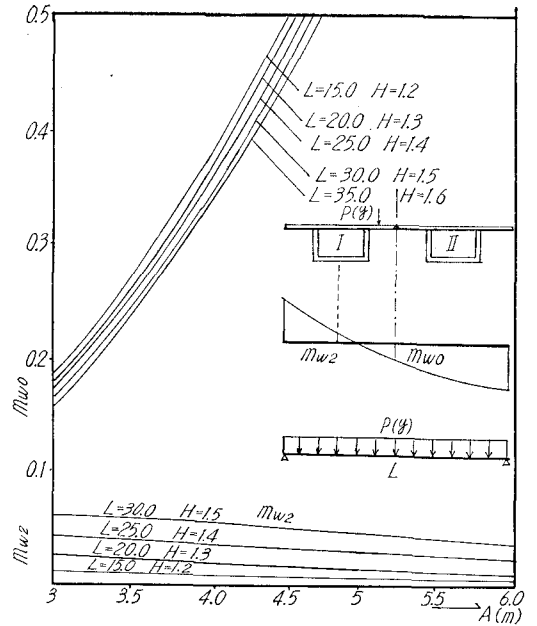
3.8

線荷重 $p(y)$ が移動する場合の主桁 I 支点の二次ねじりモーメント

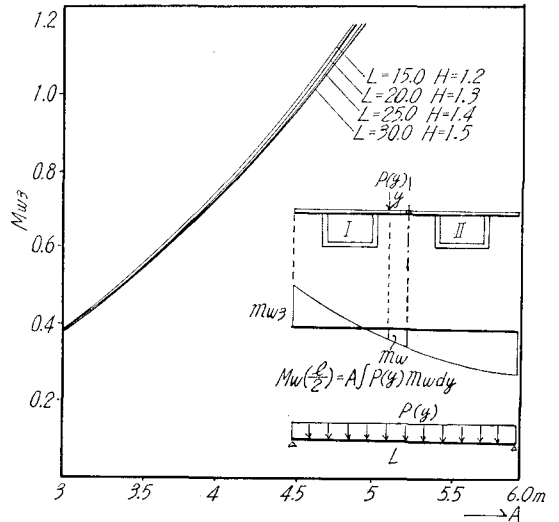
$$M_{DS}(0) = -A \Sigma \left[\frac{\omega}{\omega^2 + \lambda^2} \cdot \frac{2p}{\pi n} \left(\frac{2e_1}{A} - A_n \right) \sin^2 \frac{n\pi}{2} \right]$$

3.9

図-7～図-11 の計算の断面値は、床版厚 $t_1=20$ cm, $t_2=30$ cm, $E=3.0 \times 10^5$ kg/cm², $E/G=2.3$ と, $t_1=30$ cm, $t_2=30$ cm, $E=3.0 \times 10^5$ kg/cm², $E/G=2.3$ と大きく分け, その各々について桁高 H^m , スパン l^m , 幅員 $4 \times A$ (張出し長 $A/2$) をパラメーターとして, 断面2次モーメント I , 振り抵抗 I_L , 拘束振り抵抗 C_M を各々計算し, その各々について断面力の影響を求めた。ヒンジ連結の支間中央の影響



図—11.2 線荷重 $p(y)$ が移動する場合の主桁 $I\left(\frac{l}{2}\right)$ 点の拘束ねじりモーメント



図—11.3 線荷重 $p(y)$ が移動する場合の主桁 $I\left(\frac{l}{2}\right)$ 点の拘束ねじりモーメント

線の縦距をヒンジの点から $\frac{A}{2}$, A , $2A$ の位置で求めサックス 1, 2, 3 をつけた。同様に主桁 1 における $\frac{l}{2}$ 点の曲げモーメント, セン断力, ねじりモーメント, 拘束ねじりモーメントの影響線の縦距を与えるグラフを表示した。

3.10

誤差は級数の確定値と比較すると 100 項とて 0.4% となった。

参 考 文 献

- 1) Vorberechnung zweistegiger platten Balken Von
Dr Ing Kaus-Wolfgang Bieger, Beton und Stahl
beton bau 8/1962.
- 2) Zur Quer verteilung bei unsymmetrisch geraden
und gekrümmten zweirten platten balken brücken
von Dr-Ing Georg Bratthauer und Dipl-Ing kappei
Beton und Stahl beton Bau 12/1963.