

モンテ・カルロ法による日程計画に関する一考察

正 員 山 村 悦 夫*

1. 緒 言

近年、ネットワークは計画と管理の手法として我国の建設業界においても積極的に取り入れられており、大手建設会社をはじめ建設省、各種道路公団などですでに実施に移っている。その主なものとして、PERT, CPM, RAMPS などがある。これらは、第 2 次大戦後目覚しく発展しているオペレーションズ・リサーチを中心として、最近著しく進歩している電子計算機活用により開発された計画と管理の手法である。

この小論では、日程計画のネットワーク解析として、各作業の所要時間が不確定性をもつ場合をモンテ・カルロ法によりシミュレーション解析を試みるものである。

2. 日程計画の定式化

作業の日程計画として、次の 4 種類の時刻を考える。

(a) 最早開始時刻 (Earliest Start Time) $ES_{i,j}$

作業が最も早く開始する時刻で、作業 $(i-j)$ において Event i の最早開始時刻 t_i^E と一致する。

$$t_i^E = 0 \quad t_k^E = \max_{(k-i) \in P} (t_i^E + T_{i,k})$$

$T_{k,i}$ は作業 $(k-i)$ の所要時間を表わしている。

(b) 最早完了時刻 (Earliest Finishing Time) $EF_{i,j}$

作業を最も早く終了した時刻で最早開始時刻にその作業の所要時間を加えた時刻である。

$$EF_{i,j} = t_i^E + T_{i,j} = ES_{i,j} + T_{i,j}$$

(c) 最遅完了時刻 (Latest Finishing Time) $LF_{i,j}$

作業が遅くとも終了しなければならない時刻で、作業 $(i-j)$ において Event j の最遅完了時刻 t_j^L と一致する。

$$t_i^L = \lambda (= t_i^E) \quad t_j^L = \min_{(j-k) \in P} (t_k^L - T_{j,k}) \quad LF_{i,j} = t_j^L$$

λ は計画遂行時間である。

(d) 最遅開始時刻 (Latest Start Time) $LS_{i,j}$

作業を最も遅く開始することのできる時刻で最遅完了時刻よりその所要時間を引いた時刻である。

$$LS_{i,j} = t_j^L - T_{i,j} = LF_{i,j} - T_{i,j}$$

次に、余裕時間 (Float) について考察する。

最遅完了時刻と最早完了時刻との差の余裕時間を Total

Float ($TF_{i,j}$) と呼ぶ。

$$TF_{i,j} = (t_j^L - t_i^E) - T_{i,j} = t_j^L - (t_i^E + T_{i,j}) = LF_{i,j} - EF_{i,j}$$

その中で、後続する作業の最早開始時刻に影響を及ぼさない範囲で作業が自由に使用することのできる余裕時間を Free Float ($FF_{i,j}$) と呼ぶ。

$$FF_{i,j} = (t_j^E - t_i^E) - T_{i,j} = t_j^E - (t_i^E + T_{i,j}) = ES_{j,k} - EF_{i,j}$$

さらに、Total Float と Free Float の差を Interfering Float と呼び $IF_{i,j}$ と表わす。

この余裕時間は工期には影響をあたえないが後続の開始時刻に影響をあたえる。

$$IF_{i,j} = t_j^E - t_j^L = [t_j^E - (t_i^E + T_{i,j})] - [t_j^L - (t_i^E + T_{i,j})] \\ = TF_{i,j} - FF_{i,j}$$

3. モンテ・カルロ法による日程計画

日程計画においては、各作業の所要時間のランダムな不確定性をいかに処理するかが重要になる。

一般においては、決定論的に計画工期とクリティカル・パス (Critical Path) を求めるのである。この場合では、クリティカル・パスが一意的に決定されるが、その他の作業との関係や臨界になる可能性を的確に把握することはできない。

そこで、ここではモンテ・カルロ法により各作業が臨界になる確率クリティカル・インデックス (Critical Index) を求め、さらに余裕時間の分布を明らかにし管理運営面に活用するものである。

次に、所要時間の確率分布について考察する。

一般に、所要時間を見積る場合に次の 3 つの値を定めることは可能である。

(a) 楽観値 A , (b) 最可能値 M , (c) 悲観値 B

楽観値とは、すべての物事が円滑に運ばれて、もうこれ以上短縮することのできない最良の達成限界である。

最可能値は標準所要時間で確率分布のモード (Mode) にあたる。

悲観値は悪条件の重なりによりもう長びくことはないと思われる最悪の場合の達成限界である。

そこで、これらの 3 点より分布系を決定するために β -分布を用いて吟味する。

* 北海道大学工学部助手

$$\beta\text{-函数 } \beta(\alpha, \gamma) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\gamma-1} dx$$

β -分布の確率密度函数

$$f(x) = \{ \Gamma(\alpha+\gamma+2) / \Gamma(\alpha+1) \cdot \Gamma(\gamma+1) \} \cdot x^\alpha (1-x)^\gamma \quad (1)$$

また、 β -函数と Γ -函数 (Gamma Function) との間には次の関係が成り立つ。

$$\beta(\alpha, \gamma) = \Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\gamma) / \Gamma(\alpha+\gamma)$$

この関係式より (1) 式は次のようになる。

$$f(x) = \{ 1 / \beta(\alpha+1, \gamma+1) \} \cdot x^\alpha (1-x)^\gamma \quad (2)$$

(2) 函数の平均 $E(x)$ は、

$$E(x) = \{ 1 / \beta(\alpha+1, \gamma+1) \} \int_0^1 x^{\alpha+1} (1-x)^\gamma dx \\ = (\alpha+1) / (\alpha+\gamma+2)$$

分散 $V(x)$ は

$$V(x) = E(x^2) - \{E(x)\}^2 \\ = (\alpha+1)(\gamma+1) / \{(\alpha+\gamma+2)^2(\alpha+\gamma+3)\}$$

変域 ($0 < x < 1$) は次の式より ($A < T < B$) に変換する。

$$x = (T-A) / (B-A) \\ f(T) = [1 / (B-A)^{\alpha+\gamma+1} \cdot \beta(\alpha+1, \gamma+1)] \\ \cdot (T-A)^\alpha \cdot (B-T)^\gamma \quad (3)$$

(3) 函数の平均 $E(T)$ と分散 σ_T^2 は、

$$E(T) = A + (B-A) [(\alpha+1) / (\alpha+\gamma+2)] \\ \sigma_T^2 = (B-A)^2 (\alpha+1)(\gamma+1) / \{(\alpha+\gamma+2)^2(\alpha+\gamma+3)\}$$

T のモード M は $f'(T)=0$ として求めると、

$$M = (A\gamma + B\alpha) / (\alpha+\gamma) \\ E(T) = [A + B(\alpha+\gamma)M] / (\alpha+\gamma+2)$$

ここで、 $\alpha = 2 + \sqrt{2}$, $\gamma = 2 - \sqrt{2}$, $\alpha = 2 - \sqrt{2}$,

$$\gamma = 2 + \sqrt{2}, \alpha = \beta = 3.$$

$$\therefore E(T) = (A + 4M + B) / 6, \sigma_T^2 = \{(B-A) / 6\}^2$$

この分布の関係は Fig. 1 のように (1), (2), (3) 型に類別される。

この確率分布より、さきの3点の見積りよりその分布型

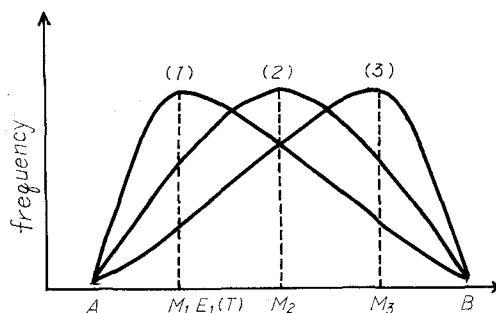


Fig. 1.

を定めることができる。

そこで、次に都市交通計画の過程を Fig. 2 のようなマスター・ネットワークにした場合について考察してみる。

このネットワークは総合的な都市交通計画をたてる一段階のマスター・プランで、現況調査、公共政策方針の決定、将来都市地域成長の推計、将来交通の推計からなっている。Fig. 2 で作業の下の数値は、楽観値、最可能値、悲観値と配列されており、次の数値は分布型を示している。

このネットワークは各作業が確率分布になっている動態日程計画である。

ここではオペレーションズ・リサーチで発展しているモンテ・カルロ法によりこの日程計画を解析する。

モンテ・カルロ法は第2次大界中、J. von. Neuman と S. M. Ulam が分裂性物質に含まれる中性子の拡散現象を取り扱う問題を解決するために行なった確率的模擬実験に付けたものである。一般に、母教の推定として標準偏差の小さいものが望ましいので分散減少法を含む手法に限ってモンテ・カルロ法と呼ぶ。

ここでは層化抽出法 (Stratified Sampling) によるモンテ・カルロ法を適用する。

そこで、所要時間の全区間 $[A, B]$ を一様乱数を適用するため $[0, 1]$ に変換する。

次に、区間 $[0, 1]$ を K 個の部分区間 $\alpha_{k-1} \leq x \leq \alpha_k$ ($0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_K = 1$) に分けその各部分で任意抽出法に

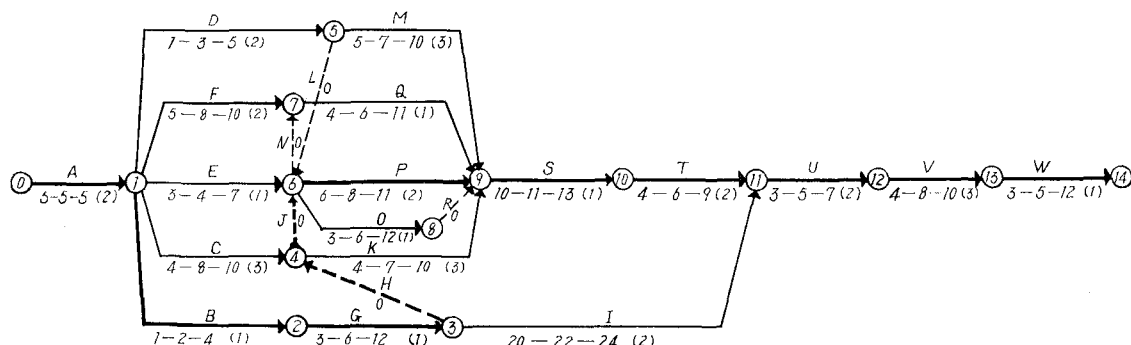


Fig. 2.

Table 1.

作業の番号		作業内容
A	0—1	ゾーニング (対象地域の分割)
B	1—2	利用可能な財源 (交通施設へ投資可能な財源)
C	1—4	土地利用 (土地の利用度などの調査)
D	1—5	自動車保有 (OD 調査, ゾーン当りの台数)
E	1—6	人口 (人口資料, ゾーン当りの人口)
F	1—7	現在の経済活動 (所得, 雇用関係資料)
G	2—3	提案される交通施設 (新旧, 交通施設の考察)
H	3—4	ダミー
I	3—11	将来交通網の基本計画
J	4—6	ダミー
K	4—9	将来の土地利用 (土地利用推定)
L	5—6	ダミー
M	5—9	将来の自動車保有 (ゾーン当りの台数の推計)
N	6—7	ダミー
O	6—8	人口の予測 (ゾーン当り人口の推計)
P	6—9	現在の発生交通量 (パーソントリップ調査, OD 調査)
Q	7—9	将来の経済活動 (所得, 雇用関係の推計)
R	8—9	ダミー
S	9—10	将来の発生交通量 (ゾーンの人と車のトリップ推定)
T	10—11	ゾーン間交通量の推定 (地域間交通の定式化)
U	11—12	輸送機関別需要分担 (各輸送機関利用する人のトリップ推定)
V	12—13	交通網への交通量配分 (交通施設を利用する交通量の推計)
W	13—14	サービス水準の検討 (提案施設の実行可能の分析)

より解を求める。

部分区間の標本分散は,

$$\sigma_{\ell}^2 = \int_{\alpha_{\ell-1}}^{\alpha_{\ell}} f^2(x) \cdot \left\{ 1/(\alpha_{\ell} - \alpha_{\ell-1}) \right\} dx \\ - \left\{ \int_{\alpha_{\ell-1}}^{\alpha_{\ell}} f(x) \cdot \left[1/(\alpha_{\ell} - \alpha_{\ell-1}) \right] dx \right\}^2$$

となり全区間の分散は,

$$\sigma^2 = \sum_{\ell=1}^k \left\{ (\alpha_{\ell} - \alpha_{\ell-1})/n_{\ell} \right\} \cdot \int_{\alpha_{\ell-1}}^{\alpha_{\ell}} f^2(x) dx \\ - \sum_{\ell=1}^n \left(1/n \right) \left(\int_{\alpha_{\ell-1}}^{\alpha_{\ell}} f(x) dx \right)^2$$

n_{ℓ} は i 番目の区間で抽出される標本の個数である。

比例抽出法により $n_{\ell} = n(\alpha_{\ell} - \alpha_{\ell-1})$

$$\sigma^2 = (1/n) \cdot \sum_{\ell=1}^k \int_{\alpha_{\ell-1}}^{\alpha_{\ell}} f^2(x) dx - (1/n) \sum_{\ell=1}^k \left\{ 1/(\alpha_{\ell} - \alpha_{\ell-1}) \right\} \left(\int_{\alpha_{\ell-1}}^{\alpha_{\ell}} f(x) dx \right)^2$$

そこで一様乱数による基礎モンテ・カルロ法の σ'^2 と比較する。

$$\sigma'^2 - \sigma^2 = (1/n) \left\{ \sum_{\ell=1}^k \sum_{j=1/k}^{j/k} \left(\int_{j-1/k}^{j/k} f(x) dx \right) \right. \\ \left. - \int_{\ell-1/k}^{\ell/k} f(x) dx \right\}^2 \geq 0$$

したがって、比例抽出法で十分に層化すれば基礎的モンテ・カルロ法より分散が小さい。このように、層化抽出法によって各作業の所要時間が求められる。

これらの値を基に日程計画の公式より計画遂行時間とクリティカル・パスと各作業の余裕時間を求めるのである。

小規模のネットワークでは 100 回の試行により計画遂行時間の分布の概形を求めることができる。

ここでは 1,000 回の試行の結果, Fig. 3 に示すような分布を求めることができた。

これよりも明らかなように PERT においては, Table 2 より $\lambda = 57.85$, $\sigma = 2.80$ の正規分布よりも期待値はより大きく分散はより小さい。一般に同じ分布の 2 つの確率変数の最大値の分布はもとの変数の期待値よりも大きく分散はより小さいのである。このことによりモンテ・カルロ法による解析方法が、正しい分布の期待値, 分散を把握するにも理論的に解析することが困難な場合にも求めることがで

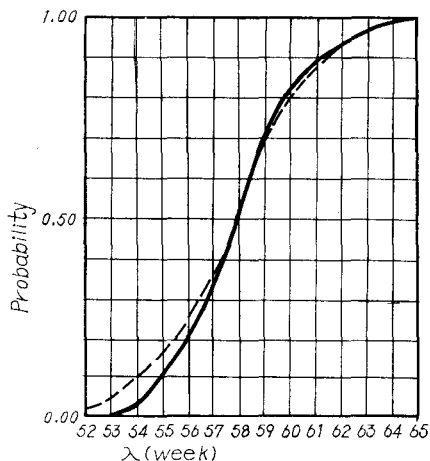


Fig. 3.

Table 2. PERT

番 号	期待値	分 散	TF	FF	IF
A	5.00	0.00	0.00	0.00	0.00
B	2.17	0.25	0.00	0.00	0.00
C	7.67	1.00	1.00	1.00	0.00
D	3.00	0.45	5.67	0.00	5.67
E	4.33	0.45	4.34	4.34	0.00
F	7.83	0.69	2.51	0.84	1.67
G	6.50	2.25	0.00	0.00	0.00
H	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
H	22.00	0.45	3.51	3.51	0.00
J	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
K	7.00	1.00	1.17	0.17	0.00
L	0.00	0.00	5.67	0.00	5.67
M	7.17	0.69	6.67	6.67	0.00
N	0.00	0.00	1.67	0.00	1.67
O	6.50	2.25	1.67	0.00	1.67
P	8.17	0.69	0.00	0.00	0.00
Q	6.50	1.00	1.67	0.00	1.67
R	0.00	0.00	1.67	0.00	1.67
S	11.17	0.25	0.00	0.00	0.00
T	6.17	0.69	0.00	0.00	0.00
U	5.17	0.45	0.00	0.00	0.00
V	7.67	1.00	0.00	0.00	0.00
W	5.83	2.25	0.00	0.00	0.00

$\lambda=57.85$ $6=2.80$

きるのである。

また、予定工期の実施可能の確率的検討も PERT と同様におこなうことができる。

次に、各作業のクリティカル・インデックス (CI) を求めてみよう。PERT では一意的に定まったクリティカル・パス上の作業の期待値、分散しか考慮していないのであるが、他の作業の分散も考えに入れないといけない。というのは、作業の所要時間の分散の状態によっては他のパスがクリティカル・パスになる可能性が十分にある。そこでこれらの欠点を補うためにも各作業の (CI) を求めることは意義がある。各作業の (CI) は全試行回数中クリティカル・パス上にある回数の比で確率的に求められる。Table 3 より明らかなように作業 C は作業 B, G と同じ臨界になる可能性がある。したがって、クリティカル・パスだけに注目すると他の所で高い確率の (CI) の作業を見落してしまう可能性がある。

Table 3.

番 号	CI	番 号	CI	番 号	CI
A	1.00	I	0.03	Q	0.14
B	0.66	J	0.95	R	0.14
C	0.63	K	0.19	S	0.97
D	0.00	L	0.00	T	0.97
E	0.00	M	0.00	U	1.00
F	0.04	N	0.10	V	1.00
G	0.66	O	0.14	W	1.00
H	0.64	P	0.87		

さらに、各作業の余裕時間について考察してみる。

Fig 4 で示す一連の各作業の余裕時間の分布は累積確率で表わしたものである。これは、さきの層化抽出法によるモンテ・カルロ法により日程計画の余裕時間の式より求めたものである。そこで、PERT 解析による Total Float との関係を検討してみよう。

PERT 解析による Total Float の中で作業 A, U, V, W は TF=0 であり、CI=1.00 で両手法の結果は同じである。

作業 J, P, S, T は TF=0 であるが CI は 0.95, 0.87, 0.97, 0.97 であり両手法の結果にはあまり差はみられない。しかし、1, 2 週間の余裕が 5%, 13%, 3%, 3% あることを忘れてはいけない。

作業 B, C, G, H は TF=0 であるが CI=0.66, 0.63, 0.66, 0.64 であり両手法の結果には大きな差がみられる。すなわち、1~3 間の余裕が 34%, 37%, 34%, 36% あり、PERT 解析では求められなかったもので、作業 B, G, H と作業 C, J の一連の作業列において同等の可能性はある。したがって、クリティカル・パスが一方になれば、他方には 4 割近くの余裕が生ずることが明らかとなる。それは、作業 C において FF=1.00 であるが 1 週間以上の余裕が

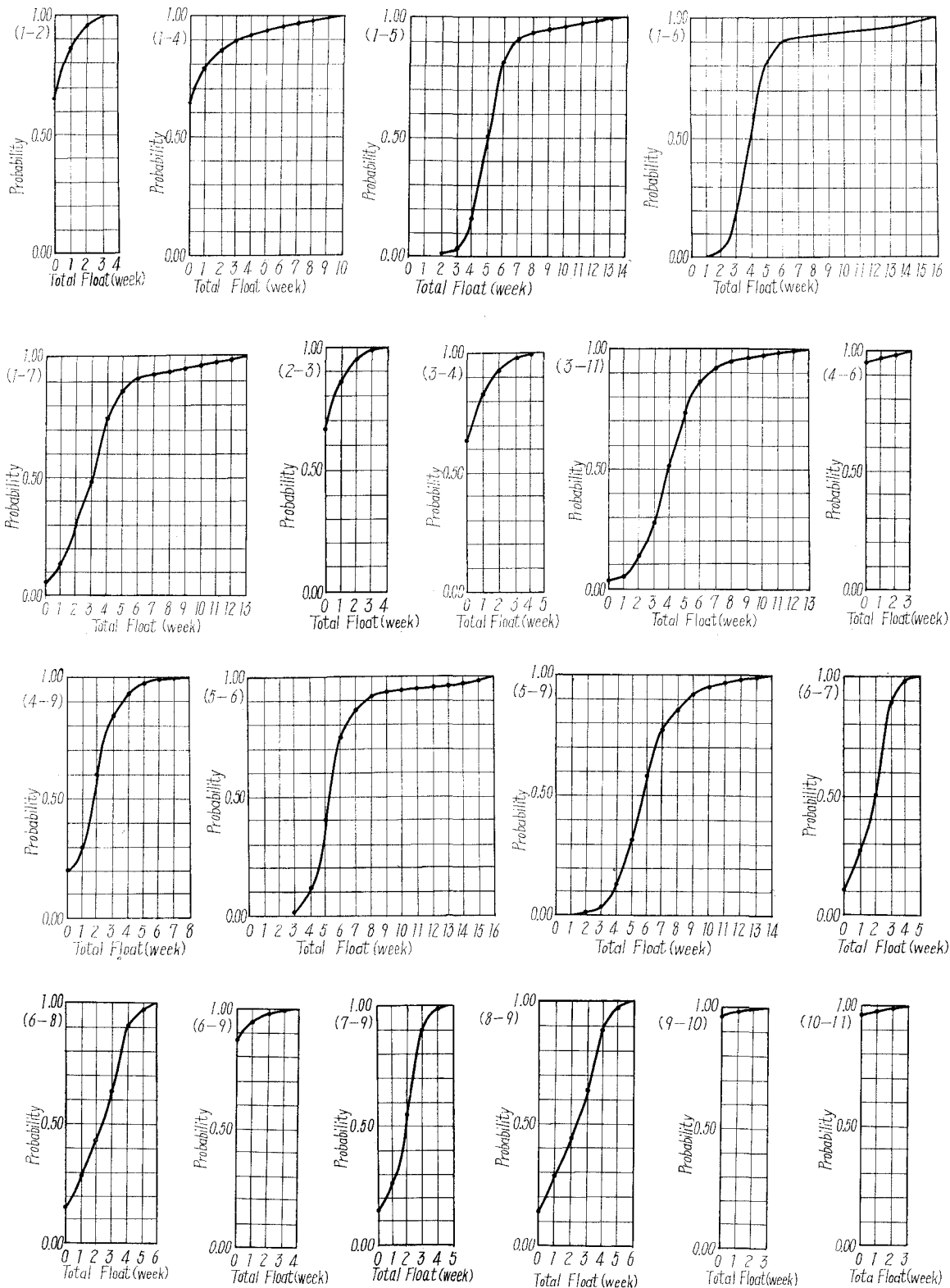


Fig. 4.

4割近くの可能性があり、作業 G, H では $TF=0.00$ であるが余裕が4割近く生ずる可能性があるのである。

次に、作業 D, E, F, I, K, L, M, N, O, Q, R は $TF=5.67, 4.34, 2.51, 3.51, 1.17, 5.67, 6.67, 1.67, 1.67, 1.67, 1.67$ でありモンテ・カルロ法の場合のモード (Mode) と一致している。それらの余裕時間のうち作業 D, F, L, N, O, Q, R は Interfering Float であり、他は自由に用いることの出来る Free Float である。

したがって、後続の作業に注目して余裕時間の確率的把握をしなければならない。また、各作業において、余裕時間が確率的にあたえられているので、予定余裕時間の安全性を確認することができるのである。

次に、工程の進行過程で行なうフォロー・アップ (Follow up) について考察してみよう。フォロー・アップは工程が計画通りに進んでいない場合に適当な時期に練りなおすのであるが、モンテ・カルロ法ではいろいろの可能性が確率的にあたえられているので、それに十分対処することができるものと思われる。

4. 結 言

ネットワークによる計画と管理の手法があたえるその影響は対象領域の広さ深さにおいても戦後の計画と管理の手法のうちで最も広汎なものである。

なかでも、従来適切な計画と管理手法のもたない建設業界においても急速なる発展をみせたのである。そして、今この新しい計画と管理の手法がはっきりと日本の土壤に根をおろしはじめている。

この小論では、電子計算機の十分なる活用により、モン

テ・カルロ法で日程計画のシミュレーションを試みたものである。まだ、実際の活用までには幾多の問題があるが、このような側面からの接近が少なく、この議論も意義をもつものと思われる。なお、この発表にあたり北海道大学小川博三教授、五十嵐日出夫助教授の影なる援助に心から感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) 山村悦夫：“土木・建築と交通計画における NETWORK の研究”。北海道大学交通計画研究室，1966.
- 2) Clark, C. E.: “The PERT Model for the Distribution of an Activity Time”. JORSA, Vol. 10, 1962.
- 3) Van Slyke, R. M.: “Monte Carlo Methods and the PERT Problem”. JORSA, Vol. 11, 1963.
- 4) Parikh, S. C. and Tewel, W. S.: “Decomposition of Project Network”. Management Science, Vol. 1, 1965.
- 5) Ford, L. R. and Fulkerson D. R.: “Flows in Network”. Princenton University Press, 1962.
- 6) Von Neumann, J.: “Various Techniques Used in Connection with Random Digits”. National Bureau of Standards Applied Mathematics, Series 12, N.B.S., 1951.
- 7) Martin, J. J.: “Distribution of the Time through a Directed Network”. JORSA, Vol. 13, 1965.
- 8) Hammersley J. M.: “Monte Carlo Methods”. Methuen and Co, London, 1961.
- 9) 米谷栄二・加藤晃：“都市交通と都市計画”. 技術書院, 1967.