

高橋脚とタワーの地震応答解析について

正員 渡 辺 昇*
正員 多 田 和 夫**
学生員 ○川 口 雄 常***

1. ま え が き

構造物の動的解析は大別して次の2つに分けられる。

- 統計的に求められた応答 スペクトル図をもとにして構造物の応答を計算する方法。
- 地動による構造物の応答を直接計算する方法。

最近、我国に於いても各地に強震計が設置されて、各地の地震波の記録データが数多く整理され、又地球物理学の発達により地盤それ自体の卓越周期や振動性状が、明らかにされつつあり、一方電子計算機の発達に伴い、その地点に最も適した強震記録を用いて直接積分による多質点系の応答解析が可能になって来た。

以上の考え方から (b) の方法による、構造物を多質点系に置き換え任意の強震データを作用させた場合の応答解析を行なった。

2. 理論の概要

2-1 多自由度系の振動の一般理論

系が釣合の位置にあるとき0となる様な一般座標 $q_1, q_2, \dots, q_n$ を用いると、系の運動エネルギー、ポテンシャルエネルギー、散逸エネルギーは

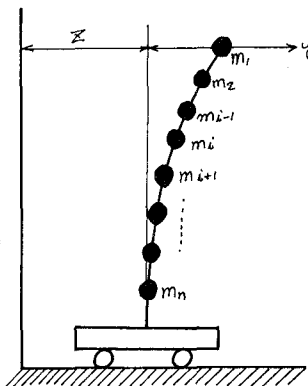


図-1 n 質点系振動モデル

$$\left. \begin{aligned} 2V &= k_{11}q_1^2 + k_{22}q_2^2 + \dots \\ &\quad + 2k_{12}q_1q_2 + \dots = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij}q_iq_j \\ 2T &= m_{11}\dot{q}_1^2 + m_{22}\dot{q}_2^2 + \dots \\ &\quad + 2m_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dots = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \\ 2F &= c_{11}\dot{q}_1^2 + c_{22}\dot{q}_2^2 + \dots \\ &\quad + 2c_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dots = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Lagrange の運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_K} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_K} + \frac{\partial V}{\partial q_K} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_K} = Q_K \quad (2)$$

式 (1) を式 (2) に代入して

$$\left. \begin{aligned} m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + \dots + c_{11}\dot{q}_1 \\ + c_{12}\dot{q}_2 + \dots + k_{11}q_1 + k_{12}q_2 + \dots = Q_1 \\ \vdots \\ m_{n1}\ddot{q}_1 + m_{n2}\ddot{q}_2 + \dots + c_{n1}\dot{q}_1 \\ + c_{n2}\dot{q}_2 + \dots + k_{n1}q_1 + k_{n2}q_2 + \dots = Q_n \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

図-1 の様な振動系モデルを考え、各質量は絶対速度に比例する粘性減衰が働くとするれば、式 (3) は

$$\left. \begin{aligned} m_1\ddot{y}_1 + k_{11}y_1 + k_{12}y_2 + k_{13}y_3 + \dots + c_{11}\dot{y}_1 = Q_1 \\ m_2\ddot{y}_2 + k_{21}y_1 + k_{22}y_2 + k_{23}y_3 + \dots + c_{22}\dot{y}_2 = Q_2 \\ \vdots \\ m_n\ddot{y}_n + k_{n1}y_1 + k_{n2}y_2 + \dots \\ + k_{n3}y_3 + \dots + c_{n1}\dot{y}_1 = Q_n \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

マトリックス表示すれば、式 (4) は

$$[m] \{\ddot{y}\} + [k] \{y\} + [c] \{\dot{y}\} = \{Q\} \quad (5)$$

ここで

$$\begin{aligned} [m] &= \begin{bmatrix} m_1 & & 0 \\ & m_2 & \\ & & m_3 \\ 0 & & & m_n \end{bmatrix} & [k] &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & & \\ & & \ddots & \\ k_{n1} & & & k_{nn} \end{bmatrix} \\ [c] &= \begin{bmatrix} c_1 & & 0 \\ & c_2 & \\ & & c_3 \\ 0 & & & c_n \end{bmatrix} & \{Q\} &= \begin{bmatrix} m_1\ddot{x} \\ m_2\ddot{x} \\ \vdots \\ m_n\ddot{x} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

* 北海道大学教授 工博

** 日立造船株式会社 工修

*** 北海道大学大学院

撓み $\{y\}$ を正規固有振動形 $[X]$ で展開すると

$$\{y\} = [X] \cdot \{\xi\} \quad (6)$$

式 (6) を式 (5) に代入すると

$$[m][X]\{\ddot{\xi}\} + [k][X]\{\xi\} + [c][X]\{\dot{\xi}\} = \{Q\} \quad (7)$$

両辺に $[X]^T$ を左からかけると

$$[X]^T[m][X]\{\ddot{\xi}\} + [X]^T[k][X]\{\xi\} + [X]^T[c][X]\{\dot{\xi}\} = [X]^T\{Q\} \quad (8)$$

$\{\ddot{\xi}\}$, $\{\dot{\xi}\}$ の係数は $[m]$, $[k]$ が対称マトリックスである故直交条件より, $[X]^T[m][X] = [M]^D$, $[X]^T[k][X] = [K]^D$ なる diagonal matrix とする。

式 (7) は

$$[M]^D\{\ddot{\xi}\} + [K]^D\{\xi\} + [\mu]\{\dot{\xi}\} = \{\varphi\} \quad (9)$$

$\{\xi\}$ の係数 $[\mu]$ に於いて $\mu_{ii}\xi_i$ 項だけを考えその他を無視すると $[\mu]$ も diagonal matrix となり式 (8) は n 個の自由度系の式で表わされる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + 2h_1\omega_1\dot{\xi}_1 + \omega_1^2\xi_1 &= -\beta_1\ddot{z} \\ \ddot{\xi}_2 + 2h_2\omega_2\dot{\xi}_2 + \omega_2^2\xi_2 &= -\beta_2\ddot{z} \\ &\vdots \\ \ddot{\xi}_n + 2h_n\omega_n\dot{\xi}_n + \omega_n^2\xi_n &= -\beta_n\ddot{z} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \omega_{ii}^2 &= \frac{K_{ii}}{M_{ii}} \quad (\text{固有振動数}) \\ h_{ii} &= \frac{\mu_{ii}}{2M_{ii}\omega_{ii}} \quad (\text{広義の減衰定数}) \\ \beta_{ii} &= \frac{\sum_{j=1}^n m_{ij}X_{jn}}{\sum_{j=1}^n m_{ij}X_{jn}^2} \quad (\text{刺激係数}) \\ M_{ii} &= \sum_{j=1}^n m_{ij} \cdot X_{jn}^2 \quad (\text{換算質量}) \\ K_{ii} &= \left(\sum_{j=1}^n m_{ij} \cdot X_{jn}^2 \right) \cdot \omega_n^2 \quad (\text{換算バネ定数}) \\ \mu_{ii} &= \sum_{j=1}^n c_{ij}X_{jn}^2 \quad (\text{換算減衰係数}) \\ \varphi_{ii} &= - \left(\sum_{j=1}^n m_{ij} \cdot X_{jn} \right) \cdot \ddot{z} \quad (\text{換算外力}) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

これにより, それぞれの規準座標について, 一自由度系の方程式に還元された強制減衰振動の解 $\{\xi\}$, $\{\dot{\xi}\}$, $\{\ddot{\xi}\}$ を求め式 (6) によってもとの一般座標の応答 $\{y\}$, $\{\dot{y}\}$, $\{\ddot{y}\}$ に変換する。すなわち

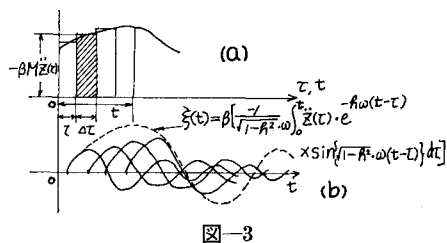
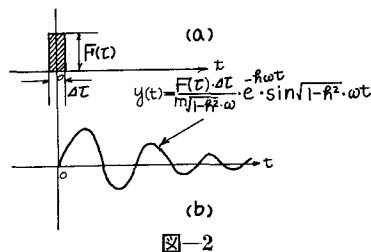
$$\left. \begin{aligned} y_i &= \sum_{j=1}^n X_{ij} \cdot \xi_j \\ \dot{y}_i &= \sum_{j=1}^n X_{ij} \cdot \dot{\xi}_j \\ \ddot{y}_i \ddot{z} &= \sum_{j=1}^n X_{ij} (\ddot{\xi}_j + \beta_{ij}\ddot{z}) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

3. デジタル計算機に対するプログラム化

式 (10) の応答は

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= \beta_i \xi_{i0} = \beta_i \left[\frac{-1}{\sqrt{1-h_{ii}^2} \cdot \omega_{ii}} \int_0^t \ddot{z}(\tau) \cdot e^{-h_{ii}\omega_{ii}(t-\tau)} \cdot \sin \omega_{ii}\sqrt{1-h_{ii}^2}(t-\tau) d\tau \right] \\ \dot{\xi}_i &= \beta_i \left[\int_0^t \ddot{z}(\tau) e^{-h_{ii}\omega_{ii}(t-\tau)} \cdot \left\{ \frac{h_{ii}}{\sqrt{1-h_{ii}^2}} \cdot \sin \omega_{ii}\sqrt{1-h_{ii}^2}(t-\tau) - \cos \omega_{ii}\sqrt{1-h_{ii}^2}(t-\tau) \right\} d\tau \right] \\ \ddot{\xi}_i &= \beta_i \left[\int_0^t \ddot{z}(\tau) \cdot \omega_{ii} \cdot e^{-h_{ii}\omega_{ii}(t-\tau)} \cdot \left\{ \frac{1-h_{ii}^2}{\sqrt{1-h_{ii}^2}} \sin \omega_{ii}\sqrt{1-h_{ii}^2}(t-\tau) + 2h_{ii} \cos \omega_{ii}\sqrt{1-h_{ii}^2}(t-\tau) \right\} d\tau \right] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

($i=1, 2, \dots, n$)



式 (13) の Duhamel 積分を図-2, 図-3に示するようにインパルスによる応答を利用してデジタルコンピュータで数値積分を行なう。外力としては実測された各地の地震の加速度 $\ddot{z}$ を図-3の様に Δt 時間ごとのインパルスに分けて叩き込む。

今まで述べた解析法を実際にデジタル計算機で計算を行なうための流れ図を図-4に示す。

4. 数値計算例

計算例-1 高橋脚の動的解析

本計算は, 高橋脚の架設途中に於ける地震時の動的解析を行なう。条件は次の通りである。

(1) 高橋脚の橋軸方向の運動を解析した。

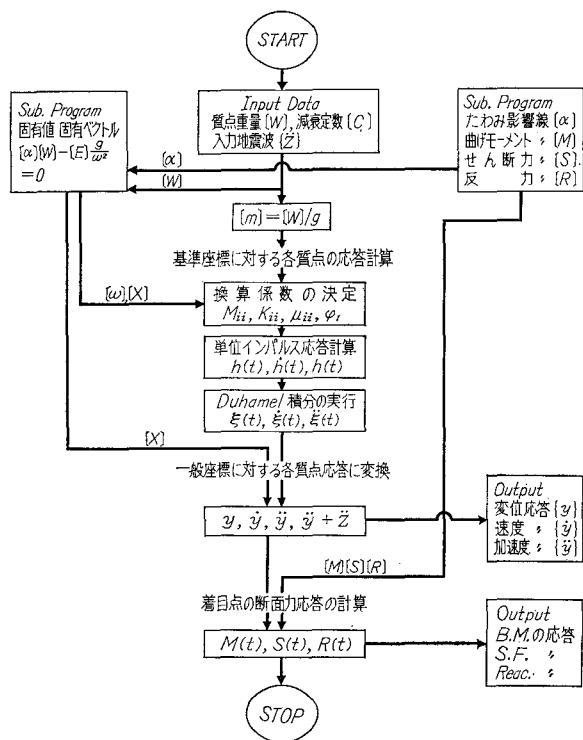


図-4 デジタルコンピュータフローチャート

- (2) 減衰定数は $h=5\%$ を採用した。
- (3) 地震の最大加速度は 200 gal を仮定した。
- (4) 動的解析法は直接数値積分法を採用した。この場合の波形は El Centro の地震加速度 (max 313 gal, 10 秒間, 1/100 秒さきみ) を入力として解析を行なった。

断面諸元は、中央高速道境川橋の断面値を使用し解析を

Normalized Mode

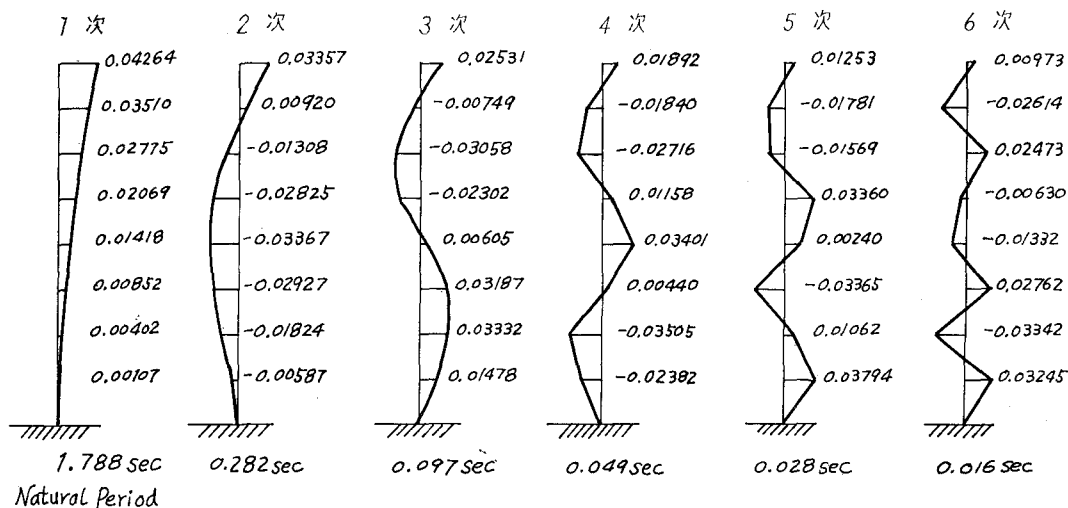
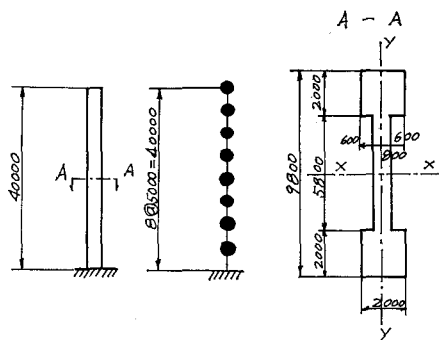


図-6 振動モード



$$\begin{aligned}
 E_c &= 0.21 \times 10^7 \text{ t/m}^2 & E_c I_x &= 43.64 \times 10^7 \text{ tm}^2 \\
 E_c I_y &= 1.43 \times 10^7 \text{ tm}^2 \\
 A &= 17.27 \text{ m}^2 & W &= 17.27 \text{ t} & W/8 &= 215.875 \text{ t}
 \end{aligned}$$

図-5 断面諸元

行なった。振動系モデル、断面諸元を図-5に示す。

計算結果は図-6から図-11に示す。

計算例-2 タワーの動的解析

本計算は、尾道大橋のタワーについて、地震時の動的応答解析を行なった。計算にあたって次の様な条件を採用する。

- (1) 塔の地震時挙動に於いて、橋軸直角方向の運動を解析した。
- (2) 塔頂のケーブルの支持については、ケーブルの橋軸直角方向の剛性は無いものと仮定した。但しケーブル自重の反力は考慮した。
- (3) 振動系の減衰定数 (h) は、振動実験より得られた尾道大橋全橋の減衰定数 $h=5\%$ を採用した。
- (4) 地震の最大加速度は 200 gal を仮定した。
- (5) 動的解析法は直接数値積分法を採用した。この場合

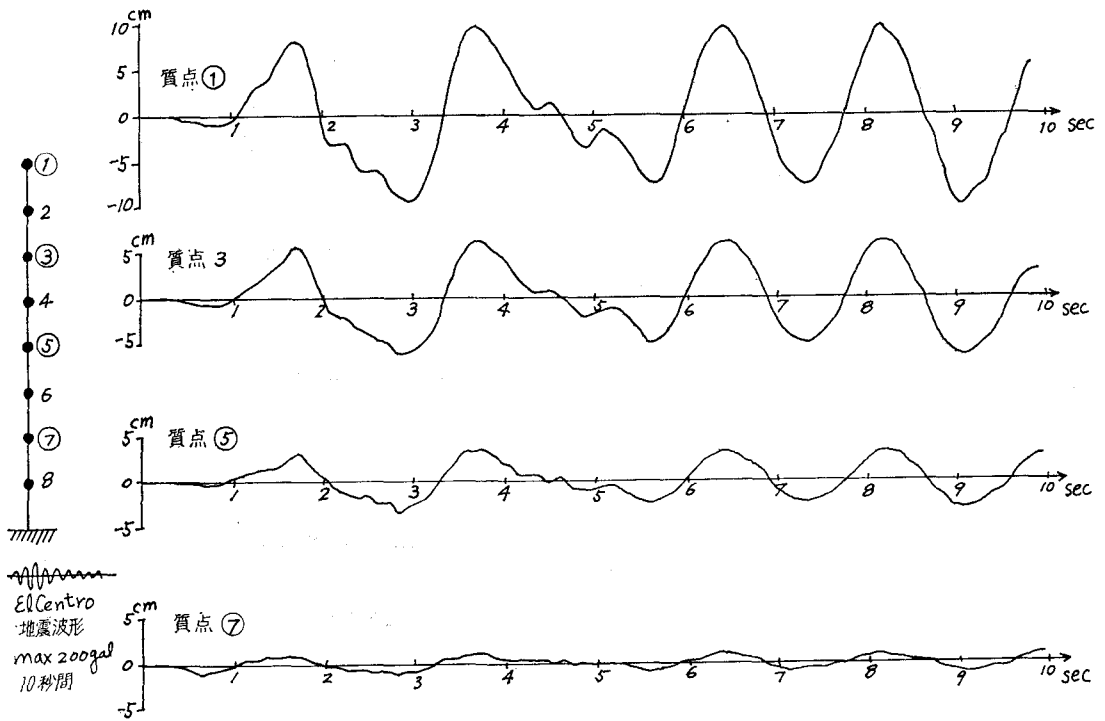


図-7 変位-時間曲線 (デジタルコンピュータによる)

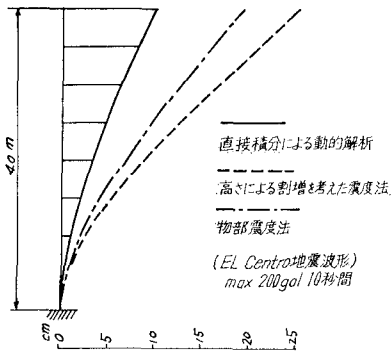


図-8 最大変位図

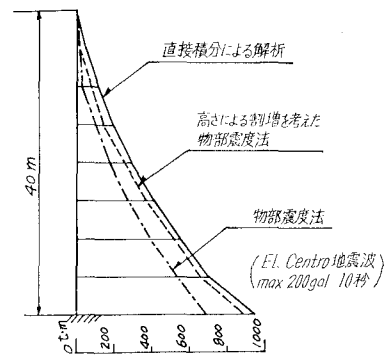


図-10 最大曲げモーメント図

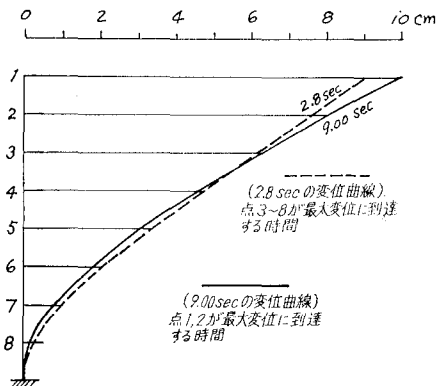


図-9 着目時間変位曲線

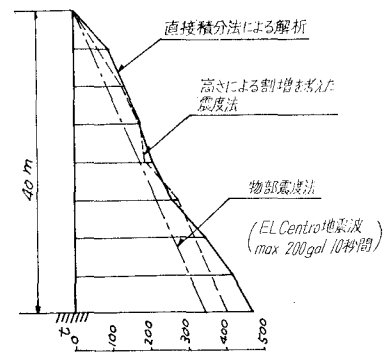
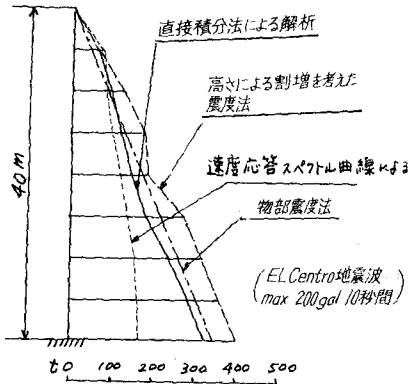
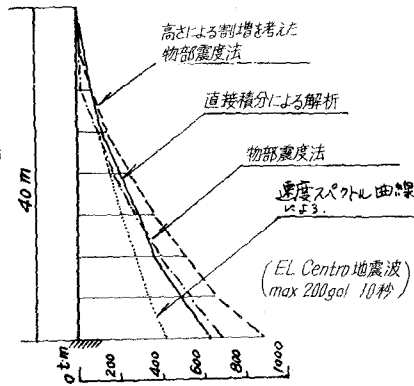


図-11 最大せん断力図

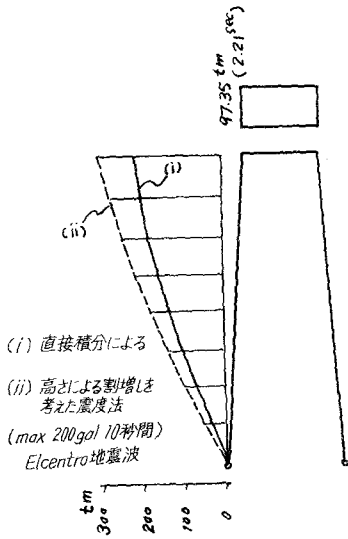
図表の訂正



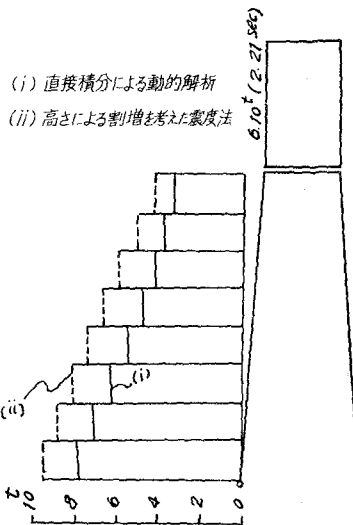
最大応答せん断力図



最大応答曲げモーメント図



最大応答曲げモーメント図



最大応答せん断力図

10.12

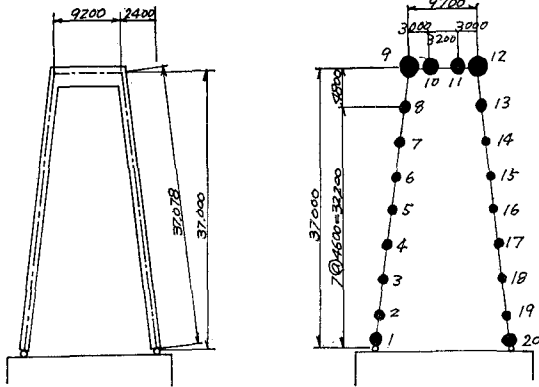


図-12 系のモデル化

の波形は El Centro の地震加速度 (max 313 gal, 10 秒間, 1/100 秒さざみ) を入力として解析を行なった。

尾道大橋の塔を力学的に図-12 の様な構造系にモデル化する。1~9, 12~20 の塔柱部材, 9~12 の塔梁部材は, 各々等断面とみなし, 各質点は水平方向に変位するものと仮定する。計算結果は図-12~図-17 に示す。

5. 解析結果の考察

(i) 変位応答

最大変位をみると直接積分による計算値は物部の震度法による計算値より小さく出ているが, これは本四連絡橋耐震設計指針解説書 p. 23 一自由度系の固有周期と動的係数

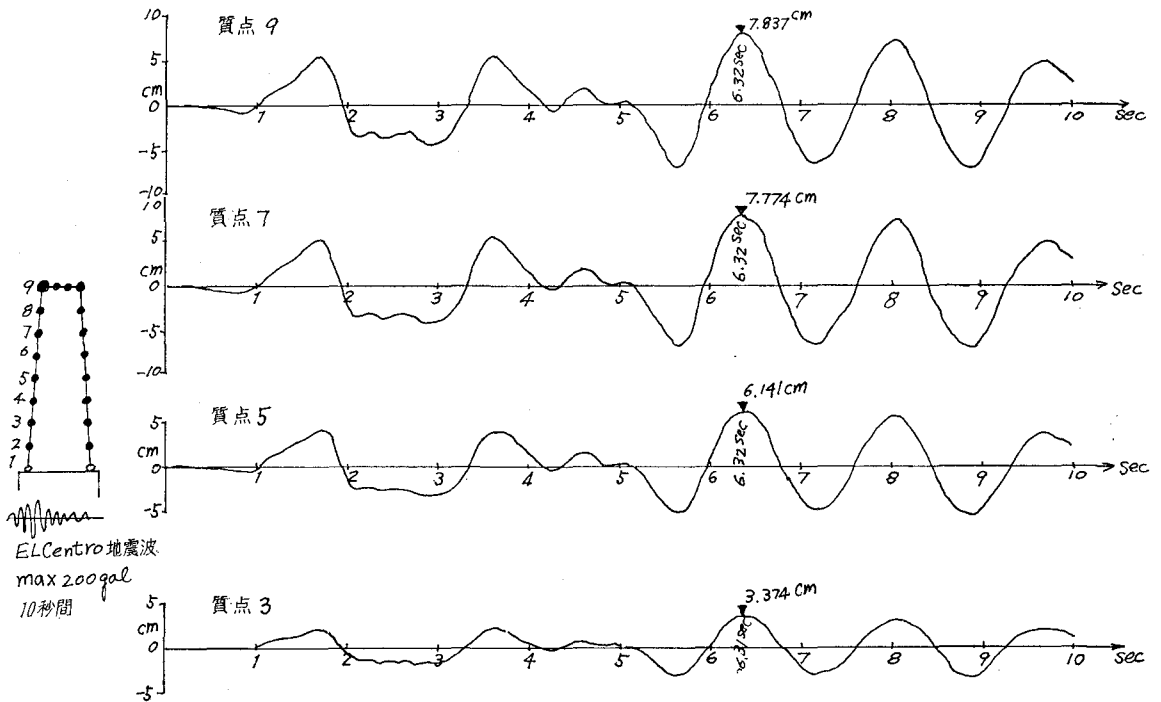


図-13 変位-時間曲線 (デジタルコンピューターによる)

Normalized Mode

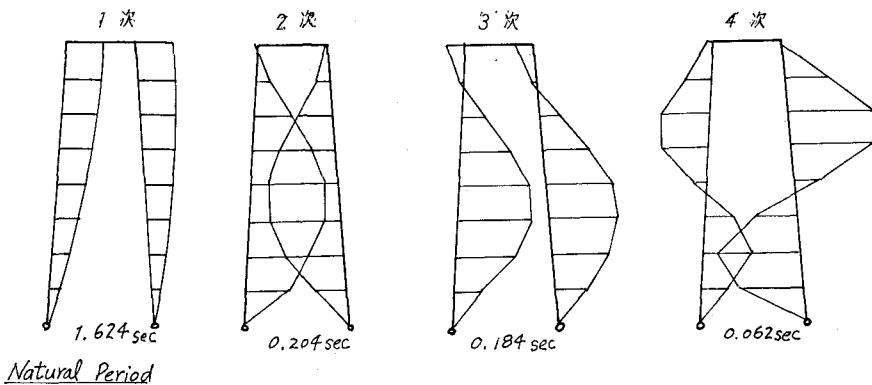


図-14 振動モード

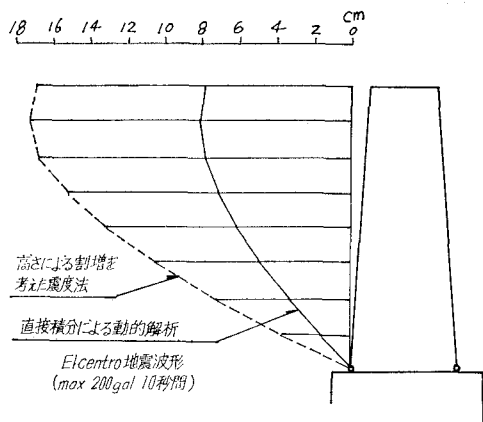


図-15 最大変位図

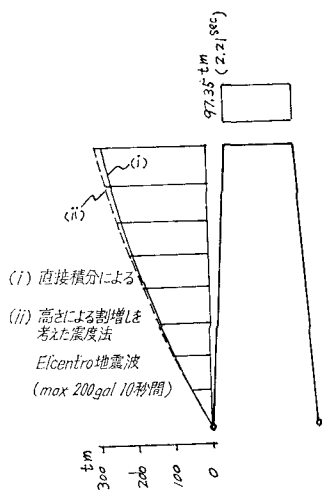


図-16 最大曲げモーメント

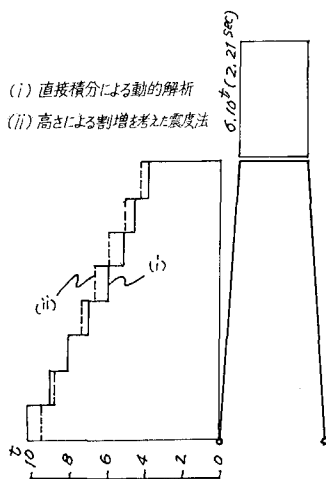


図-17 最大せん断力図

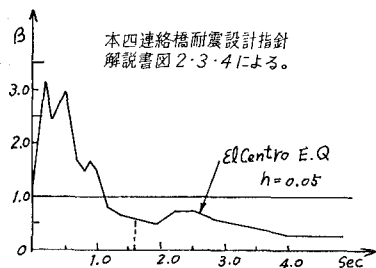


図-18 一自由度系の固有周期と動的係数の関係

動波形は一次振動が卓越している。一次の固有周期は1.62 sec なので上図より加速度倍率は $\beta \div 0.6$ となる。

従ってこのタワーの振動は El Centro 波の卓越周期と固有周期は一致していないので共振現象を起していないことが理解出来る。

(ii) 曲げモーメント、せん断力応答

この場合、高さによる割増しを考慮した震度法による計算値とよく一致しおり、El Centro 地震波の入力では安全と考えて良い。

よく一致している理由は、最大断面力を見るとその発生時間は2.3秒時位で、この時点で変位-時間曲線より高次の波形が入っており、従って固有周期が下り、 β が1に近づいたものと思われる。

(iii) 振動波形

本構造系では、ショックが入ると5秒前後、高次の振動があらわれ、そのため波形に乱れを生じている。

しかし時間の経過と共にこの影響は消え、6秒以後では全体的に一次振動を示し、山と山の間は1.6秒で一次の固有周期と一致していることがわかる。

6. あとがき

本報告では、あらゆる構造物の振動応答解析に適用可能な様に、構造物を Lamped-System に置きかえ解析を行ない、そのプログラム化を試みた。本報告の手法では、構造物の静的な力学性状即ち具体的には、たわみの影響値さえ求めておけば、いかなる構造物に対しても応答解析が可能になる。最後に本解析に当って生じた問題点について述べる。

1. 地震波入力の問題

入力波の選定いかにによって解析結果が左右されるが、如何なる強震記録を選定すれば良いか。他に適当な強震記録がないというだけの理由で El Centro を地質条件の異なる我国でそのまま用いるのに問題がある。

2. 構造物モデルの問題

減衰定数の適確な把握及び非線型領域を考慮した応答解析又構造物と地盤のかかわりあい、即ち地盤のパネ定数

(β : 質点系の最大絶対加速度と地動の最大加速度との比)の関係を表わした 図-18 をみるとその理由が納得できる。

即ち最大変位が生ずる時間は、6.3秒時でこの場合の振

把握及びロッキング性を考慮した解析等問題点は種々ある。

参 考 文 献

本四連絡橋技術調査報告書： 土木学会.

構造物の地震応答解析法： 建設省土研.
土木技術者のための振動便覧： 土木学会.
建築振動学： 田治見 宏.
建設技術者のための振動学： 岡本舜三.
機械振動： 亘理 厚.