くい (Pile) 打ち公式に反撥係数 e を算入することの矛盾について

正員　今井芳雄*

§1. 前　　言

問題の範囲を drop hammer の自然落下による pile 打ち公式に限ってのべる。この公式の基本形には Hiely の公式がある。即ち

$$R\cdot S = e_f\left\{W\cdot H - WH\frac{P(1-e^2)}{W+P}\right\} - \frac{1}{2}R(C_1+C_2+C_3) \qquad \text{(A)}$$

である。ここに

R: pile の動的支持力
W: drop hammer の重量
P: pile の重量
S: pile の貫入量
H: hammer の落下高
e_f: hammer の効率
e: 反発係数 coefficient of restitution
C_1: 土の弾性変形量
C_2: pile の弾性変形
C_3: キャップの弾性変形量

これについて筆者は (A) 式右辺 { } 内第2項の分子 $(1-e^2)$ に示される反発係数 e を問題とするものである。もともと dynamic formula は色々な測定不能な要素が多く困難ではあるが，反発係数 e を入れた衝突現象は，物理的に言って先ず衝突面に圧縮が或期間おこり，ついで回復期があるということで，回復期の丁度終期では hammer と pile は離れ，e 値に相応した離反時の速度になることである。式 (A) の誘導をみると，この離反した時の hammer と pile の夫々の速度で有する kinetic energy の和が (A) 式の { } の値そのものということである。離反した時であるから hammer と pile 頭の間には何等の作用反作用の力もない接触圧 zero の状態であるわけで，zero のままでは hammer の kinetic energy は貫入に用い得られない筈である。hammer の速度を zero にするにはこれを阻止する力が必要である。ということはもう一度 pile 頭に衝突する必要があるということになる。そして再衝突後どれだけの kinetic energy が利用しうるか，というためには又 (A) 式を持出さねばなるまい。それでは e を用いた今までの意味はないことになる。打撃は一瞬のうちに完了するが，とに角 hammer の速度は，落下速度であれ反発した速度であれ，いづれ zero になる運命にあるのだから，この速度変化を追跡して e のためにおこる矛盾をのべてめるので御批判を得たい。

§2. 空間における2球の衝突 (I)

球 M, 球 m の質量を M, m とし，その速度を夫々 V, v で表す。今同一直線上を V_1, v_1 の速度で左から右に進むものとし，$V_1 > v_1$ とする (Fig. 1)。速度に差があるから

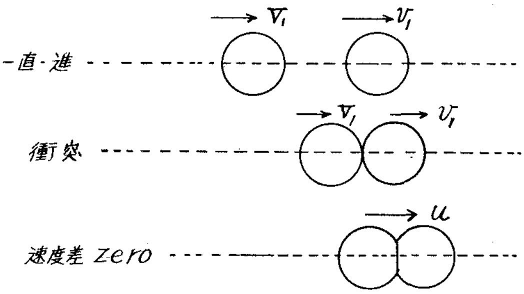

Fig. 1. 2球 M, m の衝突と共通速度 u

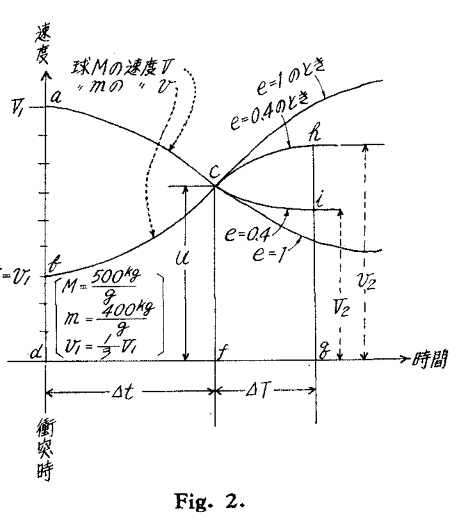

Fig. 2.

* 北海道産業短期大学　助教授

球 M は球 m に追いつき衝突する。直ちに衝突面には圧縮変形がおこり速度差 zero，即ち共通速度 u に至り変形は最大になる。V_1, v_1 が共通速度 u に至るまでの速度変化は Fig. 2 の様に球 M は減速，球 m は加速によって達せられる。衝突前後の動量は不変であるから（球 M と球 m の衝突により生ずる内力以外この系に外力がないから）

$$MV_1+mv_1 = Mu+mu = (M+m)u \tag{1}$$

が成立する。上式から各球の運動量の変化は数字的にひとしく，これらは時間 $\varDelta t$ 間の力積 I_1 にひとしい

$$M(V_1-u) = m(u-v_1) = I_1 = \int_0^{\varDelta t} F\cdot dt \tag{2}$$

F は接触圧力＝作用反作用であり $\varDelta t$ 間に変化にする

(2) より共通速度 u は

$$u = \frac{MV_1+mv_1}{M+m} \tag{3}$$

である。衝突前に有していた2球の kinetic energy の和を K_1 とすれば

$$K_1 = \frac{1}{2}MV_1^2+\frac{1}{2}mv_1^2 \tag{4}$$

である。共通速度 u の時2球の有する kinetic energy の和を K_u とすれば

$$K_u = \frac{1}{2}(M+m)u^2 \tag{5}$$

である。そこで kinetic energy の差を求めると

$$K_1-K_u = \frac{1}{2}(MV_1^2+mv_1^2)-\frac{1}{2}(M+m)u^2$$
$$= \frac{1}{2}\frac{M\cdot m}{M+m}(V_1-v_1)^2>0 \tag{6}$$

であり，kinetic energy は減少している。

次に球 M が衝突 $\varDelta t$ 時間に，進んだ距離を $\varDelta S_1$，同様球 m を進んだ距離を $\varDelta s_1$ とすると（dt は微小時間）

$$\varDelta S_1 = \int_0^{\varDelta t} Vdt = \text{面積 } dacfd \quad \text{(Fig. 2)} \tag{7}$$

$$\varDelta s_1 = \int_0^{\varDelta t} vdt = \text{面積 } dbcfd \quad \text{(Fig. 2)} \tag{8}$$

である。Fig. 2 の面積比較から明らかなように $\varDelta S_1>\varDelta s_1$ であり，この差 $\varDelta S_1-\varDelta s_1$ は共通速度 u に達した時の2球の接触面に生じた圧縮量である。又，$\varDelta S_1$, $\varDelta s_1$ を夫々進む間，M と m の接触面に作用する共通圧縮力 F も或距離を進むから仕事をする。球 M の減速のため力 F になされた仕事を W_M とすれば

$$W_M = \int_0^{\varDelta S_1} FdS = \int_{V_1}^{u} M\frac{dV}{dt}\cdot Vdt$$
$$= \frac{1}{2}M(u^2-V_1^2)<0 \tag{9}$$

球 m の加速のため力 F のなした仕事を W_m とすれば

$$W_m = \int_0^{\varDelta s_1} Fds = \int_{v_1}^{u} m\cdot\frac{dv}{dt}\cdot vdt$$
$$= \frac{1}{2}m(u^2-v_1^2)>0 \tag{10}$$

$$\therefore\quad W_M+W_m = \frac{1}{2}M(u^2-V_1^2)+\frac{1}{2}m(u^2-v_1^2)$$
$$= \frac{1}{2}(M+m)u^2-\frac{1}{2}(MV_1^2+mv_1^2) \tag{11}$$

である。共通速度 u になったため失った kinetic energy は圧縮変形（$\varDelta S_1-\varDelta s_1$）の仕事として貯えられているわけである。これは (6) 式にひとしい。次に (2), (3) 式より力積 I_1 は

$$I_1 = M(V_1-u) = M\left\{V_1-\frac{MV_1+mv_1}{M+m}\right\}$$
$$= \frac{Mm(V_1-v_1)}{M+m}>0 \tag{12}$$

である。

§3. 空間における球の衝突 (II)

球 M と球 m は共通速度 u に達した瞬間以後は圧縮変形に貯えられた力 F が反発力 (restitute) として作用するので，互に離反するようになる。即ち球 M は速度 u より減速し，m は加速する。自由空間だからである。圧縮変形が或量伸長し切った時，接触面間の圧縮力 F' は zero になる。この時の速度を V_2, v_2 とすると圧縮変形が圧縮の全量復元して伸長するとは限らないから復元期の力積は圧縮期の力積に equal でないが，離反した時の速度においても運動量の和は不変であるから

$$(M+m)u = MV_2+mv_2 \tag{14}$$

$$\therefore\quad M(u-V_2) = m(v_2-u) = I_2 = \int_0^{\varDelta T} F'dt \tag{15}$$

である。ただし I_2 は $\varDelta T$ 間 (Fig. 2) の力積であり，F' は反発力である。

$$\therefore\quad u = \frac{MV_2+mv_2}{M+m} \tag{16}$$

$$\therefore\quad I_2 = M\left(\frac{MV_2+mv_2}{M+m}-V_2\right) = \frac{Mm(v_2-V_2)}{M+m}>0 \tag{17}$$

圧縮期 $\varDelta t$ 間の impulse と伸張期 $\varDelta T$ 間の impulse との比を求め，これを e とおくと

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{v_2-V_2}{V_1-v_1} \equiv e \tag{18}$$

である。e は反発係数 coefficient of restitution であり，くい打ち公式に用いられているものと同一である。(18) 式より

$$v_2-V_2 = e(V_1-v_1) \tag{a}$$

(1), (14) より

$$MV_1+mv_1 = MV_2+mv_2 \tag{b}$$

a), (b) をといて

$$v_2 = v_1+\frac{(1+e)M(V_1-v_1)}{M+m} \tag{19}$$

$$V_2 = V_1-\frac{(1+e)m(V_1-v_1)}{M+m} \tag{20}$$

である。次に球 M が共通速度 u になった瞬間以後 $\varDelta T$ 時間 (Fig. 2) に進んだ距離を $\varDelta S_2$，同様球 m の進んだ距離を $\varDelta s_2$ とすれば (7), (8) と同様に

$$\varDelta S_2 = \int_0^{\varDelta T} Vdt = \text{面積 } fcigf \quad \text{(Fig. 2)} \tag{21}$$

$$\varDelta s_2 = \int_0^{\varDelta T} vdt = \text{面積 } fchgf \quad \text{(Fig. 2)} \tag{22}$$

である。図から面積比較によって明らかなごとく $\varDelta S_2<\varDelta s_2$ であり，この差は共通速度 u 以後の伸長量である。球 M が引続いて減速の時，力 F' のためなされた仕事を W'_M とすれば

$$W'_M = \int_0^{\varDelta S_2} F'dS = \int_u^{V_2} M\frac{dV}{dt}\cdot Vdt = \frac{1}{2}M(V_2^2-u^2)<0 \tag{23}$$

球 m が加速の時 F' のため加えられた仕事 W'_m は

$$W'_m = \int_0^{\varDelta s_2} F'\cdot ds = \int_u^{v_2} m\frac{dv}{dt}\cdot vdt = \frac{1}{2}m(v_2^2-u^2)>0 \tag{24}$$

である。ただし F' は回復期の接触圧力であり，反発力でもある。

$$\therefore \quad W'_M+W_m = \frac{1}{2}M(V_2^2-u^2)+\frac{1}{2}m(v_2^2-u^2) = \frac{1}{2}(MV_2^2+mv_2^2)-\frac{1}{2}(M+m)u^2 \tag{25}$$

である。共通速度 u 以後増加した kinetic energy は圧縮変形が $(\varDelta s_2-\varDelta S_2)$ だけ復元伸長した時，力 F' が開放した仕事に等しいのである。であるから共通速度 u に達した時の圧縮変形が復元しないで圧縮のままである限り 2 球 M と m の kinetic energy は $\frac{1}{2}(M+m)u^2$ より増加することはないのである。

§4. くい打ち公式に反発係数 e の算入

2 球 M と m が離反の時の速度 V_2, v_2 のためもっている kinetic energy は $\frac{1}{2}(MV_2^2+mv_2^2)$ であり，衝突前の kinetic energy との差を $\varDelta Y$ とすれば

$$\varDelta Y = \frac{1}{2}(MV_1^2+mv_1^2)-\frac{1}{2}(MV_2^2+mv_2^2) \tag{26}$$

である。(26) 式において (19), (20) 式の離反時の速度 V_2, v_2 を代入すると

$$\varDelta Y = (1+e)\frac{1}{M+m}\left[Mm(V_1-v_1)^2\cdot\frac{1-e}{2}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{Mm}{M+m}(1-e^2)(V_1-v_1)^2 \tag{27}$$

である。今，球の代り hammer, pile にを考えても衝突現象に変りはないから，hammer の重量を W，pile (くい) の重量を P とせば $M=W/g$, $m=P/g$ とおける。g は重力の加速度，落下高 $=H$ とせば落下速度は V_1 に当るから $V_1=\sqrt{2gH}$，くいは静止しているから $v_1=0$ である。これを (27) 式に代入すると

$$\varDelta Y = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{W}{g}\cdot\frac{P}{g}}{\frac{W}{g}+\frac{P}{g}}(1-e^2)2gH = \frac{WHP(1-e^2)}{W+P} \tag{28}$$

となる。くい打ち公式では，この $\varDelta Y$ を損失 energy であるとして落下 energy WH より $\varDelta Y$ を引いたのが pile の貫入に与える基本的な量であるとするのである。即ち

$$WH-\varDelta Y = WH-\frac{WHP(1-e^2)}{W+P} \tag{29}$$

である。(29) 式右辺は Hiley 形公式の基本形であるが，もう一度 kinetic energy の形にもどして書きなおすと

$$WH = \frac{1}{2}(MV_1^2+mv_1^2)$$

であるから，(29) 式左辺は

$$\frac{1}{2}(MV_1^2+mv_1^2)-\left\{\frac{1}{2}(MV_1^2+mv_1^2)-\frac{1}{2}(MV_2^2+mv_2^2)\right\} = \frac{1}{2}(MV_2^2+mv_2^2) \tag{30}$$

となる。右辺は hammer と pile 頭部が接触圧 zero であるとき，即ち，離反の終速度である V_2, v_2 の時の各々の kinetic energy の和である。くい打ち公式はこの和が pile の貫入抵抗を排除するに使いうべき基本的量であるとみなしているわけである。空間における自由な反発が許せる衝突では，反発後の 2 物体の有する kinetic energy は反発係数 e の使用によって求めうるが，この時 hammer のもっている kinetic energy は空間に浮いたものであることを考えるべきである。その物理的意味は最初の打撃直前の hammer と同じである。これを物理的仕事に利用するには力を作用させて減速しなくてはならない。

§5. 貫入抵抗を考えるくい打ちの解析

質量 M の hammer が静止した質量 m の pile に衝突した場合を考察する (Fig. 3) 先づくい打ち公式 (A) から離れて考える。衝突と共に打撃面に材料の弾性圧縮変形がおこり作用反作用の力 F が hammer と pile 頭間に形成される。pile はこの力で加速される。ここまでは空間におけ

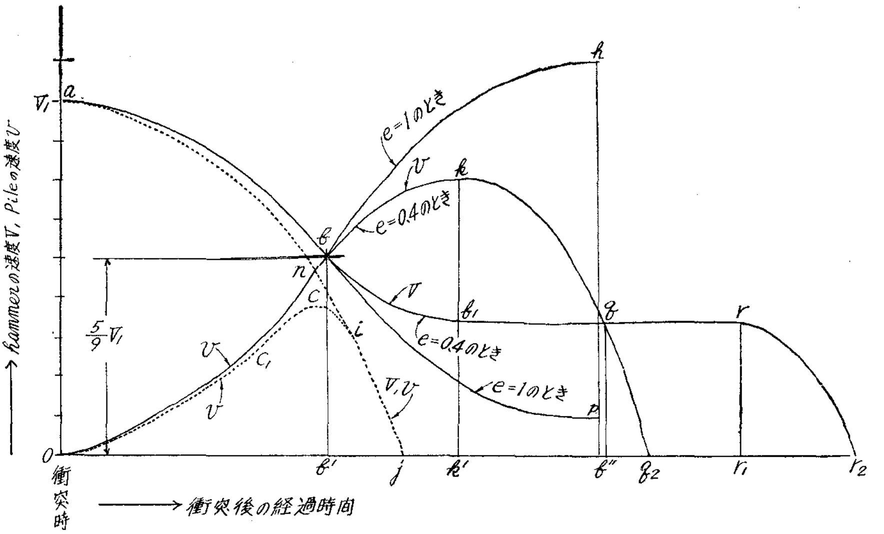

Fig. 3.

る衝突と同じである。これと同時にくいの貫入抵抗が作用する。又，量は未知であるが，くい周にある土はくいによって引きづられ，くいと似た様な運動をする。pile の静止時の質量 m は短時間 dt の間に変化するわけである。そこで運動の式を考えると

$$M\frac{dV}{dt}=F=\frac{d(mv)}{dt}+R_0$$
$$=v\frac{dm}{dt}+m\frac{dv}{dt}+R_0 \qquad (40)$$

にならう。ここで R_0 は初期貫入抵抗，V は hammer の速度，v は pile の速度，M は hammer の，m は pile の質量である。(40) 式で力 F は pile 頭の圧縮変形の増大につれて増す筈で，又 $M=\text{constant}$ とみなしうるから F の増加に見合うため dV/dt を増す必要がある。即ち減速の割合は次第に急である。従って (40) 式右辺の値も増加しなければならぬ。dm/dt はくい周の土がくいの質量に加わる割合で，しばらくは影響半径が増すから一応一定としよう。そうすると右辺の値を増すためひと dv/dt は増加であるが R_0 もあるので m 単独の時よりその速さはすくなくてよい。これは Fig. 3 の oc_1 曲線で表される。これは自由衝突で共通速度 u に至る曲線 onb の下側をとおるだろうことは確かである。さて次に，v がこのまま増速するかどうかを検討する。すでに貫入抵抗 R_0 がある以上，いつか $v=0$ になる可きで，又貫入抵抗 R_0 の中で，くい頭の圧縮抵抗 F がゆるむと考えられることはないだろう。そうすると c_1cij の曲線になって $v=0$ となろう。c は頂点であるから $dv/dt=0$ である。然し (40) 式右辺には R_0 と $v\frac{dm}{dt}$ があるから $\frac{dV}{dt}\fallingdotseq 0$ であり，V と時間の曲線の曲り方は同方向をとり反転はないだろう。即ち c 点では

$$M\frac{dV}{dt}=F=v\frac{dm}{dt}+R_0 \qquad (41)$$

が得られ v は最大である。以後，pile 周の土の pile 運動方向の変形範囲もこれ以上拡大しないから dm は zero に近づき R_0 もふえ R_1 になるかも知れない。pile の速度 v はすでに減速に向っており，c 点で得た kinetic energy も貫入抵抗で急速に失うから hammer の kinetic energy がこれを補う形になろう。ということは pile 頭の圧縮力 F は依然反作用として hammer に逆う必要があり，反発は実現しないだろう。従って

$$M\frac{dV}{dt}+m\frac{dv}{dt}=R_1 \qquad (42)$$

の式に移らねばならぬ。やがて $V=v$，即ち hammer と pile は共通速度になる。この点は oc_1cij 曲線の i 点である。この共通速度を u' とすれば

$$(M+m)\frac{d(u')}{dt}=R_1 \qquad (43)$$

の形をとり，そのまま貫入が続き kinetic energy は消費つくされ速度が zero，即ち貫入停止となる。然し j 点では依然 $\frac{d(u')}{dt}$ は zero でない有限値であるから $M\frac{d(u')}{dt}=F$ として残っており，圧縮されていた変形は hammer を上方に跳ねて開放される。Fig. 3 において面積 $oanijo$ は $\int_{V_1}^{0}Vdt$ であるから打撃 (衝突) 後 hammer の動いた距離を表し，面積 oc_1cijo は $\int_0^c vdt+\int_c^j vdt$ であり，pile 頭の動いた距離を示すことになり，面積 $oaicc_1o$ は動いた距離の差であるから pile 頭の圧縮量を示し，pile 貫入停止の瞬間復元するわけである。この場合圧縮量は hammer と pile の弧性係数に関する。反発係数 e を使いうる自由

反発では弧性が完全であるか，不完全であるかということのみで弾性係数は無関係であり得た。

次にくい打ち公式のように hammer と pile が反発しうるものとする場合，貫入抵抗との関係について考える。Fig. 3 を作る関係上仮りに hammer の質量 $M=500$ kg/g, pile の質量 $m=400$ kg/g, 反発係数 $e=0.4$, pile の初速 v_1 は $v_1=0$ とし，空間の自由衝突であるから (3) 式から共通速度 u は $u=V_1\times\frac{500}{900}=\frac{5}{9}V_1$, 又 (20) 式から hammer の反発時の速度 V_2 は $V_2=V_1-\frac{(1+0.4)\,400\,\text{kg}}{(400+500)\,\text{kg}}=\frac{3.4}{9}V_1$ (19) 式から $v_2=\frac{1.4\times 500\,\text{kg}}{(500+400)\,\text{kg}}V_1=\frac{7}{9}V_1$ となり，$e=1$ とすれば $V_2=\frac{1}{9}V_1$, $v_2=\frac{10}{9}V_1$ となり，その有様は Fig. 3 の abb_1, obk, abp, obh 曲線で示してある。pile の貫入に用いられる energy が，くい打ち公式のように $\left\{WH-\frac{WH\cdot P(1-e^2)}{W+P}\right\}$ であるとするならば，これは equal $\left(\frac{1}{2}MV_2^2+\frac{1}{2}mv_2^2\right)$ であった。反発係数 $e=0.4$ とすればこの時 pile の速度 v_2 は Fig. 3 の縦巨で $k'k$ 表される。そしてこの時から pile の貫入抵抗が始まると考えるのだから，又 pile 頭には何等の作用，反作用の力がないのだから pile の速度 v_2 は貫入抵抗のため直ちに減速する。その速度曲線は Fig. 3 の kqq_2 線であると考える。形はともかくとして，とに角 q_2 点で zero になる運命にあるからである。ただ start は k 点である。hammer の kinetic energy は $\frac{1}{2}MV_2^2$ であるが，V_2 は Fig. 3 の縦巨 $k'b_1$ である。然し pile の速度よりおそい速度になった状態であり，又 pile 頭との間には何等の作用，反作用もないのだから $V_2=k'b_1$ に変化はなく，hammer はこの速度でしばらく進行するだろう。これは b_1q の水平部である。pile は減速しつつ進み hammer の速度 V_2 (Fig. 3 の縦巨 $k'b_1$) にやがて等しくなる。これまでに進行した距離は，面積 $k'kqb''k'$ で表わされる。hammer の進行した距離を示す面積 $k'b_1qb''k'$ とは未だ差があって，面積 $k'kqq_2k'=$面積 $k'b_1rr_1k'$ になる点 r で始めて離反時の距離差になる。この時 pile はすでに $v_2=0$ であり，貫入停止後相当時間 (極めて短時間であるが，短時間の中での相当長時間ということ) 経っており，ここで pile 頭の圧縮変形が開始されて hammer は急速に停止に至る。その圧縮変形量は面積 $r_1rr_2r_1$ である。切角の hammer の kinetic energy は pile 貫入にすこしも貢献する機会に恵まれなかったのである。

§6. 結　言

反発係数 e を導入したくい打公式は hammer と pile が空間で自由に反発すればその速度が (19), (20) 式で示される値になり，この速度で有する kinetic energy の和をこれからの貫入に用いられるとしているわけであるから，速度に着目すればくいが貫入抵抗を排除しようとする時，くいの速度が hammer の速度より速いのである。速度の大小を交換をしてから貫入抵抗に立ち向うという状態であった。然し乍ら hammer と pile の速度交換がおこるためには空間でこの hammer と pile の系に他から外力のないという条件が必要である。即ち自由に反発しうることである。このため完全弾性であえあれば弾性係数に無関係に 100% 速度交換がおき kinetic energy は完全に衝突前にもどる。この弾性係数に無関係という事は pile の固さがくい打ち効率に関係ある事実を説明し得ない。打撃と同時に pile には貫入抵抗があるから，この抵抗を通過する間に速度交換があり得ると肯定しなければならない理はないようである。仮りにあり得るとしても，hammer と pile の運動距離を追求すると hammer は pile が運動を停止してのち相当時間経過してはじめて pile 頭を打撃する羽目になった。これは hammer の kinetic energy は pile の貫入中，すこしも仕事に転化出来なかったことである。筆者は (40) 式を基本的に考えたが，真の共通速度と，これに達する時間等は数値的に困難であるから自由衝突と考えて得られる通常の共通速度 (3) 式を代用し，この速度で hammer と pile が有する kinetic energy を貫入に用いられるもの，即ち常に $e=0$ の時のものとすべきが今のところ e を考えるよりも妥当であろうとおもうわけである。(3) 式の共通速度 u は hammer と pile 頭の弾性係数には無関係であることを示している。これは pile の運動変化が拘束されないで，どんな小さな内力も pile の速度変化の原因たり得たからである。変化時間の大小は両方に共通に作用するので，これらが弾性係数に無関係になった理由である。貫入抵抗があると pile の自由な運動変化を拘束するから貫入をおこすまでに hammer の kinetic energy がどれだけ圧縮変形に吸収されるかは，pile と hammer の弾性係数に関係する。完全弾性体であっても例えばゴムを pile 頭に入れると貫入を開始しないうちに hammer の kinetic energy の相当部分がこれに吸収されてしまうことは明らかである。これらの考慮は (A) 式後半の C_3 の項に織りこまれている。この項のあるということは，貫入運動中に hammer と pile の速度の大小を交換する反発がある。即ち圧縮変形の復元があるという e の使用を自ら否定していることでもある。(3) 式で求める共通速度は拘束のない衝突だからゴムの場合も鋼の場合も差異がない。最大限の共通速度を求めていることである。決して energy 損失を過大に見積りすぎることはないわけである。要は hammer の速度が pile の速度より小さいという状態が貫入抵抗のある最中に実現するかどうかということと，仮りにこの状態で kinetic energy の和を採っても，hammer の kinetic energy は pile の貫入に役立たないだろうということである。　　　　(1967. 8. 1)