

デルタ関数による多質点系の応答解析

正員 薄木 征三*

1. まえがき

梁構造物の振動問題の解法には大別して弾性体の振動（無限自由度系）として扱う場合と多質点系（有限自由度系）として扱う場合の 2 通りがあり、各々長短を有するが、ここに紹介する Delta 関数による解法 (Delta Function Method) は、形式上は多質点の振動問題を弾性体の振動の微分方程式にのせて解こうとするものであり、その解も両者の解の中間的な形で与えられ、応答解析の一方法として簡単な構造を例にとって紹介したい。

2. Delta 関数 $\delta(x)$ について

以下の解析に使用される Dilac の Delta 関数について簡単に説明する。周知の様に Delta 関数は次の様に定義される (Fig. 1)。

$$\delta(x) = 0, \quad (x \neq 0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1,$$

次に a を実数、 $f(x)$ を x のある関数とすると

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a), \quad (1)$$

という性質がある。従って $f(x) \delta(x-a)$ のラプラス変換は

$$L[f(x) \delta(x-a)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) e^{-sx} dx = f(a) e^{-sa}, \quad (2)$$

となる。

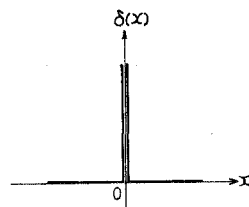


Fig. 1.

3. 自由振動

1) 曲げ剛性 EI 、単位長さの質量 ρ を有する梁に、 N 個の質量 M_i ($i=1 \sim N$) が附着している場合の振動方程式は (Fig. 2) 次式で与えられる。

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left[\rho + \sum_{i=1}^N M_i \delta(x-x_i) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

(3) 式で $\rho=0$ とすると、曲げ剛性を有するが質量のない梁に N 個の集中質量 M_i を有する梁の振動、即ち多質点系の曲げ振動を表現している。これを今一度記すと

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left[\sum_{i=1}^N M_i \delta(x-x_i) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (4)$$

この解を従来と同じく、

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^N y_n(x) \sin(p_n t + \epsilon_n) \quad (5)$$

とおいて (5) を (4) に代入すると第 n 次のものについて

$$y_n'''' - \frac{p_n^2}{EI} \left[\sum_{i=1}^N M_i \delta(x-x_i) \right] y_n = 0, \quad (6)$$

(6) を Laplace 変換すると (2) を用いて

* 北海道大学工学部土木科助手

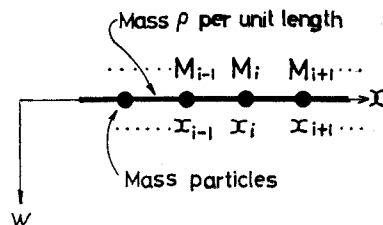


Fig. 2.

$$L[y_n] = \frac{y_n(0)}{s} + \frac{y'_n(0)}{s^2} + \frac{y''_n(0)}{s^3} + \frac{y'''_n(0)}{s^4} + \frac{p_n^2}{EI} \sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i) \frac{e^{-sx_i}}{s^4},$$

従って $y_n(x)$ は次式となる。

$$y_n(x) = y_n(0) + y'_n(0) \cdot x + \frac{y''_n(0)}{2} x^2 + \frac{y'''_n(0)}{6} x^3 + \frac{p_n^2}{6EI} \sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i) (x-x_i)^3 u(x-x_i). \quad (7)$$

ここで $u(x-x_i)$ は step Function である。

Cantilever を例にとって固有値 p_n を求めてみる。この場合は $y_n(0) = y'_n(0) = 0$ であるから (7) は

$$y_n(x) = \frac{y''_n(0)}{2} x^2 + \frac{y'''_n(0)}{6} x^3 + \frac{p_n^2}{6EI} \sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i) (x-x_i)^3 u(x-x_i), \quad (8)$$

l を梁の全長、 ε を微小長さすると梁の自由端で

$$y''_n(l+\varepsilon) = y'''_n(l+\varepsilon) = 0. \quad (9)$$

$x=l+\varepsilon$ を y''_n, y'''_n に代入し $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると

$$\left. \begin{aligned} y''_n(0) + y'''_n(0) l + (p_n^2/EI) \sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i) (l-x_i) &= 0, \\ y'''_n(0) + (p_n^2/EI) \sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(10) を $y''_n(0), y'''_n(0)$ について解き (8) に代入すると

$$y_n(x) = \frac{p_n^2}{6EI} \left[\sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i) (3x_i x^2 - x^3) + \sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i) (x-x_i)^3 u(x-x_i) \right], \quad (11)$$

$x=x_j-\varepsilon, (j=1 \sim N)$ を代入し $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると

$$-y_n(x_j) + \frac{p_n^2}{6EI} \left[\sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i) (3x_i x_j^2 - x_j^3) + \sum_{i=1}^{j-1} M_i y_n(x_i) (x_j-x_i)^3 u(x_j-x_i) \right] = 0, \quad (j=1 \sim N) \quad (12)$$

N 件の方程式 (12) が全て 0 でない N 件の $y_n(x_i)$ を有する為には、それらの係数行列式が 0 でなければならない。即ち固有値 p_n を決定する行列式が得られ、各々の p_n (N 件) に対して (12) より $y_n(x_i)$ の比 (固有ベクトル) が決定され、さらに $y_n(x_i)$ を (11) に代入すれば、固有振動モードが滑らかな曲線として得られる。

Fig. 3 に示す様に Cantilever を等間隔の 5 質点係に置換する場合 (12) 式で

$$x_i = l \cdot i/5 \quad (i=1 \sim 5) \quad (13)$$

であるから、(12) 式は

$$-y_n(x_j) / \alpha p_n^2 + \sum_{i=1}^5 M_i y_n(x_i) (3i-j) + \sum_{i=1}^{j-1} M_i y_n(x_i) (j-i)^3 u(j-i) = 0 \quad (j=1 \sim 5) \quad (14)$$

(14) で $\alpha = l^3/750EI$ である。

$j=1$ に対し (4) 式は

$$(2M_1 - 1/\alpha p_n^2) y_n(x_1) + 5M_2 y_n(x_2) + 8M_3 y_n(x_3) + 11M_4 y_n(x_4) + 14M_5 y_n(x_5) = 0,$$

$j=2$ に対して

$$5M_1 y_n(x_1) + (16M_2 - 1/\alpha p_n^2) y_n(x_2) + 28M_3 y_n(x_3) + 40M_4 y_n(x_4) + 52M_5 y_n(x_5) = 0,$$

$j=3$ に対して

$$8M_1 y_n(x_1) + 28M_2 y_n(x_2) + (54M_3 - 1/\alpha p_n^2) y_n(x_3) + 81M_4 y_n(x_4) + 108M_5 y_n(x_5) = 0,$$

$j=4$ に対して

$$11M_1 y_n(x_1) + 40M_2 y_n(x_2) + 81M_3 y_n(x_3) + (128M_4 - 1/\alpha p_n^2) y_n(x_4) + 176M_5 y_n(x_5) = 0,$$

$j=5$ に対して

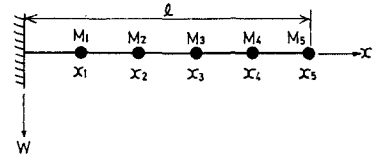


Fig. 3.

$$14M_1 y_n(x_1) + 52M_2 y_n(x_2) + 108M_3 y_n(x_3) + 176M_4 y_n(x_4) + (250M_5 - 1/\alpha p_n^2) y_n(x_5) = 0.$$

従って係数行列式は、 $\lambda = 1/\alpha p_n^2$ とすると以下の様になる。

$$\begin{vmatrix} 2M_1 - \lambda & 5M_2 & 8M_3 & 11M_4 & 14M_5 \\ 5M_1 & 16M_2 - \lambda & 28M_3 & 40M_4 & 52M_5 \\ 8M_1 & 28M_2 & 54M_3 - \lambda & 81M_4 & 108M_5 \\ 11M_1 & 40M_2 & 81M_3 & 128M_4 - \lambda & 176M_5 \\ 14M_1 & 52M_2 & 108M_3 & 176M_4 & 250M_5 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (15)$$

これは従来の影響係数 α_{ij} を求めて得られる結果と完全に同じものである。即ち Delta Function Method は極めて数学的であるが静的解析を行なう事無く係数行列式を求める事を最大の特徴とする。

(15) 式を従来の固有値を求めるプログラムに入れば固有値 p_n 及び固有ベクトル $y_n(x_i)$ が求まるからそれらを (11) 式に代入するとモードが滑らかな曲線で得られる。

次にもし $x=0$ で固定、 $x=l$ で単純支持の場合は (9) 式のかわりに

$$y_n(l) = y_n''(l) = 0,$$

$x=0$ で固定、 $x=l$ で固定の場合は (9) 式のかわりに

$$y_n(l) = y_n'(l) = 0,$$

として、いずれ場合も (10) 式に相当するものを導き、 $y_n''(0)$ 、 $y_n'''(0)$ を求めて (8) 式に代入すればよい。以下は Cantilever の場合と同様の手続きをとればよい。

2) 次に連続梁について説明しよう。Fig. 4-a に示す様に梁が $x=a_j (j=1 \sim s)$ にて支持されて自由振動している状態を考えると、これは見方を変えると支点 $x=a_j$ にある週期的な集中外力 $F_j(t)$ が加わっていると考えられる (Fig. 4-b)。それ故この梁には質点の慣性力と未知の集中外力 $F_j(t)$ が作用しているものと解し次の方程式が得られる。

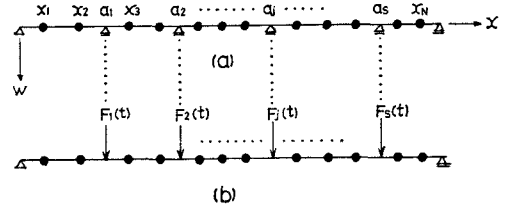


Fig. 4.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left[\sum_{i=1}^N M_i \delta(x-x_i) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^s F_j(t) \delta(x-a_j) \quad (16)$$

(16) 式の解を (5) と同じく次の様に仮定する。

$$\left. \begin{aligned} w(x, t) &= \sum_{n=1}^N y_n(x) \sin(p_n t + \varepsilon_n), \\ F_j(t) &= \sum_{n=1}^N X_{nj} \sin(p_n t + \varepsilon_n). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

(17) の下式の X_{nj} は第 n 次の振動における $x=a_j$ 点の反力の最大値で未知数である。(17) 式を (16) 式に代入すれば、第 n 次のものについて次式が得られる。

$$EI y_n'''' - p_n^2 \left[\sum_{i=1}^N M_i \delta(x-x_i) \right] y_n - \sum_{j=1}^s X_{nj} \delta(x-a_j) = 0, \quad (18)$$

(18) を Laplace 変換すると前と同じく

$$L[y_n] = \frac{y_n(0)}{s} + \frac{y_n'(0)}{s^2} + \frac{y_n''(0)}{s^3} + \frac{y_n'''(0)}{s^4} + \frac{p_n^2}{EI} \sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i) \frac{e^{s x_i}}{s^4} + \frac{1}{EI} \sum_{j=1}^s X_{nj} \frac{e^{s a_j}}{s^4}, \quad (19)$$

従って $y_n(x)$ は

$$\begin{aligned} y_n(x) &= y_n(0) + y_n'(0)x + \frac{y_n''(0)}{2}x^2 + \frac{y_n'''(0)}{6}x^3 \\ &\quad + \frac{p_n^2}{6EI} \sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i) (x-x_i)^3 u(x-x_i) + \frac{1}{6EI} \sum_{j=1}^s X_{nj} (x-a_j)^3 u(x-a_j), \end{aligned} \quad (20)$$

ここで $u(x-x_i)$ 、 $u(x-a_j)$ は前と同じく step function である。

もし $x=0, l$ にて単純支持ならば

$$\left. \begin{aligned} y_n(0) &= y_n''(0) = 0, \\ y_n(l) &= y_n''(l) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

(21) の上式より (20) 式は,

$$y_n(x) = y_n'(0)x + \frac{y_n'''(0)}{6}x^3 + \frac{p_n^2}{6EI} \sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i) (x-x_i)^3 u(x-x_i) + \frac{1}{6EI} \sum_{j=1}^S X_{nj} (x-a_j)^3 u(x-a_j), \quad (22)$$

(21) 式の下式を (22) 式に代入して $y_n'(0)$, $y_n'''(0)$ について解くと

$$\begin{aligned} y_n'''(0) &= - \left[p_n^2 \sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i) (l-x_i) + \sum_{j=1}^S X_{nj} (l-a_j) \right] / EI l, \\ y_n'(0) &= \left[p_n^2 \sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i) x_i (l-x_i) (2l-x_i) + \sum_{j=1}^S X_{nj} a_j (l-a_j) (2l-a_j) \right] / 6EI l, \end{aligned} \quad (23)$$

(23) 式を (22) に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} 6EI l \cdot y_n(x) &= p_n^2 \left[x \sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i) (l-x_i) (2lx_i - x_i^2 - x^2) + l \sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i) (x-x_i)^3 u(x-x_i) \right] \\ &\quad + x \sum_{j=1}^S X_{nj} (l-a_j) (2la_j - a_j^2 - x^2) + l \sum_{j=1}^S X_{nj} (x-a_j)^3 u(x-a_j), \end{aligned} \quad (24)$$

(24) 式に $x=a_k-\varepsilon$ を代入し $\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば支点上で変位がないという条件は次式となる。

$$\begin{aligned} p_n^2 \left[a_k \sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i) (l-x_i) (2lx_i - x_i^2 - a_k^2) + l \sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i) (a_k-x_i)^3 u(a_k-x_i) \right] \\ + a_k \sum_{j=1}^S X_{nj} (l-a_j) (2la_j - a_j^2 - a_k^2) + l \sum_{j=1}^{k-1} X_{nj} (a_k-a_j)^3 u(a_k-a_j) = 0 \quad (k=1 \sim S) \end{aligned} \quad (25)$$

次に前と同様に (24) 式に $x=x_r-\varepsilon$ を代入し, $\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば次式が得られる。

$$\begin{aligned} -6EI l \cdot y_n(x_r) + p_n^2 \left[x_r \sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i) (l-x_i) (2lx_i - x_i^2 - x_r^2) + l \sum_{i=1}^{r-1} M_i y_n(x_i) (x_r-x_i)^3 u(x_r-x_i) \right] \\ + x_r \sum_{j=1}^S X_{nj} (l-a_j) (2la_j - a_j^2 - x_r^2) + l \sum_{j=1}^S X_{nj} (x_r-a_j)^3 u(x_r-a_j) = 0 \quad (r=1 \sim N) \end{aligned} \quad (26)$$

$S+N$ 式の方程式 (25), (26) がすべて 0 でない $X_{nj} (j=1 \sim S)$, 及び $y_n(x_i) (i=1 \sim N)$ を有する為にはそれら係数行列が 0 でなければならない。即ち固有値 p_n を決定する係数行列式が (25), (26) 両式から得られる。又 p_n が求まれば, $y_n(x_i)$, X_{nj} の比が決定される。

以上の理論の正当性を確認する為 Fig. 5 に示す 2 径間連続梁を例に取ってみよう。この場合は, $N=5$, $S=1$ で, x_i , a_j は

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= l/7, & x_2 &= 2l/7, & x_3 &= 3l/7, \\ x_4 &= 5l/7, & x_5 &= 6l/7 \\ a_1 &= 4l/7 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

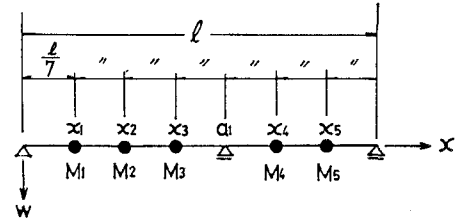


Fig. 5.

$S=1$ であるから (25) 式は次式のみとなる。

$$p_n^2 \left[a_1 \sum_{i=1}^5 M_i y_n(x_i) (l-x_i) (2lx_i - x_i^2 - a_1^2) + l \sum_{i=1}^3 M_i y_n(x_i) (a_1-x_i)^3 \right] + a_1 X_{n1} (l-a_1) (2la_1 - a_1^2 - x_1^2) = 0, \quad (28)$$

(28) 式に (27) を代入して X_{n1} について解くと,

$$X_{n1} = - \frac{p_n^2}{288} \left[117M_1 y_n(x_1) + 216M_2 y_n(x_2) + 279M_3 y_n(x_3) + 232M_4 y_n(x_4) + 128M_5 y_n(x_5) \right], \quad (29)$$

次に (26) 式は $r=1$ に対して,

$$-6EI l \cdot y_n(x_1) + p_n^2 x_1 \sum_{i=1}^5 M_i y_n(x_i) (l-x_i) (2lx_i - x_i^2 - x_1^2) + x_1 X_{n1} (l-a_1) (2la_1 - a_1^2 - x_1^2) = 0,$$

上式に (27) 及び X_{n1} に (29) 式を代入すれば

$$(2349M_1 - 1/7 p_n^2) y_n(x_1) + 2616M_2 y_n(x_2) + 1407M_3 y_n(x_3) - 600M_4 y_n(x_4) - 480M_5 y_n(x_5) = 0, \quad (30)$$

$r=2$ に対して (26) 式は

$$-6EI \cdot y_n(x_2) + p_n^2 \left[M_1 y_n(x_1) \left\{ l(x_2 - x_1)^3 + x_2(l - x_1)(2lx_1 - x_1^2 - x_2^2) \right\} \right. \\ \left. + x_2 \sum_{i=2}^5 M_i y_n(x_i) (l - x_i) (2lx_i - x_i^2 - x_2^2) \right] + x_2 X_{n1} (l - a_1) (2la_1 - a_1^2 - x_2^2) = 0,$$

前と同じ装作を行なえば

$$2616M_1 y_n(x_1) + (3648M_2 - 1/\gamma p_n^2) y_n(x_2) + 2184M_3 y_n(x_3) - 960M_4 y_n(x_4) - 768M_5 y_n(x_5) = 0, \quad (31)$$

$r=3$ に対して (26) 式は

$$-6EI \cdot y_n(x_3) + p_n^2 \left[\sum_{i=1}^2 M_i y_n(x_i) \left\{ l(x_3 - x_i)^3 + x_3(l - x_i)(2lx_i - x_i^2 - x_3^2) \right\} \right. \\ \left. + x_3 \sum_{i=3}^5 M_i y_n(x_i) (l - x_i) (2lx_i - x_i^2 - x_3^2) \right] + x_3 X_{n1} (l - a_1) (2la_1 - a_1^2 - x_3^2) = 0,$$

即ち、

$$1407M_1 y_n(x_1) + 2184M_2 y_n(x_2) + (1701M_3 - 1/\gamma p_n^2) y_n(x_3) - 840M_4 y_n(x_4) - 672M_5 y_n(x_5) = 0, \quad (32)$$

$r=4$ に対して (26) 式は、

$$-6EI \cdot y_n(x_4) + p_n^2 \left[\sum_{i=1}^3 M_i y_n(x_i) \left\{ l(x_4 - x_i)^3 + x_4(l - x_i)(2lx_i - x_i^2 - x_4^2) \right\} \right. \\ \left. + x_4 \sum_{i=4}^5 M_i y_n(x_i) (l - x_i) (2lx_i - x_i^2 - x_4^2) \right] + X_{n1} \left\{ x_4(l - a_1) (2la_1 - a_1^2 - x_4^2) + l(x_4 - a_1)^3 \right\} = 0,$$

即ち、

$$-600M_1 y_n(x_1) - 960M_2 y_n(x_2) - 840M_3 y_n(x_3) + (3776M_4/3 - 1/\gamma p_n^2) y_n(x_4) + 3424M_5 y_n(x_5)/3 = 0, \quad (33)$$

$r=5$ に対して (26) 式は

$$-6EI \cdot y_n(x_5) + p_n^2 \left[\sum_{i=1}^4 M_i y_n(x_i) \left\{ l(x_5 - x_i)^3 + x_5(l - x_i)(2lx_i - x_i^2 - x_5^2) \right\} \right. \\ \left. + M_5 y_n(x_5) x_5(l - x_5) (2lx_5 - 2x_5^2) \right] + X_{n1} \left\{ l(x_5 - a_1)^3 + x_5(l - a_1) (2la_1 - a_1^2 - x_5^2) \right\} = 0,$$

即ち、

$$-480M_1 y_n(x_1) - 768M_2 y_n(x_2) - 672M_3 y_n(x_3) + 3424M_4 y_n(x_4)/3 + (4352M_5/3 - 1/\gamma p_n^2) y_n(x_5) = 0, \quad (34)$$

(30)~(34) 式で $r = (l/\gamma)^3/4032EI$ である。従って p_n^2 を求める為の係数行列式は次の様になる。ただし $\lambda = 1/\gamma p_n^2$ とする。

$$\begin{vmatrix} 2349M_1 - \lambda & 2616M_2 & 1407M_3 & -600M_4 & -480M_5 \\ 2616M_1 & 3648M_2 - \lambda & 2184M_3 & -960M_4 & -768M_5 \\ 1407M_1 & 2184M_2 & 1701M_3 - \lambda & -840M_4 & -672M_5 \\ -600M_1 & -960M_2 & -840M_3 & 3776M_4/3 - \lambda & 3424M_5/3 \\ -480M_1 & -768M_2 & -672M_3 & 3424M_4/3 & 4352M_5/3 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (35)$$

(35) 式は従来の α_{ij} を求めて得られる結果と同じものである。又は $y_n(x_i)$ 、即ち固有ベクトルを従来の方法で求めそれを (25) 式 (前の例では (29) 式) に代入して X_{nj} を求め、(24) 式に代入する事により固有振動モードが滑らかな曲線で得られる。

3) 次に断面力について説明する。

$y_n(x)$ が求まれば、 $w(x, t)$ は (5) 又は (17) 式により

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^N y_n(x) \sin(p_n t + \varepsilon_n)$$

$y_n(x)$ は前に述べた様に連続な関数であるから $w(x, t)$ も x の連続な関数である。従って曲げモーメント M 、せん断力 S は、 $-M_i \ddot{w}(x_i, t)$ なる慣性力が梁に作用する外力として計算せずとも、周知の次式によって求まる。

$$M(x, t) = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad S(x, t) = -EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3},$$

即ち,

$$M(x, t) = -EI \sum_{n=1}^N y_n''(x) \sin(p_n t + \varepsilon_n), \quad S(x, t) = -EI \sum_{n=1}^N y_n'''(x) \sin(p_n t + \varepsilon_n).$$

$y_n''(x)$, $y_n'''(x)$ は (11) 又は (24) 式の様な x の代数式であるから簡単に計算する事ができる。

4. 強 制 振 動

理解を容易にする為以下では梁の両端 ($x=0, l$) のみが支持されている構造を対称にしよう。
準備段階としてはじめに自由振動における直交条件について考察する。

1) 直 交 条 件

(6) 式を今一度記すと

$$y_n'''' - (p_n^2/EI) \left[\sum_{i=1}^N M_i \delta(x-x_i) \right] y_n = 0, \quad (36)$$

第 m 次のものについても同じく

$$y_m'''' - (p_m^2/EI) \left[\sum_{i=1}^N M_i \delta(x-x_i) \right] y_m = 0, \quad (37)$$

(36), (37) 式の各々の両辺に y_m, y_n を乗じて 0 から l まで積分すると

$$\int_0^l y_m y_n'''' dx = \frac{p_n^2}{EI} \int_0^l \left[\sum_{i=1}^N M_i \delta(x-x_i) \right] y_n y_m dx \quad (38)$$

$$\int_0^l y_n y_m'''' dx = \frac{p_m^2}{EI} \int_0^l \left[\sum_{i=1}^N M_i \delta(x-x_i) \right] y_n y_m dx \quad (39)$$

(38) から (39) 式を差引くと

$$\int_0^l (y_m y_n'''' - y_n y_m''') dx = \frac{p_n^2 - p_m^2}{EI} \int_0^l \left[\sum_{i=1}^N M_i \delta(x-x_i) \right] y_n y_m dx = \frac{p_n^2 - p_m^2}{EI} \sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i) y_m(x_i) \quad (40)$$

(40) 式の計算は (2) の性質に基づく

一方周知の様に部分積分法により

$$\int_0^l (y_m y_n'''' - y_n y_m''') dx = \left[y_n''' y_m - y_n'' y_m' + y_n' y_m'' - y_n y_m''' \right]_0^l, \quad (41)$$

(41) 式は梁の両端の如何なる境界条件 (固定, ヒンジ, 自由) にも常に 0 である。故に (40), (41) 両式より

$$\sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i) y_m(x_i) = 0 \quad n \neq m, \quad (42)$$

これは即ち従来の直交条件式に他ならない。

2) 強 制 振 動

梁の $x = b_k (k=1 \sim M)$ に $F_k(t)$ なる外力が作用している場合は, 前の連続梁と同様に微分方程式は以下の様になる。

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left[\sum_{i=1}^N M_i \delta(x-x_i) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^M F_k(t) \delta(x-b_k), \quad (43)$$

もし質点の速度に比例する減衰力を考慮する場合は,

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left[\sum_{i=1}^N M_i \delta(x-x_i) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left[\sum_{i=1}^N C_i \delta(x-x_i) \right] \frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{k=1}^M F_k(t) \delta(x-b_k), \quad (44)$$

以下は主として (43) 式について考察する。(43) 式を Modal Analysis によって解く事を考える。即ち $w(x, t)$ を次式の様に表示す。

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^N q_n(t) y_n(x) \quad (45)$$

$y_n(x)$ は固有振動モード (7) 式 (Cantilever では (11) 式) である。(45) を (44) 式に代入すると次式が得られる。

$$EI \cdot \sum_{n=1}^N q_n y_n'''' + \left[\sum_{i=1}^N M_i \delta(x-x_i) \right] \cdot \sum_{n=1}^N \ddot{q}_n y_n = \sum_{k=1}^M F_k(t) \delta(x-b_k), \quad (46)$$

' は x に, $\ddot{}$ は t に関する微分である。

(46) 式に $y_m(x)$ を乗じ 0 から l まで積分すると

$$EI \cdot \sum_{n=1}^N q_n \int_0^l y_n'''' y_m dx + \sum_{n=1}^N \ddot{q}_n \int_0^l \left[\sum_{i=1}^N M_i \delta(x-x_i) \right] y_n y_m dx = \sum_{k=1}^M F_k(t) \int_0^l \delta(x-b_k) y_m(x) dx, \quad (47)$$

(47) 式に (38) 式を代入し, (2) の性質を利用すると

$$\sum_{n=1}^N p_n^2 q_n \left[\sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i) y_m(x_i) \right] + \sum_{n=1}^N \ddot{q}_n \left[\sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i) y_m(x_i) \right] = \sum_{k=1}^M F_k(t) y_m(b_k), \quad (48)$$

即ち

$$\sum_{n=1}^N (\ddot{q}_n + p_n^2 q_n) \left[\sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i) y_m(x_i) \right] = \sum_{k=1}^M F_k(t) y_m(b_k), \quad (49)$$

直交条件 (42) 式より (49) 式は次式となる。

$$\ddot{q}_n + p_n^2 q_n = \frac{1}{\sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i)^2} \cdot \sum_{k=1}^M F_k(t) y_n(b_k), \quad (50)$$

(50) 式は従来の曲げ振動の式と類似のものである。(50) 式の強制項のみの解は, 周知の次式である。

$$q_n(t) = \frac{1}{p_n \sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i)^2} \int_0^t \left[\sum_{k=1}^M F_k(\tau) y_n(b_k) \right] \sin[p_n(t-\tau)] d\tau \quad (51)$$

故に $w(x, t)$ は以下の様になる。

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^N \frac{y_n(x)}{p_n \sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i)^2} \int_0^t \left[\sum_{k=1}^M F_k(\tau) y_n(b_k) \right] \sin[p_n(t-\tau)] d\tau \quad (52)$$

上式で $x=x_i$ とすれば前に 3. で述べた様に $y_n(x_i)$ はその点の固有ベクトルであるから (52) 式は従来の解に一致し, $y_n(x)$ に (7) 式 (Cantilever では (11) 式) を代入すれば, $w(x, t)$ は梁の任意点の応答を与える。従って梁の曲げモーメント M , せん断力 S は次式で与えられる。

$$M(x, t) = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad S(x, t) = -EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (53)$$

外力が地震動 $\ddot{z}$ の場合 (43) 式の右辺は

$$-\ddot{z} \cdot \sum_{i=1}^N M_i \delta(x-x_i)$$

となり, 従って (52) 式は, 次の様になる。

$$w(x, t) = - \sum_{n=1}^N \frac{y_n(x)}{p_n} \frac{\sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i)}{\sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i)^2} \int_0^t \ddot{z}(\tau) \sin[p_n(t-\tau)] d\tau \quad (54)$$

地震動を正弦波と仮定すると

$$z = u \sin \omega t, \quad \ddot{z} = -\omega^2 u \sin \omega t \quad (55)$$

(55) を (54) 式に代入すれば

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^N \frac{\omega^2 u y_n(x)}{p_n (\omega^2 - p_n^2)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i)}{\sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i)^2} \cdot P(n, t)$$

ここに

$$P(n, t) = p_n \sin \omega t - \omega \sin p_n t \quad (56)$$

もし梁が Cantilever であれば $y_n(x)$ に (11) 式を代入し、(53) 式によって断面力は次式となる。

$$M(x, t) = - \sum_{n=1}^N \frac{\omega^2 u p_n \left[\sum_{\ell=1}^N M_\ell y_n(x_\ell) (x_\ell - x) + \sum_{\ell=1}^N M_\ell y_n(x_\ell) (x - x_\ell) u(x - x_\ell) \right]}{\omega^2 - p_n^2} \cdot \frac{\sum_{\ell=1}^N M_\ell y_n(x_\ell)}{\sum_{\ell=1}^N M_\ell y_n(x_\ell)^2} \cdot P(n, t),$$

$$S(x, t) = - \sum_{n=1}^N \frac{\omega^2 u p_n \left[- \sum_{\ell=1}^N M_\ell y_n(x_\ell) + \sum_{\ell=1}^N M_\ell y_n(x_\ell) u(x - x_\ell) \right]}{\omega^2 - p_n^2} \cdot \frac{\sum_{\ell=1}^N M_\ell y_n(x_\ell)}{\sum_{\ell=1}^N M_\ell y_n(x_\ell)^2} \cdot P(n, t), \quad (57)$$

$u(x - x_\ell)$ は前に述べた様に step function である。(57) 式からわかる様に曲げモーメント $M(x, t)$ は x の一次関数であり、せん断力 $S(x, t)$ は質点と質点の間で一定である。これは多質系の振動であるから当然の事である。(57) 式は又周知の次式と同値である。

$$M(x, t) = - \sum_{\ell=r}^N M_\ell \left\{ \ddot{w}(x_\ell) + \ddot{z} \right\} l_\ell, \quad S(x, t) = - \sum_{\ell=r}^N M_\ell \left\{ \ddot{w}(x_\ell) + \ddot{z} \right\} \quad (58)$$

l_ℓ は $x = x$ 点から $x = x_\ell$ 点までの距離である。

5. Cantilever (or Tower) の応答計算例

外径 60 cm, 内径 58 cm, 長さ 30 m の鋼製 Cantilever の固定端に正弦波地動が作用する時の応答計算結果を示す。この Cantilever を 5 質点系に置換すると 3. の (15) 式が利用できて第 1 次から第 3 次までの固有週期は以下の様である。ただし Cantilever の重さを W とすると (15) 式で $M_{\ell=1 \sim 4} = W/5g = 0.89083$, $M_5 = W/10g = 0.44542 \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-1} \text{ sec}^2$ である。

$$\begin{aligned} \text{第 1 次固有振動周期} &= 1.533 \text{ sec} & (p_1 = 4.098 \text{ rad} \cdot \text{sec}^{-1}) \\ \text{第 2 次固有振動周期} &= 0.255 \text{ sec} & (p_2 = 24.609 \text{ rad} \cdot \text{sec}^{-1}) \\ \text{第 3 次固有振動周期} &= 0.095 \text{ sec} & (p_3 = 66.411 \text{ rad} \cdot \text{sec}^{-1}) \end{aligned} \quad (59)$$

固有振動モード $y_n(x_\ell)$ は 3 次まで示すと以下の様である。

$$\begin{aligned} y_1(x_1) : y_1(x_2) : y_1(x_3) : y_1(x_4) : y_1(x_5) \\ = 1 : 3.606 : 7.251 : 11.44 : 15.81, \\ y_2(x_1) : y_2(x_2) : y_2(x_3) : y_2(x_4) : y_2(x_5) \\ = 1 : 2.327 : 2.140 : 0.024 : -3.185, \\ y_3(x_1) : y_3(x_2) : y_3(x_3) : y_3(x_4) : y_3(x_5) \\ = 1 : 1.023 : -0.622 : -0.895 : 1.273, \end{aligned} \quad (60)$$

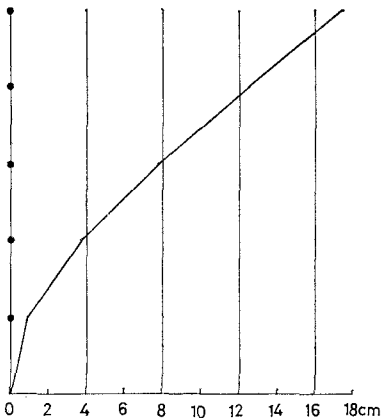


Fig. 6. Maximum Deflection Diagram

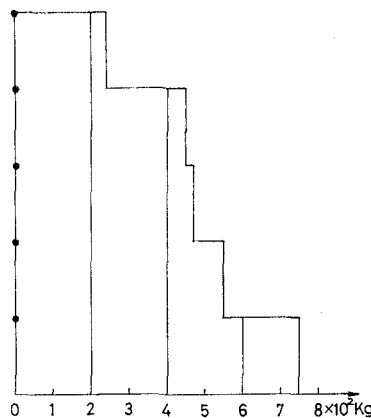


Fig. 7. Maximum S. Force Diagram

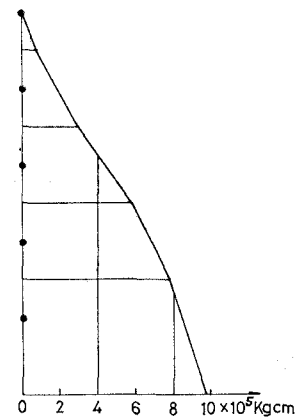


Fig. 8. Maximum B. Moment Diagram

外力の正弦波として $\xi_{\max}=300$ gal で週期 $T=0.6$ sec のものを考え、梁各点の変位及び断面力の最大応答図を Fig. 6~8 に示す。

試みに本論文集掲載の北大渡辺昇教授の加速度応答スペクトル曲線を用いてその結果を比較検討してみよう。

第 i 番目の質点の絶対加速度は文献 2) に依れば

$$\ddot{y}_i + \ddot{\xi} = \sqrt{\sum_{n=1}^N \left\{ y_n(x_i) \mu_n S_A(T_n, \beta_n) \right\}^2}, \quad (61)$$

Cantilever の場合は固定端のせん断力、曲げモーメントは各々次の様に与えられる。

$$S_{x=0} = \sqrt{\sum_{n=1}^N \left\{ \sum_{i=1}^N M_i y_n(x_i) \mu_n S_A(T_n, \beta_n) \right\}^2}, \quad (62)$$

$$M_{x=0} = \sqrt{\sum_{n=1}^N \left\{ \sum_{i=1}^N l_i M_i y_n(x_i) \mu_n S_A(T_n, \beta_n) \right\}^2}, \quad (63)$$

μ_n は $n=3$ までは (60) 式を用いれば以下の様になる。

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\sum_{i=1}^5 M_i y_1(x_i)}{\sum_{i=1}^5 M_i y_1(x_i)^2} = \frac{31.2042}{332.4902}, \\ \mu_2 &= \frac{\sum_{i=1}^5 M_i y_2(x_i)}{\sum_{i=1}^5 M_i y_2(x_i)^2} = \frac{3.8984}{16.0664}, \\ \mu_3 &= \frac{\sum_{i=1}^5 M_i y_3(x_i)}{\sum_{i=1}^5 M_i y_3(x_i)^2} = \frac{1.1416}{4.0444}, \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

渡辺教授の論文の図-10 の $\xi_{\max}=100$ gal, $T_d=0.6$ sec の正弦波に対するスペクトル図と本文 (59) 及び $\beta_n=0$ より、

$$\left. \begin{aligned} S_A(T_1, \beta_1) &= 65 \times 300 / 100 = 195 \text{ gal}, \\ S_A(T_2, \beta_2) &= 180 \times 300 / 100 = 540 \text{ gal}, \\ S_A(T_3, \beta_3) &= 105 \times 300 / 100 = 315 \text{ gal}, \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

従って

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \mu_1 S_A(T_1, \beta_1) \right\}^2 &= 356.00 \text{ gal}^2, \\ \left\{ \mu_2 S_A(T_2, \beta_2) \right\}^2 &= 17768.07 \text{ gal}^2, \\ \left\{ \mu_3 S_A(T_3, \beta_3) \right\}^2 &= 7905.70 \text{ gal}^2, \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

前に述べたが各質点の質量 M_i を再び記すと

$$M_{i=1 \sim 4} = 0.89083, \quad M_5 = 0.44542 \quad (\text{kg} \cdot \text{cm}^{-1} \text{ sec}^2)$$

以上より (62) 式のせん断力 $S_{x=0}$ 、曲げモーメント $M_{x=0}$ は

$$S_{x=0} = 0.89083 \times \left\{ 356.00 \times 31.2042^2 + 17168.07 \times 3.8984^2 + 7905.70 \times 1.1416^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \doteq 700 \text{ kg}$$

$$M_{x=0} = 0.89083 \times 3000 / 5 \times \left\{ 356.00 \times 115.260^2 + 17168.07 \times 4.2071^2 + 7905.70 \times 0.7797^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \doteq 1.200 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{cm},$$

これに対し厳密解の最大値は、 $S_{x=0}=750$ kg, $M_{x=0}=9.80 \times 10^5$ kg·cm であるから近似解はせん断力において 6.7% 小さく、曲げモーメントにおいては 22% 大きい。これに対して (61) 式によって各質点の最大加速度を求め、それらが同時に同じ方向に作用すると考えた場合は途中の計算は省くが、

$$S_{x=0} = \sum_{i=1}^5 M_i (\ddot{y}_i + \ddot{\xi}) = 0.89083 \times 1294.4 = 1153 \text{ kg}$$

$$M_{x=0} = \sum_{i=1}^5 M_i (\ddot{y}_i + \ddot{\xi}) l_i = 0.89083 \times 23.996.628 = 2.135 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

となり、かなり大きな値となる。この点について詮索する事は本小論の目的ではないが、構造物を多質点系にモデル化しスペクトル曲線を用いて応答値を推定する場合、質点数が少ない程正解値に近いのか又は質点数を多くすればする程正解値に近づくのかという事が今後十分論議されなければならない。

6. あとがき

以上 Delta Function Method の曲げ剛性一定の簡単な構造の固有値決定行列式の求め方及び強制振動への応用について述べた。又曲げとねじりの連成する曲線梁等にも適用され得る事を確めた。しかし本論文では省略したが、各質点の速度に比例し外力として作用する粘性減衰のある場合は解析可能だが (本文 (44) 式), 内力として作用する構造減衰のある場合は解析困難である等の欠点がある。

終りに本小論作成にあたり北大渡辺昇教授の種々の有用な御助言に対し感謝いたします。

文 献

- 1) Transactions of the ASME (JUNE 1965), H. H. PAN: 「Transverse Vibration of an Euler Beam Carrying a System of Heavy Bodies」.
- 2) 土木学会: 振動便覧.
- 3) 本論文集 渡辺 昇: 「地動波周期が構造物の応答スペクトルに及ぼす影響について」.