

風による二層流の混合に関する研究

正員 岸 力*
 学生員 ○加 藤 正 進**

1. 概 要

塩水淡水二層流の風によって生ずる混合現象を解明することは、工業用水を確保する目的で造られる河口湖などにおいては非常に重要である。密度流の混合現象を考察する場合、鉛直安定度を示す無次元量であるリチャードソン数すなわち

$$R_i = -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dy} \left/ \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \right. \quad (1)$$

の占める役割は重要である。すなわち、リチャードソン数が大きければ鉛直安定度は高く、したがって混合現象も起こりにくいと考えられる。

本研究では二層流における混合現象をリチャードソン数に注目して、下層塩分の上層への混入量を推定する実験式をリチャードソン数の関数で示した。

2. 実験装置および測定方法

実験に用いた風洞付水路は図-1に示す片面ガラス張り全長15m、幅40cm、高さ60cmのものであり、水路床は水平である。風速はオリフィスプレートの径を変えることにより変化し、水路中央においてピトー管を用いて測定された。流速はキシロール($C_6H_4(CH_3)$ 比重0.875)と四塩化炭素(CCl_4 比重1.594)の混合液に少量のアスファルトを混ぜて作られた油滴の移動時間より計算された。塩分濃度分布は水路中央において約1cm間隔で測定し、濃度の測定には電導度計を用いた。

塩水淡水の二重層は、水路内にあらかじめ所定の水深まで淡水を入れておき塩水を水路床から微流速で注入し淡水と置換させることによって作られた。

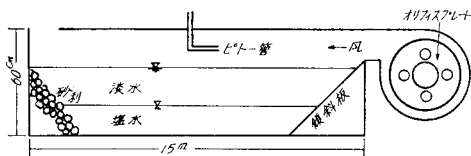


図-1 実験水路

3. 境界面の定義および計算方法

塩水淡水の二層流において密度が境界面で不連続になることは考えられず、必ず密度勾配を有する層が存在する。

このような場合どの面を境界面と定義するかは混入量、リチャードソン数の計算の際に問題となる。

図-2(a), (b)に鉛直濃度分布の測定例を示す。(a)は濃

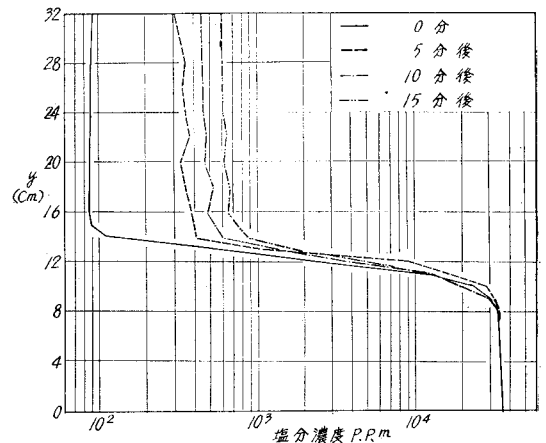


図-2(a) 鉛直濃度分布の測定例

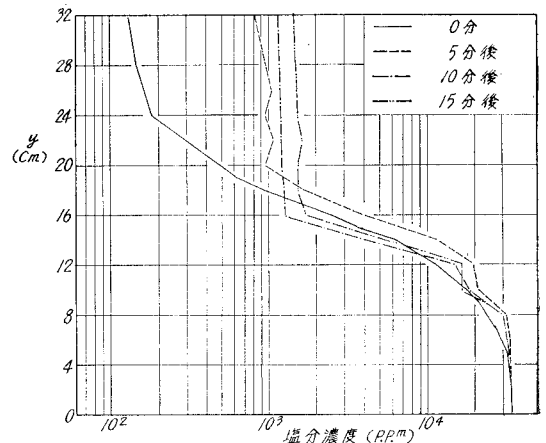


図-2(b)

* 北海道大学工学部教授 工博

** 北海道大学大学院 工学研究科

度勾配が大きく鉛直安定度が高い例であり (b) は鉛直安定度の低い例である。

我々は下層と上層の密度の平均密度を有する面を境界面と定義しリチャードソン数の計算を行なった。(a) の場合のように比較的鉛直安定度の高い場合には上層水深はほとんど変化なく (a) の例では $y=14\text{ cm}$ で濃度は急変する。そこで混入量の計算には $y=14\text{ cm}$ より上層での濃度変化を用いた。(b) の場合のように鉛直安定度の低い場合は、時間とともに濃度勾配は大きくなり (b) の場合では 10 分後で $y=16\text{ cm}$ にて濃度の急変が起こる。そのため (b) の例では 0 分から 10 分までは $y=20\text{ cm}$ 、10 分から 15 分の間では $y=16\text{ cm}$ より上層に混入した塩分量を調べた。

4. 吹送流の限界クーリガン数

Keulegan は境界面に発生する内部波のエネルギーが下層流体の粘性により定常的に消費されてしまうと考え、粘性を考慮した内部波の安定を解析し安定条件を示す無次元量としていわゆるクーリガン数

$$\theta = \left(\frac{4\rho}{\rho_1} \nu_2 g \right)^{1/3} / u \quad (2)$$

を提案した。彼は上流の実験結果から限界時のクーリガン数として、図-3 に示すような結果を得た。

この結果レイノルズ数を $Re_1 = u_1 h_1 / \nu_1$ とすると

$$\left. \begin{array}{ll} Re_1 < 1800 \text{ に対し} & \theta_c = 0.127 \\ Re_1 > 1800 \text{ に対し} & \theta_c = 0.178 \end{array} \right\} \quad (3)$$

となる。内部フルード数、内部レイノルズ数を (4) 式で表わし、(2) 式で示されるクーリガン数を変形すると (5) 式が得られる。

$$F_i = u \sqrt{\frac{4\rho}{\rho_1} g h_2}, \quad Re_2 = u h_2 / \nu_2 \quad (4)$$

$$\theta^3 = 1 / (F_i)^2 Re_2 \quad (5)$$

Ippen & Harleman は下層流の実験から限界時には $F_i = 1$ となりクーリガン数は内部レイノルズ数に逆比例するとした。この実験結果を図-3 に示す。

我々は吹送流の実験より限界時のクーリガン数がどのようにあらわされるかを調べた。風により生ずる境界面付近の逆流々速がある限界を越えると境界面には内部波が生じさらに流速が増大すると内部波は碎波し、下層の塩分は上層に混入し拡散する。我々は観察により境界面に生ずる内部波の状態を次のように分類した。

- class A: 内部波がかすかに認められる
- class B: 内部波がはっきり認められる
- class C: 内部波がわずかに碎波する

このような観察に基づいて得られた限界クーリガン数を Keulegan, Ippen & Harleman の実験結果と合わせて図-3 に示す。この結果、 $Re_1 = u_1 h_1 / \nu_1$ が $2 \times 10^3 < Re_1 < 5 \times$

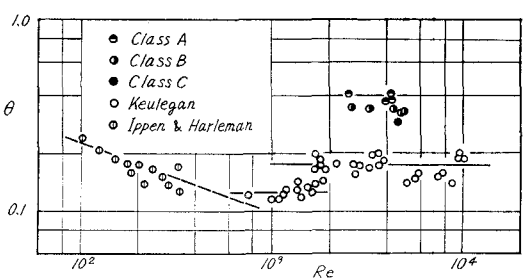


図-3 クーリガン数とレイノルズ数の関係

10^3 の範囲においてつぎの結果を得た。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{class A に対し} & \theta_c = 0.40 \\ \text{class B " } & \theta_c = 0.34 \\ \text{class C " } & \theta_c = 0.30 \end{array} \right\} \quad (6)$$

本実験で得られた限界クーリガン数は Keulegan が実験で得た値よりかなり大きな値となっている。すなわち、他の条件が同じ場合、流速が小さな場合でも境界面に内部波が生ずることになる。表-1 にこの実験例でのリチャードソン数とクーリガン数を示す。

表-1 によると、クーリガン数がリチャードソン数により変化するという明らかな関係は認められない。

表-1

θ	0.424	0.381	0.377	0.338	0.324	0.329	0.295
R_i	41.02	12.02	41.63	16.20	31.73	8.86	20.41
class	A	A	A	B	B	B	C

本実験で得られた限界クーリガン数と、Keulegan が得た値の相異の原因としては次のことが考えられる。

本実験では限界クーリガン数を決定する場合境界面付近の逆流々速を用いたのに対し、Keulegan は上層流の平均流速を用いて決定している。彼自身論文に述べているように境界面付近では流速は減少し平均流速よりかなり小さな値となる。そのため境界面付近の流速を用いてクーリガン数を決定するならばその値は彼が示した値よりも当然大きくなるはずである。又、Keulegan は上層流の実験から限界クーリガン数を決定したが、本実験では吹送流により決定した。この実験条件の相異にも原因があると考えられる。すなわち、境界面付近の流速分布がそれぞれ異なるためとも考えられるし、吹送流の場合水面に生ずる風波が境界面の安定に一定程度の影響を与えとも考えられる。

5. 下層塩分の混入速度

前にも述べた限界クーリガン数より小さなクーリガン数を有する場合には、内部波は碎波し下層の塩分が上層に混入し始める。Keulegan は混入速度として次の式を用いている。

$$u_m = \frac{Q}{A_i} \frac{\Delta C}{C_2} \frac{1}{\Delta t} \quad (7)$$

u_m : 下層塩分の混入速度

Q : 上層の全体的積

A_i : 境界面の全面積

ΔC : Δt 時間後における上層塩分濃度の増加量

C_2 : 下層の塩分濃度

彼は実験により下層塩分の混入速度が流速に比例することを調べ、混入速度を次の実験式で示した。

$$u_m = 3.5 \times 10^{-4} (u - u_1) \quad (8)$$

u_m : 下層塩分の混入速度

u : 上層の平均流速

u_1 : わずかに混合する時の上層平均流速

彼は密度差 $\Delta\rho/\rho_1$ と式 (8) における係数の関係を示しているがそれを図-4に示す。これによると密度差が大きくなると式 (8) の係数は減少する傾向にある。このことは、リチャードソン数が多い場合には混入速度は減少することを意味するものである。

我々は混入速度とリチャードソン数との関係を調べてみた。まず先に示した限界クーリガン数の妥当性をうらづけるため以下の考察をする。下層塩分の混入速度と境界面付

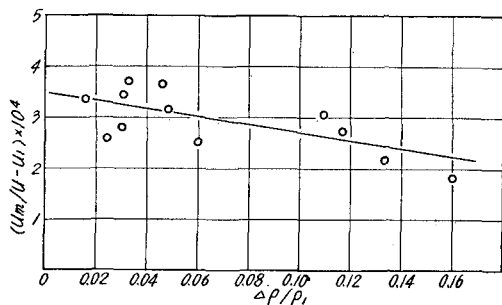


図-4 混入速度と密度差の関係 (Keulegan)

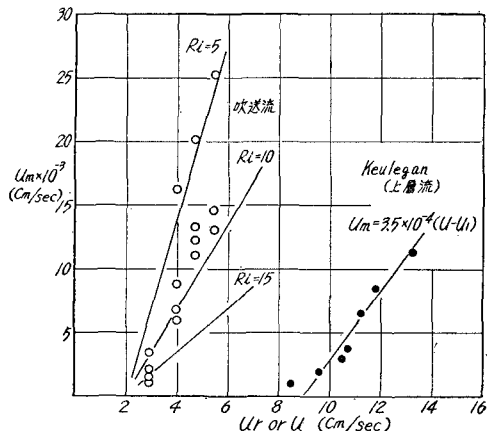


図-5 混入速度と流速の関係

近の逆流々速との関係を図-5に示す。

これによると、限界時の逆流々速は約 2 cm/sec と推定される。先に述べたように、内部波がわずかに碎波する状態 class C では、 $\theta_c = 0.30$ であるから $v_2 = 0.01$ cm²/sec, $g = 980$ cm/sec², $\Delta\rho/\rho_1 = 0.03$ として逆流々速を計算すると

$$u_r = (0.01 \times 980 \times 0.01)^{1/3} / 0.30 = 2.2 \text{ cm/sec}$$

となり、推定値とほぼ一致する。このことから限界クーリガン数の値は妥当であると思われる。

下層塩分の混入速度 u_m とリチャードソン数 Ri との間には次元的に考え次の関係が成立するはずである。

$$u_m = f(Ri) (u - u_c) \quad (9)$$

すなわち、Keulegan による式 (8) の係数はリチャードソン数の関係で示されるべきである。この考えに基づき実験より得られた混入速度とリチャードソン数との関係を調べると図-6のようになる。図-6 よりつぎの実験式を得る。

$$u_m = 3.5 \times 10^{-3} Ri^{-1} (u_r - u_c) \quad (10)$$

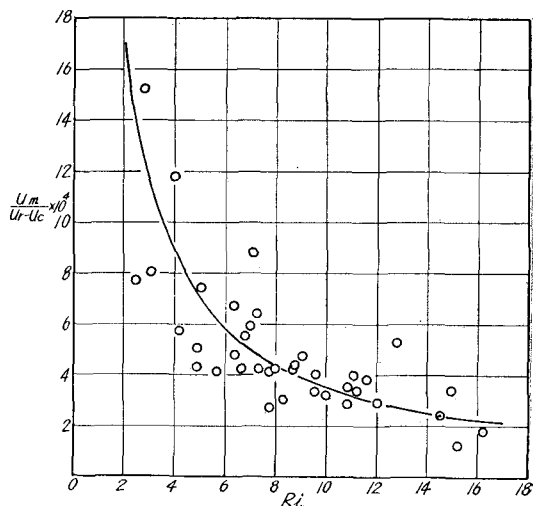


図-6 混入速度とリチャードソン数の関係

6. 下層塩分の渦動拡散および渦動拡散係数

乱れた流れにおいては乱れによる速度の変動により渦動拡散が生ずる。ここでは安定限界を越えて内部波が碎波し下層塩分が上層へまい上げられ拡散する過程を渦動拡散と考えて考察する。

今 y 方向の変動速度 v' による輸送を考え、単位面積、単位時間に y 方向に乱れによって輸送される平均の塩分量を q とし、時刻 t_0 における y_0 点の塩分濃度を $C(y_0, t_0)$ とすれば一般に

$$q = \overline{v' C(y_0, t_0)} \quad (11)$$

である。変動速度 v' をもつ水塊が平均の距離 l だけ輸送

され、それに要する時間を δt とすれば $y_0 = y - l$, $t_0 = t - \delta t$ であるから $C(y_0, t_0)$ をテーラー展開して高次の項を省略すれば次式となる。

$$C(y_0, t_0) = C(y - l, t - \delta t) \\ = C(y, t) - l \frac{\partial C(y, t)}{\partial y} - \delta t \frac{\partial C(y, t)}{\partial t} \quad (12)$$

(11), (12) 式より $\bar{v}' = 0$ を考慮すれば

$$q = -\bar{v}' l \frac{\partial C(y, t)}{\partial y} \quad (13)$$

式 (13) において $\bar{v}' l$ は鉛直方向の塩分渦動拡散係数でありこれを K_s で表わし、 $C(y, t)$ を C とすれば次式となる。

$$q = -K_s \frac{\partial C}{\partial y} \quad (14)$$

(14) 式で問題となるのは K_s の表現方法である。そのため密度勾配を有する流れにおいて、密度勾配が塊界面の安定に及ぼす影響を知る必要がある。

密度勾配のある流れにおいて、乱れが重力に対して行なう仕事の時間的な変化は、水塊が基準面より Y だけ上方に持ち上げられたとすれば

$$\frac{1}{2} \rho g \beta \frac{d}{dt} (\bar{Y}^2) \quad \beta = \frac{1}{\rho} \left| \frac{d\rho}{dy} \right| \quad (15)$$

で表わされる。乱れのエネルギーが減少しないものとするば、これはレイノルズ応力によって行なわなければならない。レイノルズ応力が単位時間に行なう仕事は

$$\tau \frac{du}{dy} = \tau \alpha \quad \alpha = \frac{du}{dy} \quad (16)$$

であるから、密度勾配を有する流れが安定であるためには次の関係が成立する。

$$|\tau \alpha| < \frac{1}{2} \rho g \beta \frac{d}{dt} (\bar{Y}^2) \quad (17)$$

(15) 式において $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\bar{Y}^2)$ は塩分の鉛直渦動拡散係数 K_s である。又、Momentum の拡散係数を K_M とすれば

$$K_M = \tau / \rho \alpha \quad (18)$$

であるから、(17) 式を K_s , K_M を用いて書き直すと

$$R_f = R_\ell \cdot \frac{K_s}{K_M} > 1 \quad (19)$$

となる。 R_f はフラックスリチャードソン数といわれるもので、 $R_f > 1$ ならば流れは安定となる。

密度流中の渦動拡散係数の表現方法には2つの考え方がある。1つはリチャードソン数の有限値で拡散が生じなくなるといふ考え方で、この考え方から Holzman, 山本はそれぞれ次の式を提案している。

$$K_s = K_0 (1 - \gamma R_\ell) \quad \text{Holzman} \quad (20)$$

$$K_s = K_0 (1 - \gamma R_\ell)^{1/2} \quad \text{山本} \quad (21)$$

一方, Munk & Anderson は次の条件を用いている。

$$\left. \begin{array}{ll} R_\ell \rightarrow 0 & K_s = K_0 \\ R_\ell \rightarrow \infty & K_s = 0 \end{array} \right\} \quad (22)$$

(22), (19) の条件から彼等は Jacobsen のデータを整理し、次式を提案している。

$$K_s = K_0 (1 + 3.33 R_\ell)^{-3/2} \quad (23)$$

$$K_M = K_0 (1 + 10 R_\ell)^{-1/2} \quad (24)$$

Prichard は (13) 式の v' , l がそれぞれリチャードソン数に影響されるものと考え、James River での観測値から次式を示している。

$$K_s = K_0 (1 + 0.276 R_\ell)^{-2} \quad (25)$$

我々の吹送流の実験より得られた結果を図-7に示す。

ここで K_0 の計算が問題となるが、我々は以下の方法で行なった。水路床付近での流速分布は対数分布をなしていると考え、 K_0 は次式で表わされる。

$$K_0 = K u_* b y \quad (26)$$

水面に働くせん断力 τ_s と水路床に働くせん断力 τ_b の比 $m = \tau_b / \tau_s$ は流れが乱流である場合 $m = 0.1$ 程度であることが Von Dorn らによって報告されている。 $m = 0.1$ $K = 0.4$ とすれば (26) 式は次式となる。

$$K_0 = 0.127 u_* s y \quad (27)$$

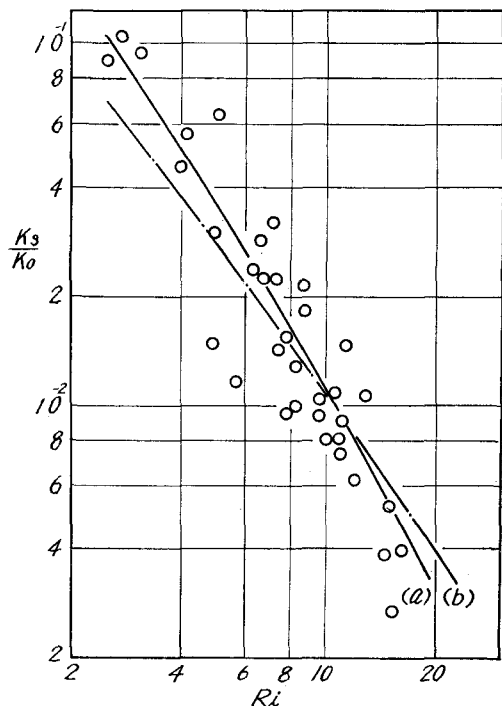


図-7 渦動拡散係数とリチャードソン数の関係

我々は実験より、静水面上5 cmの点での風速 V_5 と水面摩擦速度 u_{*s} との関係として次式を得た。

$$u_{*s} = 1.289 \times 10^{-3} \cdot V_5 \quad (28)$$

又、吹送流流速速度分布の測定により対数分布が成立するのは、上層水深の約1割程度までと考えられるから $y = \frac{1}{2} \times 0.1 H_1$ と考え K_0 の平均値として次式を得る。

$$K_0 = 8.15 \times 10^{-6} H_1 \cdot V_5 \quad (29)$$

図-7の実線 (a) は係数が2乗の場合、鎖線 (b) は3/2乗の最も妥当と思われる曲線である。実験式として次式を得る。

$$(a) \quad q = -K_0(1 + 0.848 R_g)^{-2} \frac{dC}{dy} \quad (30)$$

$$(b) \quad q = -K_0(1 + 1.955 R_g)^{-3/2} \frac{dC}{dy} \quad (31)$$

図-7から判断すれば (a) の曲線の方が実験値をよくとらえているように思われる。

7. 実測値との比較

渦動拡散の考えに基づき得られた実験式を用い、小櫃川河口のモデル池での観測値を例にとり下層塩分の混入量を推定してみる。モデル池での観測値を図-8に示す。

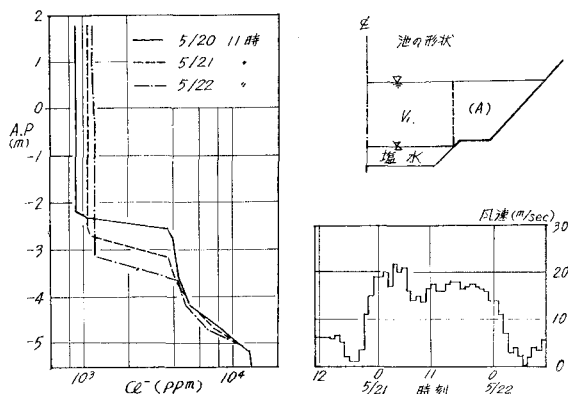


図-8 モデル池の観測値

岸は風速と風により影響される表層水深を調べ次式を提案している。

$$H_1 = 5 \log_{10} V - 1.0 \quad (32)$$

この例では表層水深は4 mであるから、10 m/sec以上の風が問題となる。平均風速は17 m/secと考えられ、又、風速は水面からの高さにより変化するが近似的に式 (28) を用い (29) 式を用いて K_0 を計算すると

$$\begin{aligned} K_0 &= 8.15 \times 10^{-6} \times 4.00 \times 10^2 \times 17 \times 10^2 \\ &= 5.542 \text{ cm/sec} \end{aligned}$$

下層を塩素イオン濃度 4×10^3 ppm 付近と考えると境界

面での鉛直安定度は $1/\rho \cdot d\rho/dy = 1.623 \times 10^{-4} \text{ 1/cm}$ であり速度勾配としては我々の実験式 $du/dy = 20 \cdot u_{*s}/H_1$ がそのままではまるとすると、リチャードソン数は $R_g = 13.255$ となる。境界面の濃度勾配は $dC/dy = 8.90 \times 10^{-5}$ であるから式 (30) を用いて単位時間単位面積を通り輸送される塩分量を計算すると

$$\begin{aligned} q &= 5.542 \times (1 + 13.255)^{-2} \times 8.90 \times 10^{-5} \\ &= 3.292 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

図より10 m/sec以上の風は連続して29時間吹いているから断面1 m²の単位水柱を考えると下層塩分の輸送量は

$$Q' = 3.292 \times 10^{-6} \times 10^4 \times 29 \times 3600 = 3438 \text{ (g)}$$

しかし、モデル池の形状は図に示されるように逆円錐形をなしており、図の(A)の部分の一樣濃度になるから V_0 を表層の全体積、 V_1 を(A)の部分を除いた体積とすると

$$V_1/V_0 = 4200/11400 = 0.372$$

となるので、この補正を行なうと

$$Q = 3438 \times 0.372 = 1279 \text{ (g)}$$

実測値より塩分の輸送量を計算すれば $Q = 1202 \text{ (g)}$ であるから推定値とかなりよく一致する。

8. あとがき

密度流の合混現象をリチャードソン数に注目して考察した結果、リチャードソン数が混合現象に及ぼす影響は大きく、塩分の輸送量を考える場合リチャードソン数を含む関数で考えなければならないであろう。

実測値と推定値の比較の結果、本実験で彼られた実験式を用いて計算された下層塩分の輸送量はかなり実測値と一致した。しかし、リチャードソン数がかなり大きく、本実験の範囲外にある場合には問題があるようである。

参考文献

- 1) Keulegan, G. H.: Interfacial instability and mixing in stratified flows. Jour. of Res. of the National Bureau of standards, Vol. 43, Nov. (1949).
- 2) Ippen, A. T. and Harleman, D. R. F.: Steady-state characteristic of subsurface flow, Gravity wave symposium, Nat. Bur. of Standards. Circulation 521 (1951).
- 3) Munk, W. H. and Anderson, E. R.: Notes on a theory of the thermocline, Jour. of Marine Research, Vol. VII (1948).
- 4) Prichard, D. W.: The movement and mixing of contaminants in tidal estuaries. Waste disposal in the Marine environment Pergamon Press.
- 5) 岸 力: 河口湖二層流の安定に関する研究—風による二層流の混合に関する研究. 河口湖開発調査委員

会研究報告.

- 6) 岸 力・加藤正進：河口湖二層流の安定に関する研究—風による二層流の混合第2報. 河口湖開発調査委員会研究報告.
- 7) 岸 力・加藤正進・小野正二：吹送流の乱流速度分

布と二層流の混合に関する研究. 第22回土木学会年次学術講演会講演概要 (1967).

- 8) 岸 力・加藤正進：二層流の風による混合に関する研究. 第14回海岸工学講演会講演集.