

北海道主要都市における確率雨量強度式について

——生起頻度を含む式型について——

正 員 島 節 雄*

1. はじめに

水文学において降雨、流出等の現象をある関数型で近似させる方法はよく用いられる手法であり、多くのものは代数関数型であった。

例えば雨量強度式では1891年にTalbotが双曲線型のものを提案し、1905年にはShermanによって指数型、ClevelandによってTalbot, Sherman両式型の中間型が提案された。

本邦においては1927年に久野氏によってCleveland-type ($i=a/t^n+b$ t は降雨継続時間, a, b は定数)の指数 n を $1/2$ とした $i=a/\sqrt{t}+b$ が提案され、1956年に石黒氏によって本邦主要都市25市の雨量強度式について確率年毎の定数が提案されている。この他、 $n=1$ としたものには川上又は高橋氏、 $n=1.35$ としたものには飯塚氏等の研究がある。

生起頻度を含む合理的な式型として水理公式集にも掲載されているBernard (1942) 提案の $i=KF^m/(t+b)^n$ がある。式中 F は生起頻度, m, n は指数である。吉野氏は1960年にBernard-typeにおいて生起頻度を含まない式型 $i=K/(t+b)^n$ について本邦における各定数を提案している。以上がこの分野におけるこれまでの発展経過の概要である。

筆者は、北海道の主要都市2町8市の短時間降雨記録3,132個をThomas法により超過確率を計算して定めた継続時間毎の雨量強度を基にして代数関数の近似による確率雨量強度式の生起頻度を含む式型について研究し、ある条件のもとにそれがBernard-typeとなることを確かめ、この式の適合性を増すための近似法について1,2の提案をなし、あわせてBernard-typeの成立条件を考究せんとするものである。

2. 各超過確率年毎の雨量強度の計算

水文資料が相当数なければ雨量強度式の精度の点で問題があるが、今回の資料は少ないもので約30年でありほとんどのものは観測年が60年以上であるので図解法によった

ものを使用した。

まず1, 2, 3, …… 8時間の各短時間雨量について年最大値を1個抽出して両対数正規確率紙にPlotしThomas法で算出した確率降雨量を継続時間で平均し確率年毎の各時間雨量強度を求めるものである。

この値について筆者は計算はおこなわず道・河川課編纂の「統・北海道における大雨資料」にあるものを使用した。

3. 雨量強度式の関数型について

この雨量強度式は確率年と継続時間からなる2個関数であり、式の性質を変数によって分析すれば雨量強度と継続時間の関係は継続時間に対する減少関数であり、雨量強度と確率年は確率年に対する増加関数である。

今減少関数を $\varphi(t)$ 、増加関数を $\psi(r)$ とすると、異なる領域をもつ二つの平面において φ 平面上に曲線 C_φ ; $\varphi=\varphi(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) があって、 ψ 平面上に曲線 C_ψ ; $\psi=\psi(r)$ ($0 \leq T \leq 1$) がある場合には合成関数接続の原理から関数要素 P_t (φ)= $P(\varphi; \varphi(t))$, ($0 \leq t \leq 1$) によって解析接続が定義される。 $\varphi(t=1)=C$ とすれば確率年毎にこの様な点は無数に存在するから、共役領域をもつ1つの平面が考えられる。これが即ち合成関数のParameterであり、この理論より各確率年に対する一定な降雨継続時間が共役領域を示すはずである。従って雨量強度式は次なる合成関数の形で表現出来る。

$$r = F(T, t) = \varphi(t) \cdot \psi(r)$$

式中 $\varphi(t)$ は降雨継続時間に対する減少関数、 $\psi(r)$ はある一定な降雨継続時間における確率年に対する増加関数をあらわすものとする。

i. 減少関数 (代数関数型による近似)

雨量強度と継続時間を確率年毎にlog-log紙にPlotしその回帰直線を各確率年のそれが図-2の如く平行線となるように近似すればその関数型は $\varphi(t)=t^{-n}$ の指数型となる。Parameterにとった継続時間に座標原点をとって考えると $t=1$ において $\varphi(t)=C$ となり C は原点の座標をあたえることがわかる。即ち C はParameterである。指

* 北海道土木部河川課 技師

数 n は次の如く計算すればよい。

$$n = \frac{\log f(t=10) - \log f(t=1)}{\log 10 - \log 1} \\ = \log f(t=10) - \log f(t=1)$$

但し t は降雨継続時間

ii. 増加関数 (代数関数型による近似)

合成関数の接続の理論に基づき降雨継続時間 1 時間の確率年毎の雨量強度を log-log 紙に Plot すると全道どこの場合でもほぼ一直線上に並ぶことがわかる。

その回帰直線は $\phi(T) = aT^m$ なる指数型である。

定数解析は減少関数同様図解法によればよい。

即ち $a = \phi(T=1)$

$$m = \log f(T=10) - \log f(T=1)$$

で求められる (図-1 参照)。

iii. 合成関数

共役領域において関数連続の条件から (1), (2) が成立する。

$$\phi(T=1) = \varphi(t=1) \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t=1) &= C \\ \phi(T=1) &= a \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$\varphi(t)$, $\phi(T)$ の一般形は

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t) &= C \cdot t^{-n} \\ \phi(T) &= a \cdot T^m \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

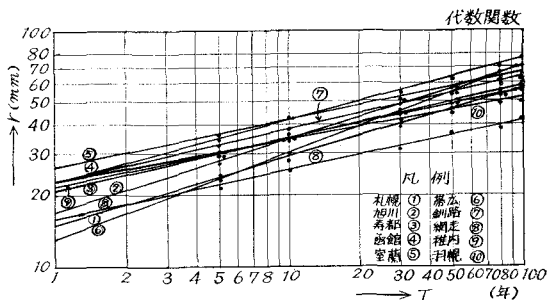


図-1 確率年，雨量強度相関図

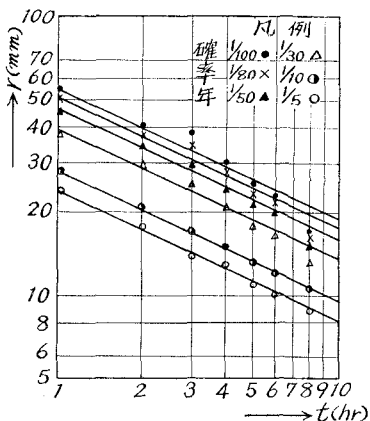


図-2 継続時間，雨量強度相関図 (札幌)

(1), (2), (3) より合成関数は

$$F(T, t) = a \cdot T^m \cdot t^{-n} \quad \therefore C = a \cdot T^m \\ = a \cdot T^m / t^n \quad (4)$$

即ち C は $\phi(T)$ で置換えることが出来るから T の関数でもあるわけである。

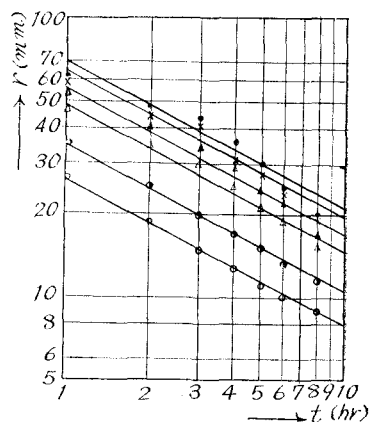


図-3 継続時間，雨量強度相関図 (旭川)

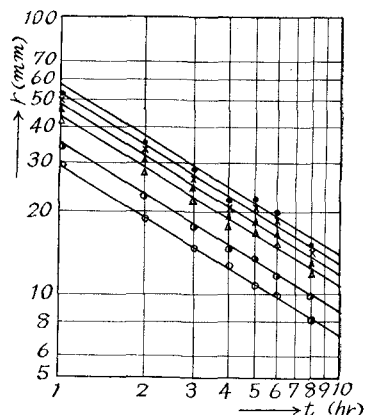


図-4 継続時間，雨量強度相関図 (寿館)

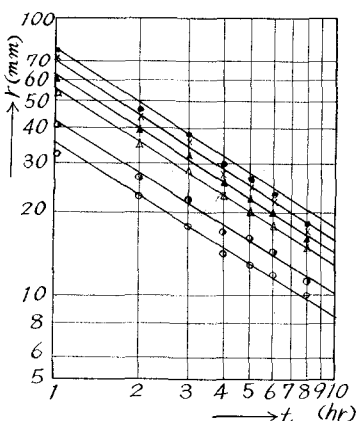
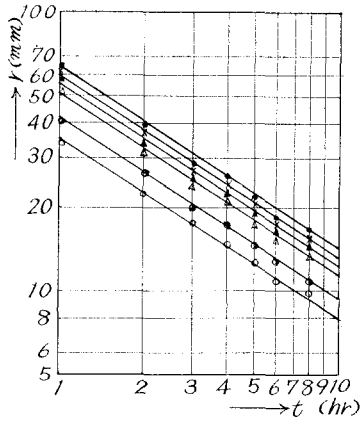
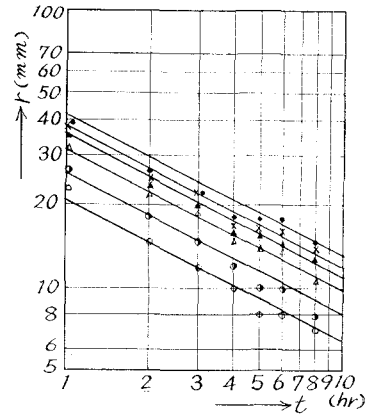


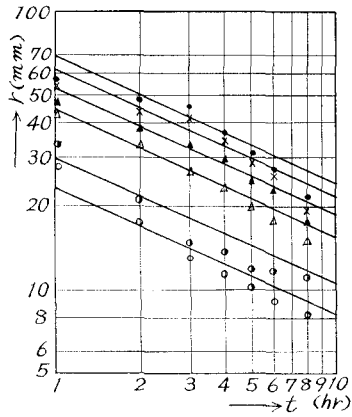
図-5 継続時間，雨量強度相関図 (函館)



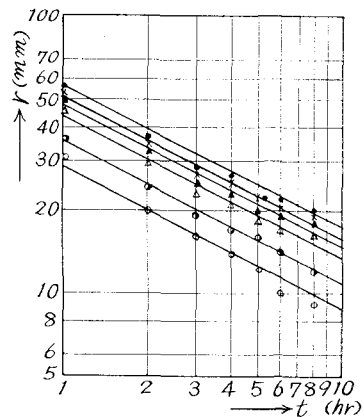
図—6 継続時間，雨量強度相関図（室蘭）



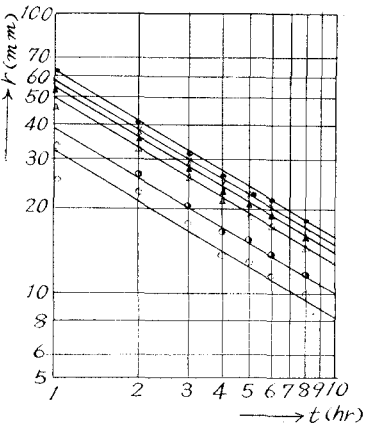
図—9 継続時間，雨量強度相関図（網走）



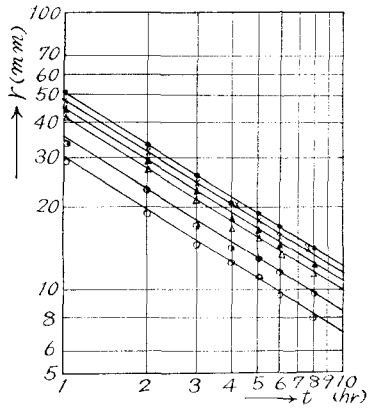
図—7 継続時間，雨量強度相関図（帯広）



図—10 継続時間，雨量強度相関図（稚内）



図—8 継続時間，雨量強度相関図（釧路）



図—11 継続時間，雨量強度相関図（羽幌）

iv. Bernard type について

解析接続理論によって誘導した生起頻度を含む確率雨量強度式は Bernard type の基本式に非常に類似しているが b の項がない。この理由について考えてみることにする。今、雨量強度がその継続時間に対して log-log 紙において

仮りに 12-図の如く 2 直線からなる分布を示すものとする。この場合 10 時間以後の分布について近似式を誘導したものとすると、其の式による 10 時間以前の雨量強度は過大となり、実際にそれが対応する時間は 1 時間については b , 2 時間についても b 時間とそれぞれ Slide した時間

である。

従ってこの Slide のための項、即ち補正項 b を考慮すると (4) 式は次の如くなる。

$$F(T; t) = a \cdot T^m / (t+b)^n$$

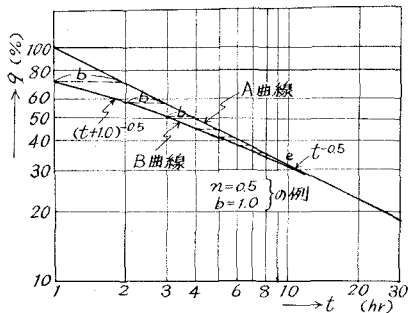


図-12 継続時間、雨量配分率相関図 (Bernard 型)

1) 補正項 b の決定

b は目視でも求められるが次の方法により近似解が得られる。図-12 において e 点で近似的に 2 直線が一致するものとする。交点における座標誤差を ΔE とすると次式が成立つ。

$$C(1+\Delta E)/(t+b)^n \doteq C/t^n \quad (5)$$

n は米国の場合 $0.4 < n < 0.86$ であり吉野氏の本邦における研究では $0.6 < n < 0.8$ と報告されているが、本道の場合は筆者の研究によると $0.4 < n < 0.8$ である。そこで (5) 式の $(t+b)^n$ において $n \leq 0.8$, $b/t \leq 0.3$ の範囲では展開式の 3 項以下が省略出来るから、近似式

$$(t+b)^n \doteq t^n(1+n \cdot b/t) \quad (6)$$

を得る。次に (5), (6) 式より (7) 式を得る。

$$\begin{aligned} C(1+\Delta E)/t^n \cdot (1+n \cdot b/t) &= C/t^n \\ (1+\Delta E)/(1+n \cdot b/t) &= 1 \\ \therefore b &= \Delta E \cdot t/n \end{aligned} \quad (7)$$

ΔE の範囲は $0.02 < \Delta E < 0.05$ が望ましい。

2) 折曲点以前の点の分布則

図-12 において A, B 両曲線の縦の開きを d とし、その A 線の縦座標に対する割合を p (%) とすると、(8) 式の計算結果より Bernard 基本型が成立するための点の分布則が得られる。

d は図-12 における A, B 両曲線の任意継続時間における縦の開きとする。

$$d = C/t^n - C/(t+b)^n \quad (8)$$

$$(t+b)^n = t^n(1+n \cdot b/t) \quad (9)$$

$$d = p \cdot C/t^n$$

と置換えられるから

$$p \cdot C/t^n = C/t^n - C/t^n(1+n \cdot b/t)$$

これより

$$\begin{aligned} p &= 1 - 1/(1+n \cdot b/t) \\ &= n \cdot b/t + n \cdot b \quad n \cdot b = a \text{ と置くと} \\ &= a/t + a \end{aligned} \quad (10)$$

(9), (10) 式より

$$d = (a/t + a) \cdot C/t^n$$

以上の結果より A, B 両曲線の縦の開きが継続時間に関する双曲線型の代数関数で表わされる変化率に従うことが Bernard 基本型の成立条件となる。この条件を Bernard-type における点の双曲線分布則と称する。

1) では b の計算法を述べたが、この双曲線分布則によっても計算することが出来る。即ち次式によればよい。

$$b \doteq 1/N \cdot \sum_{i=1}^n \{p_i \cdot t_i / n(1-p_i)\} \quad (11)$$

N ; 資料数

$$p = d \cdot t^n / C \quad (12)$$

上式において d は各継続時間に対応する値を図より読みとり (11), (12) 式より b の平均値を計算する。

補正項 b が 0 とならない条件としては (1) 折曲線点以前において、折曲点に引かれた接線と各点との縦の開きが (2) で誘導した双曲線型の点の分布則に従うこと。又は (2) 同区間において、接線と各点との横の開きが折曲点以前の時

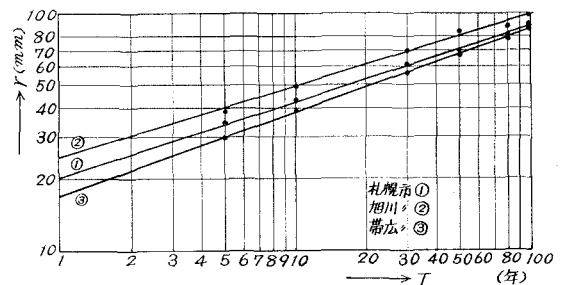


図-13 確率年、雨量強度相関図

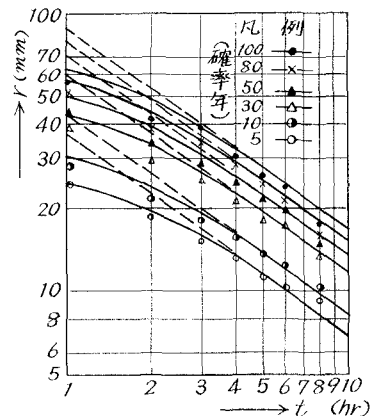


図-14 継続時間、雨量強度相関図 (札幌)

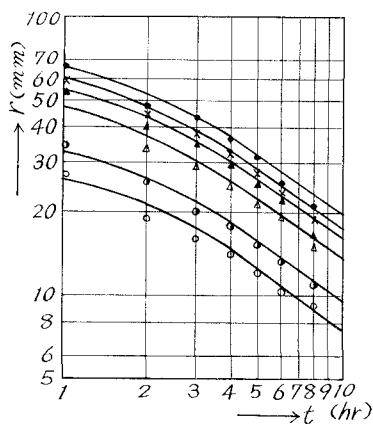


図-15 継続時間，雨量強度相関図 (旭川)

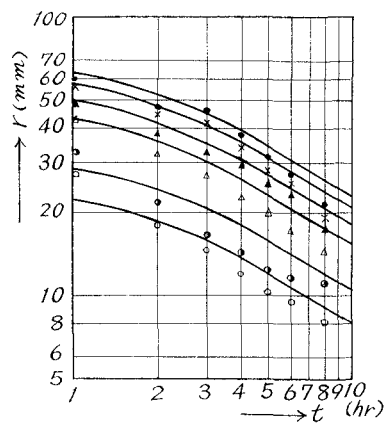


図-16 継続時間，雨量強度相関図 (帯広)

表-1 代数関数型確率雨量強度式

地名	回帰直線型	確率雨量強度式	地名	回帰直線型	確率雨量強度式
札幌市	Dog-leg	$\frac{15 \cdot T^{0.29}}{t^{0.46}}$	帯広市	Dog-leg	$\frac{13 \cdot T^{0.36}}{t^{0.44}}$
旭川市	"	$\frac{17 \cdot T^{0.3}}{t^{0.5}}$	釧路市	"	$\frac{23 \cdot T^{0.22}}{t^{0.59}}$
寿都町	単一直線	$\frac{21 \cdot T^{0.21}}{t^{0.6}}$	網走市	"	$\frac{16 \cdot T^{0.21}}{t^{0.51}}$
函館市	Dog-leg	$\frac{23 \cdot T^{0.26}}{t^{0.63}}$	稚内市	単一直線	$\frac{22 \cdot T^{0.2}}{t^{0.51}}$
室蘭市	単一直線	$\frac{26 \cdot T^{0.2}}{t^{0.65}}$	羽幌町	"	$\frac{23 \cdot T^{0.17}}{t^{0.61}}$

間ではほぼ一定であること等である。(6)式をみてもわかる通り，継続時間がある値以上になると $n \cdot b/t$ の項が近似的に 0 となるから，それ以後では補正項 b は 0 と考えてもよく筆者の誘導した式型は Bernard-type と云えるわけである。

3) 本道における Bernard 基本式

筆者は Bernard 基本型による確率雨量強度式の誘導を本道の主要都市 2 町 8 市について試みたが札幌，旭川，帯広の内陸地方について一応の適応性を示すことがわかった (13~16 図参照)。

それらの式は下記の通りである。

$$\text{札幌市 } r = 20 \cdot T^{0.322} / (t + 0.6)^{0.73}$$

$$\text{旭川市 } r = 25 \cdot T^{0.30} / (t + 0.6)^{0.72}$$

$$\text{帯広市 } r = 17 \cdot T^{0.35} / (t + 0.7)^{0.564}$$

Dog-leg 型，確率雨量強度式を上記 3 式の如く b の項がある場合と，折曲点を無視して直線で近似した b の項がない場合とを比較検討したが実用上，大差がないので(4)式をもって代数関数型の代表式とする。

4. 指数関数型による近似について

表-1 の代数関数型による確率雨量強度式は回帰直線が単一直線であったものについてはよく適合するが，Dog-leg の場合は降雨継続時間 5 時間以上で 10% 程度の誤差を生じた。これは減少関数を log-log 紙において直線近似としたためで実際には 3 時間，6 時間附近に折曲点があるからこれを指数関数型で近似すると比較的良好の結果を得た。

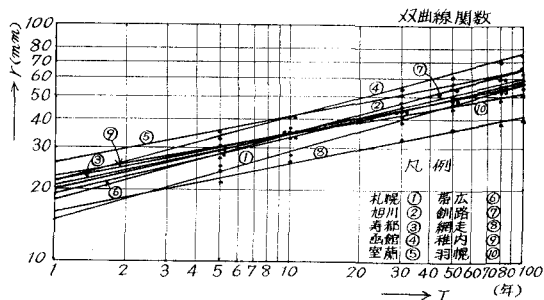
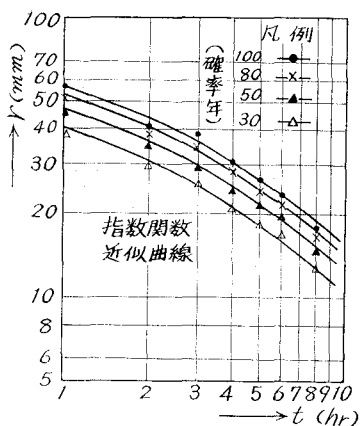
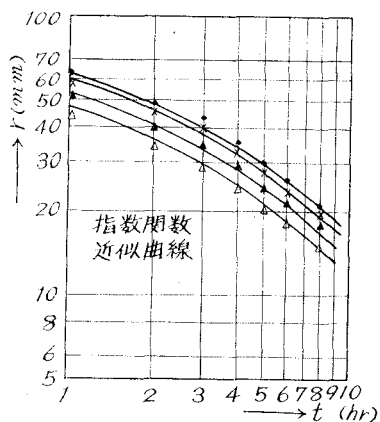


図-17 確率年，雨量強度相関図



図一18 継続時間、雨量強度相関図 (札幌)



図一19 継続時間、雨量強度相関図 (旭川)

i. 指数関数型による減少関数部の近似について

(4) 式を観察すると減少関数部分は各確率年に対する継続時間、1時間の雨量強度に任意継続時間に対する雨量強度の通減率を与えているに過ぎない。従って各継続時間毎の雨量強度と1時間のそれとの比を計算しこれらのおの平均値に指数関数を近似させた。

その型式は次の通りである。

$$r_x = r_1 \cdot e^{-x} = a \cdot T^m \cdot e^{-x} \quad (13)$$

ここに r_x は任意の降雨継続時間に対する雨量強度である。

$$\text{但し } e^{-x} = \exp\{-1\} \{a + \beta(t-1)\} \log t$$

で、 $\log t$ は其役領域を与える条件である。

(13) 式の誘導を具体的に示すと次の通りである。

$a \cdot T^m$ の誘導方法は (4) 式の場合と同様であるが e^{-x} は次の方法により計算する。但し各記号は次の如く定める。
 $r_{T,t}$ は雨量強度, suffix の最初の数字は確率年を示し, 次

表一2 減少関数に指数関数を適用する計算法

継続時間	降雨強度	$r_{T,t}/r_{T,1} = e^{-x_{T,t}}$	$x_{T,t}$	$\bar{x}_t = \frac{\sum_1^n x_{T,t}}{N}$	$\log \cdot t_i$	$\frac{\bar{x}_i}{\log t_i} = \xi_i = \{a + \beta(t-1)\}$
1	$r_{T,1}$	$e^{-x_{T,1}}$	$x_{T,1}$	$\bar{x}_1 = \frac{\sum_1^n x_{T,1}}{N}$	$\log 1$	$\xi_1 = \frac{\bar{x}_1}{\log 1}$
2	$r_{T,2}$	$e^{-x_{T,2}}$	$x_{T,2}$	$\bar{x}_2 = \frac{\sum_1^n x_{T,2}}{N}$	$\log 2$	$\xi_2 = \frac{\bar{x}_2}{\log 2}$
...	...	...	...	...	...	...
8	$r_{T,8}$	$e^{-x_{T,8}}$	$x_{T,8}$	$\bar{x}_8 = \frac{\sum_1^n x_{T,8}}{N}$	$\log 8$	$\xi_8 = \frac{\bar{x}_8}{\log 2}$

表一3 指数関数型確率雨量強度式

地名	回帰直線型	確率雨量強度式	地名	回帰直線型	確率雨量強度式
札幌市	Dog-leg	$\frac{15 \cdot T^{0.29}}{e^{(0.9 + 0.05(t-1)) \log t}}$	帯広市	Dog-leg	$\frac{19 \cdot T^{0.23}}{e^{(0.49 + 0.08(t-1)) \log t}}$
旭川市	"	$\frac{18 \cdot T^{0.27}}{e^{(0.77 + 0.07(t-1)) \log t}}$	釧路市	"	$\frac{20 \cdot T^{0.25}}{e^{1.35 \log t}}$
寿都町	単一直線	—	網走市	"	$\frac{16 \cdot T^{0.21}}{e^{(1.41 + 0.059(t-1)) \log t}}$
函館市	Dog-leg	$\frac{22 \cdot T^{0.27}}{e^{1.54 \log t}}$	稚内市	単一直線	—
室蘭市	単一直線	—	羽幌町	"	—

の数字は継続時間を示すものとする。 $\bar{x}_i$ は平均値、 N は確率年の資料数とする。表-2の順序に従って計算し $\bar{x}_i$ は算術目盛の graph に Plot し回帰直線は目視で直線近似させると等差級数で表現出来る。

この方法によって誘導した式は表-3の通りとなった。

5. 逆双曲線関数による減少関数部の近似について

この方法は結果的に指数関数近似法と大差ないが、網走市の場合について誘導を試みたので其の方法について述べる。

指数関数の場合とは逆に降雨継続時間1時間に対する減率の逆数を取り、これらのおおのの平均値と逆双曲線関数の比を計算し、それを継続時間の関数として代数関数で近似し逆双曲線関数と合成したものを減少関数として適用するものである。

その式型は次の通りとなる。

$$r = a \cdot T^m \cdot p^n / C \cdot \sinh^{-1} t \tag{14}$$

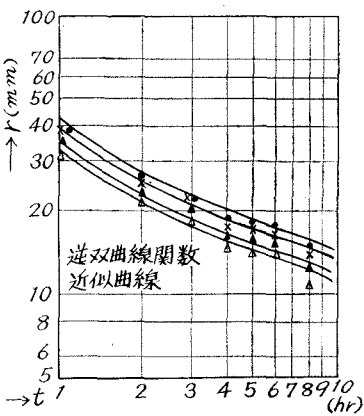


図-20 継続時間、雨量強度相関図（網走）

(14) 式の誘導を具体的に示すと 表-4 の通りとなる。各記号は指数関数適用の場合に同じである。

網走市における確率雨量強度式は次の通りとなった。

$$r = 14 \cdot T^{0.21} \cdot p^{0.08} / \sinh^{-1} t$$

表-4 減少関数に逆双曲線関数を適用する計算法

継続時間	降雨強度	$r_{T-1}/r_{T-t} = x_{T-t}$	$\bar{x}_i = \frac{\sum_1^n x_{T-t}}{N}$	$\sinh^{-1} t$	$\frac{\bar{x}_i}{\sinh^{-1} t}$	$= \xi_i = C \cdot t^{-n}$
1	r_{T-1}	$r_{T-1}/r_{T-1} = x_{T-1}$	$\bar{x}_1 = \frac{\sum_1^n x_{T-1}}{N}$	$\sinh^{-1} 1$	$\frac{\bar{x}_1}{\sinh^{-1} 1}$	$C \cdot t_1^{-n}$
2	r_{T-2}	$r_{T-1}/r_{T-2} = x_{T-2}$	$\bar{x}_2 = \frac{\sum_1^n x_{T-2}}{N}$	$\sinh^{-1} 2$	$\frac{\bar{x}_2}{\sinh^{-1} 2}$	$C \cdot t_2^{-n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
3	r_{T-8}	$r_{T-1}/r_{T-8} = x_{T-8}$	$\bar{x}_8 = \frac{\sum_1^n x_{T-8}}{N}$	$\sinh^{-1} 8$	$\frac{\bar{x}_8}{\sinh^{-1} 8}$	$C \cdot t_8^{-n}$

6. おわりに

北海道における確率雨量強度式の研究を通じて得た結論は i) Dog-leg type の回帰直線のそれでは代数関数型では適用範囲が4時間程度であること。ii) 降雨継続時間が4時間以上のものについて近似解が必要な場合は減少関数部分を指数関数か逆双曲線関数で近似させた式型がよいこと。iii) 確率年が80年以上の場合に3時間のところで10%程度の誤差を生じるので ⊕5% 程度の補正をするか、又は「北海道における大雨資料」によって計算値の検討をすること。次に Bernard-type の成立条件は iv) 雨量強度式が線型の関数型で近似可能なること、即ち log-log 紙による Correlogram において点の分布がある方向をもつ直線上に並ぶことが第1条件となる。雨量強度と確率年の関係はいずれの場合においてもほぼ直線分布となるが、雨量強度と継続時間のそれは非線型的であるので指数関数又は逆双

曲線関数等の超越関数型による近似法の研究が必要であると考える。v) 雨量強度と継続時間の関係が折曲点を1カ処程度設けることによって、折曲点以前の点の分布が p. 157 で述べた双曲線分布と仮定出来る場合は p. 157 の方法により補正定数 b を決定すればよい。

本道において中小河川の改修を実施しているものは、そのほとんどが到達時間1～5時間以内のものであるから、代数関数型の式でも十分であるが、最近では実用的数表が出版され指数関数も逆双曲線関数も計算する必要がなくなったので、超越関数型確率雨量強度式もどんどん検討されるべきであると考える。

今後より多くの資料を基にして、より精度の高い式型について検討したいと考えておりますので、諸先輩の御批判と御教導をお願いする次第です。

最後に本文の執筆に際して御指導を戴いた北海学園大学坂上先生に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 石黒政儀：日本主要都市の確率雨量強度式について．土木学会第13回年次学術講演会論文．
- 2) 土木学会編：土木学会誌，土木と気象，1966，Vol. 51.
- 3) 北海道土木部河川課編：北海道における大雨資料．
- 4) 吉野正敏：日本における雨量最大観測値・雨量一時間曲線，雨量強度一時間曲線の特性とその分布．気象集誌，Vol. 38.
- 5) 能代 清：解析接続入門，共立出版社．
- 6) 春日屋伸昌：実用数表大系，技報堂．