

斜張橋の撓度理論について (第二報)

正員 渡 辺 昇*

正員 多 田 和 夫**

学正員 ○工 藤 明***

1. ま え が き

近年、日本においても斜張橋が注目され、その解析、特性が多数¹⁾弾性理論(一次理論)を使用して発表されている。桁、塔の変形、ケーブルの回転による影響を考えた撓度理論(二次理論)では非線形となり、斜張橋を撓度理論で解いた論文²⁾は少ない。ドイツでは斜張橋の架橋例も多く、G. Schreier³⁾は Düsseldorf の North 橋の解析に際し、桁、塔の変形、ケーブルの回転による影響をも考慮した、くり返し計算を基本にする付加荷重の方法を発表した。そこで、その付加荷重の方法を最近完成した尾道大橋⁴⁾に適用して、モーメントとたわみにどの程度影響があらわれるかを調べたので発表する。

2. 理論概要

軸力 H が作用する桁の微分方程式は

$$M''(x) = IM''(x) \pm Hv''(x)$$

或いは

$$M''(x) = IM''(x) \pm \Delta M''(x)$$

上式はモーメントを二回微分したものであるから

$$p(x) = ip(x) \pm \Delta p(x)$$

とも書くことができる。すなわち、軸力の影響が Δp によって、あらわれているのがわかる。この Δp を付加荷重という。

さらに、ケーブルの回転による影響はケーブルの力 S_n が $\Delta \gamma$ だけ回転することにより S となる。従って、 S は S_n と π_n に分解できる。だから、普通の弾性理論による力 S_n の他に、 π_n という力がさらに働くことになり、これを鉛直成分と水平成分にわけた

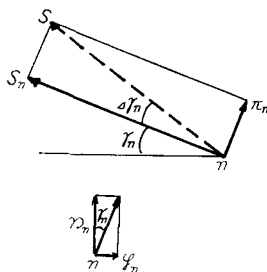


図-1

$$S_n = \pi_n \cos \gamma_n, \quad S_n = \pi_n \sin \gamma_n$$

がケーブルの回転による付加荷重である。

実際の付加荷重はくり返し計算によって求めることができる。例えば図-2のような簡単な斜張橋について考えて見る。

ケーブルの力 $iS_c = S_{cp} + iS_{cp}$ は変形前断面力と釣合っているが、C 点にたわみ rv_c 、回転角 $\Delta \gamma$ が生じて釣合わなくなる。その釣合わない断面力の変化は付加荷重によって起こされる。そこで付加荷重を作用すると、又釣合わなくなる。次に

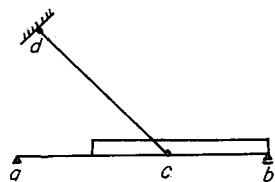


図-2

に変化した付加荷重を求め、桁に作用すると、又釣合わなくなる。これを数回釣合うまで実行する。

弾性理論は撓度理論と次のように区別する。(図-3)

- (1) C 点にケーブルによる軸力が作用しないと考える。
- (2) ケーブルは方向を保つと考える

撓度理論による値は弾性理論の値に追加して求めることができる。弾性理論により求めた変形後の斜張橋 C の点に、次のような力を作用する。(図-4)

- (1) 桁に回転しないケーブル力 iS の水平成分

$$iH = iS \cos \gamma$$

- (2) 回転と回転しないケーブル力の水平成分の差 S'
 回転と回転しないケーブル力の鉛直成分の差 S'
 これらの力 iH' , S' , S' は第一近似付加荷重である。

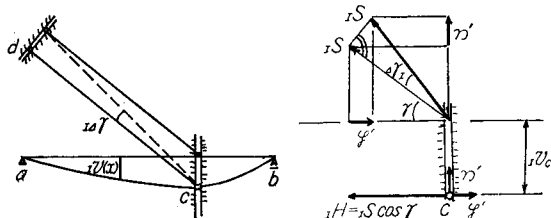


図-3

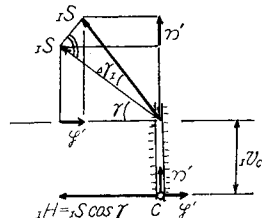


図-4

* 北海道大学工学部教授 工博

** 日立造船株式会社 工修

*** 北海道大学工学部大学院

ここで、 $rH - \mathfrak{B}' = H'$ を荷重に変換しておかなくてはならない。それはケーブルを取って rv_c だけ変形している C 点に H' を作用すると、モーメント $\mathfrak{M}'$ は図-5 のようになる。

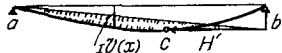


図-5 $\mathfrak{M}'$ -図

このモーメントは、範囲 a~c には等分布荷重 $\varphi'(x)$ と集中荷重 p_a, p_c とに置き換えられる。従って、第一近似付加荷重は集中荷重 $\mathfrak{B}' = p, p' - p'$ 或いは、等分布荷重 $\mathfrak{B}'(x) = \varphi'(x)$ と集中荷重 $\mathfrak{B}'_a, \mathfrak{B}'_c = \mathfrak{B}'_a - \mathfrak{B}'$ である。

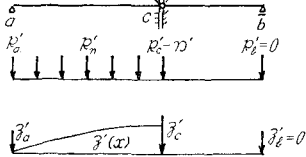


図-6

この付加荷重を弾性理論による影響線に載下して、 $\Delta' S, \Delta' v_c, \Delta \Delta \gamma$ を求める。すると変形しない最初の状態から変形したケーブル力 $rS + \Delta' S$ は $r\Delta \gamma + \Delta \Delta \gamma$ だけ回転する。又、ケーブル取付点 C 点は $rv_c + \Delta' v_c$ だけたわむ。

そこで C 点に、次のような力を作用する。(図-7)

- (1) 回転しないケーブル力 $rS + \Delta' S$ の水平成分 $(rS + \Delta' S) \cos \gamma$
- (2) 回転したケーブル力としないケーブル力の水平成分 $\mathfrak{B}''$ と鉛直成分 $\mathfrak{B}''$

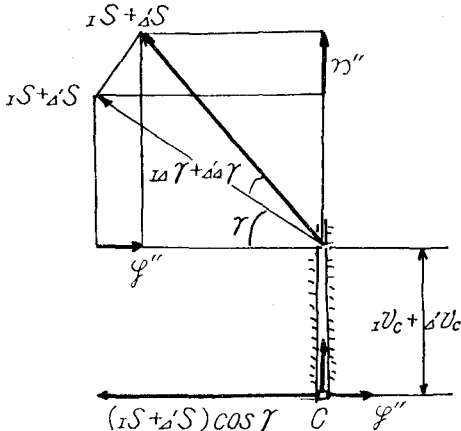


図-7

同様に、第二近似付加荷重は $\mathfrak{B}''$ 、或いは $\mathfrak{B}''(x)$ と $\mathfrak{B}''_a$ は求めることができる。このような操作を数回くり返すことにより最終付加荷重は求まる。従って最終的な断面力は弾性理論影響線に活荷重と付加荷重を作用させて求めることができる。このような考え方は塔にも 90° 変換して適用できる。

一般的な回転角 $r\Delta \gamma^*$ は近似的に 図-8 から明らかなように

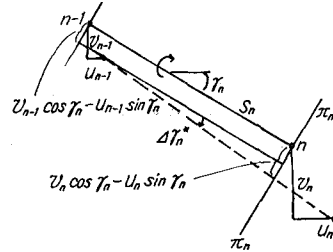


図-8

$$\begin{aligned} r\Delta \gamma_n^* &\doteq \tan r\Delta \gamma_n^* \\ &= \frac{1}{S_n} \left(v_n \cos \gamma_n - u_n \sin \gamma_n - v_{n-1} \cos \gamma_n \right. \\ &\quad \left. + u_{n-1} \sin \gamma_n \right) \\ &= \frac{1}{S_n} \left[(v_n - v_{n-1}) \cos \gamma_n - (u_n - u_{n-1}) \sin \gamma_n \right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

から求めることができる。

同様に

$$\begin{aligned} \Delta' \dots \Delta \gamma_n^* &= \frac{1}{S_n} \left[(v_n' - \Delta' \dots v_{n-1}') \cos \gamma_n \right. \\ &\quad \left. - (\Delta' \dots u_n - \Delta' \dots u_{n-1}) \sin \gamma_n \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

又、軸力を荷重に換算する場合、まず $\mathfrak{M}'$ -図を作成しなければならない。しかしこのモーメントは変形後のたわみに関係しているので、どのような支承条件で計算してもかまわない。だから構造系をなるべく簡単になるように考え、モーメントを求める。たわみ図とモーメント図、 $\mathfrak{M}'$ -

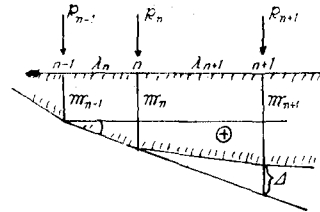


図-9

図は普通分割して、一点一点もとめるので置換荷重 p_n は次のようである。

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{A}{\lambda_{n+1}} = \frac{1}{\lambda_{n+1}} \left[\mathfrak{M}_{n-1} + (\lambda_n + \lambda_{n+1}) \alpha - \mathfrak{M}_{n+1} \right] \\ &= \frac{1}{\lambda_{n+1}} \left[\mathfrak{M}_{n-1} + (\lambda_n + \lambda_{n+1}) \frac{\mathfrak{M}_n - \mathfrak{M}_{n-1}}{\lambda_n} \right. \\ &\quad \left. - \mathfrak{M}_n \right] \\ &= -\frac{1}{\lambda_n} \mathfrak{M}_{n-1} + \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right) \mathfrak{M}_n \\ &\quad - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \mathfrak{M}_{n+1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

等分割であると

$$p_n = \frac{1}{\lambda_n} (-\mathfrak{M}_{n-1} + 2 \times \mathfrak{M}_n - \mathfrak{M}_{n+1})$$

となる。

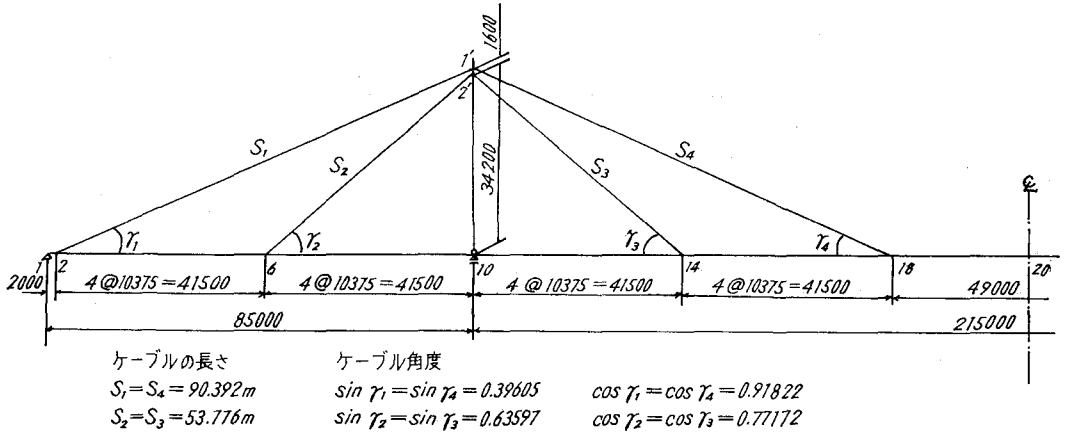


図-10

3. 計算例

計算例としては尾道大橋 図-10 取りあげ、断面諸元は次のようである。

桁断面: $I=0.202406 m^4$, $A=0.14796 m^2$

ケーブル: $A_1=0.01352 m^2$, $A_2=0.00808 m^2$

$A_3=0.00872 m^2$, $A_4=0.01200 m^2$

$E_c=1.6 \times 10^7 t/m^2$

塔: $I_T=0.01973 m^4$, $A_T=0.08826 m^2$

死荷重によりケーブルに導入されたプレストレスは

$K_{g1}=330.0 t$, $K_{g2}=218.4 t$, $K_{g3}=222.1 t$, $K_{g4}=326.9 t$

活荷重: 側径間 集中荷重 $P=21.31 t$

等分布荷重 $p=1.471 t/m$

中央径間 集中荷重 $P=19.95 t$

等分布荷重 $p=1.197 t/m$

(1) 第一近似付加荷重

一定な荷重状態で弾性理論影響線を使用して、各値を計算する。

ケーブル力, ${}_IK = K_g + {}_IK_p$

桁と塔のたわみと軸方向変位, ${}_Iv$, ${}_Iu$

ケーブルの回転角, ${}_ID\gamma$

桁の軸力, $H' = {}_IK \cos (\gamma + {}_ID\gamma)$

塔の軸力, $V' = V'_l - V'_r = \sum {}_IK \sin (\gamma + {}_ID\gamma)$

桁の付加荷重, $\mathfrak{B}' = {}_IK [\sin (\gamma + {}_ID\gamma) - \sin \gamma]$

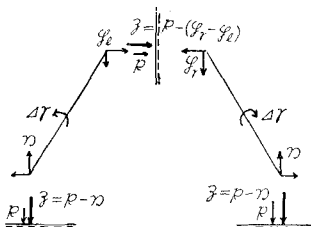


図-11 符号

塔の付加荷重, $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}'_l - \mathfrak{B}'_r = {}_IK [\cos \gamma - \cos (\gamma + {}_ID\gamma)]$

H' と V' による置換荷重, p'

桁に作用する付加荷重, $\mathfrak{B}' = p'$, $p' - \mathfrak{B}'$

塔に作用する付加荷重, $\mathfrak{B}' = p'$, $p' - \mathfrak{B}'$

すべての力の方向は 図-11 の力の方向を正とする。

(2) 第二近似付加荷重

弾性理論影響線に第一近似付加荷重 $\mathfrak{B}'$ を作用させて、ケーブル力の増分 $\Delta'K$, 桁のたわみ $\Delta'v$, 塔のたわみ $\Delta'u$, ケーブル回転角の増分 $\Delta'D\gamma$ を求める。ここでは桁と塔の軸方向変位 $\Delta'u$, $\Delta'v$ は無視する。すると、各々の力は

桁の軸力, $H'' = ({}_IK + \Delta'K) \cos (\gamma + {}_ID\gamma + \Delta'D\gamma)$

塔の軸力, $V'' = V''_l + V''_r$

$= \sum ({}_IK + \Delta'K) \sin (\gamma + {}_ID\gamma + \Delta'D\gamma)$

桁の付加荷重, $\mathfrak{B}'' = ({}_IK + \Delta'K) [\sin (\gamma + {}_ID\gamma + \Delta'D\gamma) - \sin \gamma]$

塔の付加荷重, $\mathfrak{B}'' = \mathfrak{B}''_l - \mathfrak{B}''_r = \Delta'K [\cos \gamma - \cos (\gamma + {}_ID\gamma + \Delta'D\gamma)]$

$\times [\cos \gamma - \cos (\gamma + {}_ID\gamma + \Delta'D\gamma)]$

H'' と V'' による置換荷重, p''

桁に作用する付加荷重, $\mathfrak{B}'' = p''$, $p'' - \mathfrak{B}''$

塔に作用する付加荷重, $\mathfrak{B}'' = p''$, $p'' - \mathfrak{B}''$

(3) 第三近似付加荷重

弾性理論影響線に第二近似付加荷重 $\mathfrak{B}''$ を作用させて、ケーブル力の増分 $\Delta''K$, 桁のたわみ $\Delta''v$, 塔のたわみ $\Delta''u$, ケーブル回転角の増分 $\Delta\Delta''\gamma$ を求める。

桁の軸力, $H''' = ({}_IK + \Delta''K) \cos (\gamma + {}_ID\gamma + \Delta\Delta''\gamma)$

塔の軸力, $V''' = V'''_l + V'''_r$

$= \sum ({}_IK + \Delta''K) \sin (\gamma + {}_ID\gamma + \Delta\Delta''\gamma)$

桁の付加荷重, $\mathfrak{B}''' = ({}_IK + \Delta''K) [\sin (\gamma + {}_ID\gamma + \Delta\Delta''\gamma) - \sin \gamma]$

塔の付加荷重, $\mathfrak{B}''' = \mathfrak{B}'''_l - \mathfrak{B}'''_r = \Delta''K [\cos \gamma - \cos (\gamma + {}_ID\gamma + \Delta\Delta''\gamma)]$

$\times [\cos \gamma - \cos (\gamma + {}_ID\gamma + \Delta\Delta''\gamma)]$

H''' と V''' による置換荷重, p'''

桁に作用する付加荷重, $3'''=p'''$, $p'''=8'''$

塔に作用する付加荷重, $3'''=p'''$, $p'''=5'''$

この操作を数回くり返して, 最終付加荷重 $3'''$ を求める。

ケーブルの回転角 $i\Delta\gamma$ とその増分 $\Delta''' \Delta\gamma$ は式 (2.1), (2.2) より求めることができる。

置換荷重 p''' の計算には変形した構造系図-12を考える。すなわちケーブルを取ってしまい, 支点1, $\bar{1}$ をフリーにし, 支点10を固定し, 18点にヒンジを入れ, 塔下端を地中に固定した図-12(b)を考える。モーメント M''' は次の表-1のようにして求まる。右半分も全く対称の式となる。

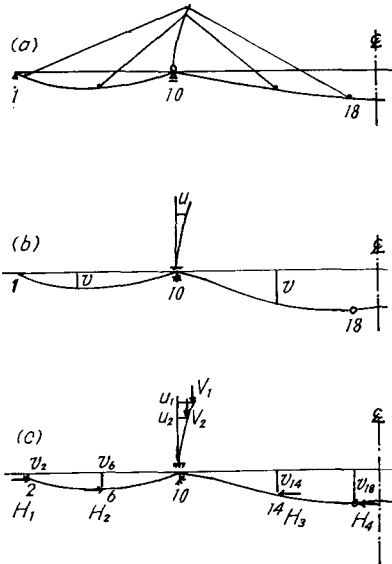


図-12

表-1

	H_1	H_2	H_3	H_4
$M_{1\sim2} =$				
$M_{3\sim6} =$	$v_3 \sim 6 - v_2$			
$M_{7\sim9} =$	$v_7 \sim 9 - v_2$	$v_7 \sim 9 - v_9$		
$M_{10} =$	$-v_2$	$-v_6$		
$M_{10'} =$			$-v_{14}$	$-v_{18}$
$M_{11\sim13} =$			$v_{11\sim13} - v_{14}$	$v_{11\sim13} - v_{18}$
$M_{14\sim18} =$				$v_{14\sim18} - v_{18}$
$M_{19\sim20} =$				

モーメント M''' が求まったので置換荷重 p''' は式 (2.4) より, 具体的には表-2 のようになる。右半分も同じような式となる。塔についても同様なことが考えられるが, この例では無視してよいと思われるので考えない。置換荷重 p_1 , p_{10} は支点反力の増加を調べる時に考える。以上の考え方で北大電子計算機 HIPAC-103 用にプログラム化して計算を行なった。

表-2

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}
λp_2	-1	2	-1							
λp_3		-1	2	-1						
λp_4			-1	2	-1					
λp_5				-1	2	-1				
λp_6					-1	2	-1			
λp_7						-1	2	-1		
λp_8							-1	2	-1	
λp_9								-1	2	-1
	$M_{10'}$	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}	M_{15}	M_{16}	M_{17}	M_{18}	M_{19}
λp_{11}	-1	2	-1							
λp_{12}		-1	2	-1						
λp_{13}			-1	2	-1					
λp_{14}				-1	2	-1				
λp_{15}					-1	2	-1			
λp_{16}						-1	2	-1		
λp_{17}							-1	2	-1	
λp_{18}								-1	2	-1
λp_{19}									-1	2
λp_{20}										-1

$$\lambda = 10.375 \text{ m}$$

4. 計算結果と考察

弾性理論影響線としては尾道大橋 (斜張橋) 設計計算書³⁾ の数値を使用させていただいた。まず図-13 のような荷重状態で計算を実行した。この荷重状態は中央径間中央点20のたわみを最大にする荷重状態であり, モーメントを最大にする荷重状態ではない。その状態の第一近似値をあげると表-3 のようになる。計算書には塔の影響線が算出されていなかったので力学的に別個塔のたわみを求めた。

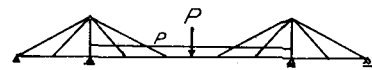


図-13

桁の付加荷重の収束状態は表-4 の如くなり第三近似付加荷重 $3'''$ と第四近似付加荷重 $3''''$ はほとんど一致している。従って電子計算機も四回のくり返しでストップするようにした。結局第四近似付加荷重を最終付加荷重として求めたケーブル力, たわみ, モーメントの増分と弾性理論値との百分率をしめたのが表-5 である。たわみは様に1~3% 増加しているしモーメントは3~5% 増加している。

他の荷重状態, 例えば側径間6点に集中荷重, 両側径間に等分布荷重を作用させ時には点6のたわみ, モーメント

表-3 第一近似付加荷重

n	K_g (t)	${}_IK_p$ (t)	${}_IK$ (t)	rv (m)	ru (m)	H' (t)	$\mathfrak{B}'$ (t)	$\mathfrak{M}'$ (t・m)	p' (t)	$3'$ (t)
2	330.0	191.7	521.7	-0.0070		479.1	-0.2228	0	1.5501	1.7729
4				-0.0676				-28.91	-0.4244	-0.4244
6	218.4	27.7	246.1	-0.0914		190.3	-0.4511	-40.24	-0.7473	-0.2962
8				-0.0066				-22.63	-0.6215	-0.6215
10 _t								+20.70		
1'					-0.0903					
10 _r								-193.34		
12				0.0836				-137.78	-0.0409	-0.0409
14	222.1	103.8	325.9	0.1725		250.8	0.8873	78.48	0.8810	-0.0063
16				0.2754				35.61	0.2052	0.2052
18	326.9	127.7	454.6	0.3611		416.7	1.6915	0	1.5717	-0.1191
20				0.4105				0	0	0

表-4 付加荷重の収束状態

n	$3''$ (t)	$3'''$ (t)	$3''''$ (t)	n	$3''$ (t)	$3'''$ (t)	$3''''$ (t)
2	1.8290	1.8311	1.8312	12	-0.0349	-0.0345	-0.0345
4	-0.4422	-0.4429	-0.4430	14	-0.0051	-0.0051	-0.0051
6	-0.3133	-0.3139	-0.3139	16	0.2088	0.2089	0.2089
8	-0.6401	-0.6408	-0.6408	18	-0.1259	0.1261	-0.1261
				20	0.0	0.0	0.0

表-5 弾性理論に対する百分率 (%)

n	ΔK (t)	$\Delta K/{}_IK$ (%)	Δv (m)	$\Delta v/rv$ (%)	${}_IM$ (t・m)	ΔM (t・m)	$\Delta M/{}_IM$ (%)
2	2.43	0.5	-0.0002	3.0	-170.0	2.4	-1.4
4			-0.0021	3.1	-362.5	-9.2	2.5
6	-1.87	-0.7	-0.0026	2.9	-554.8	-12.0	2.2
8			-0.0018	2.8	-379.3	-11.4	3.0
10					-203.8		
12			0.0011	1.4	-1.1	5.4	-51.3
14	0.72	0.2	0.0019	1.1	-313.6	8.4	-2.7
16			0.0026	1.0	226.5	13.0	5.8
18	0.26	0.1	0.0030	0.9	251.2	11.3	4.5
20			0.0032	0.8	854.7	10.3	1.2

は次のようである。

$${}_IM = 476.2 \text{ tm} \quad \Delta M = 16.4 \text{ tm} \quad \Delta M/{}_IM \times 100 = 3.4\%$$

$$rv = 0.1018 \text{ m} \quad \Delta v = 0.0031 \text{ m} \quad \Delta v/rv \times 100 = 3.0\%$$

又、中間支点が最大モーメントになるように荷重を作用させた時の中間支点上のモーメントは次のようである。

$${}_IM = -603.3 \text{ tm} \quad \Delta M = -4.3 \text{ tm}$$

$$\Delta M/{}_IM \times 100 = 0.7\%$$

解析過程において、弾性理論影響線を使用する時に、桁の勾配、核点モーメントの影響を考えた影響線を使用しなかったし、省略した項も幾分あるが、以上の計算結果から

尾道大橋程度の斜張橋では撓度理論で解く必要はないと思われる。

5. あとがき

North 橋⁵⁾では最大, 最小核点モーメントの増分 ΔM_{KO} , ΔM_{KV} は次のようであった。

側 径 間 ΔM_{KO} : 12.4%, ΔM_{KV} : 6.0%

中央径間 ΔM_{KO} : 7.3%, ΔM_{KV} : 8.8%

斜張橋は桁に圧縮軸力が作用して, 吊橋とは逆で, アーチ橋と同じように約分危険側になるといわれているが荷重状態によって必ずしもそうではないようである。本解析のモーメントについては活荷重のみについて比較したが実際は死荷重モーメントが桁に作用しており, モーメントの増分 ΔM は全モーメントから見ればはるかに影響は少くなり, さ

らに撓度理論で解く必要はないと思われる。

参考文献

- 1) 渡辺・多田・宮本: 「斜張橋の構造特性について」, 第 23 回年次学術講演会, I-112.
- 2) 成岡・長谷川: 「任意平面斜張橋の非線型解析」, 第 23 回年次学術講演会, I-52.
- 3) G. Schreier: Beiträge zur Anwendung von baustatischen Methoden auf Probleme der Verformungstheorie., 0 1961.
- 4) 日本道路公団・日立造船: 尾道大橋主橋梁上部工設計計算書, 昭和 42 年 1 月.
- 5) L. Wintergerst: Nördbrücke Süeseldorf III. Teil. Heft 6, Juni 1958).