

十勝川流域における降雨特性

正員 江利川喜一*

I. ま え が き

最大日雨量や最大流量を確率的に推定するための統計的方法についてはすでに多くの研究が行なわれている。これらの方法では水文量が独立であることを基礎としている。すなわち個々の水文量の大きさだけに着目し、その発生順序は考慮していない。もっともこれらの異常値は独立性が強いと考えられるので個々の水文量を偶然変動によるものとみなして差支えないのであろう。一方見方をかえて異常値だけを抽出せずに一連の水文現象を時系列として取扱、その構造を明らかにできれば時系列を将来に延長し、さらに一定の生起確率に対応する水文量を推定することができる筈である。本文は十勝川流域における年降水量および月降水量を時系列的に考察し、月降水量については確率降水量の予測を試みたものである。

II. 時系列の構造

一般に時系列は 1) 傾向変動成分 (Trend) 2) 周期変動成分 (Periodic Component) および 3) 推計的成分 (Stochastic Component) によって構成されていると考えられる。ときにはこのほかに跳躍成分 (Jump) が存在することがある。

傾向変動とは一方的な方向を持続する長期変動であるが、実際に限られた長さの時系列から傾向変動を見出すのは簡単ではないし将来の予測を行なう場合にその取扱いは注意しなければならない。一見傾向変動であるかのように見える変動も長期の波動的変動の一部であるかも知れないからである。しかし観測期間内の解析においては長期の波動的変動もしばしば傾向変動として取扱われる。

周期変動は一定の周期で繰り返す波動的変動である。

推計的成分とは Stochastic Component を仮りにこう呼んだもので偶然変動成分のこともあり、また自己回帰型や移動平均型などで表わされることもある。ここに自己回帰型とは偶然変動成分を ε_t 、時系列の任意の連続する $(m+1)$ 個のエレメントを $X_{t-m}, X_{t-m+1}, \dots, X_{t-1}, X_t$ とするとき (1) 式で表わされるものである。

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \dots + a_m X_{t-m} + \varepsilon_t \quad (1)$$

(1) 式で表わされる時系列は m 次の Markov 過程に従う

時系列ともいわれ a_1, a_2 などの係数は後述する自己相関係数がわかれば決定できる¹⁾。移動平均型とは偶然変動成分からなる系列を $\dots, \varepsilon_t, \varepsilon_{t+1}, \dots, \varepsilon_{t+m-1}, \varepsilon_{t+m}, \dots$ として

$$X_t = a_1 \varepsilon_t + a_2 \varepsilon_{t+1} + \dots + a_m \varepsilon_{t+m-1},$$

$$X_{t+1} = a_1 \varepsilon_{t+1} + a_2 \varepsilon_{t+2} + \dots + a_m \varepsilon_{t+m}$$

で表わされるようなエレメントからなる時系列のことである。この場合 $a_1 = a_2 = \dots = a_m = \frac{1}{m}$ であれば時系列は単純移動平均型と呼ばれる。

跳躍成分の存在は時系列がある時期を境にして一定量だけ飛躍している場合に認められる。

いま時系列が 1)~3) の成分の和であると考えれば (2) 式のようにかける。

$$X_t = X_{t,T} + X_{t,P} + X_{t,S} \quad (2)$$

(2) 式で $X_{t,T}$ は傾向変動成分, $X_{t,P}$ は周期変動成分, $X_{t,S}$ は推計的成分を表わす。

III. 時系列の解析法

時系列の解析は時系列を定常化することからはじめるのが普通である。まず時系列に跳躍成分があるときはそれを取り除く。得られた時系列は (2) 式で表わされるが、はじめに傾向変動成分を除去して時系列を定常化する。次に定常化された時系列から周期変動成分を取り去れば時系列は推計的成分のみで構成されることになるので、この時系列がどのような数学的モデルで表現できるかを調べれば時系列全体の構造を明らかにすることができる。

1) 傾向変動成分の分離法

時系列に傾向変動成分が存在するかどうかは時系列図をみて判断する。時系列図に一方的な増加あるいは減少傾向が認められれば傾向変動成分があるといえる。傾向変動成分を分離するには傾向変動を適当な数式あるいは曲線図で近似する方法がとられる。数式による方法は多項式あるいは指数式などを仮定してその係数あるいは常数を最小自乗法を用いて決定するものである。適当な曲線図で近似する方法には移動平均値法があるが、これには単純移動平均値法と重みつき移動平均値法とがある。時系列 $\{X\}$ の連続する $(2m+1)$ 項を $X_{t-m}, X_{t-m+1}, \dots, X_t, \dots, X_{t+m-1}, X_{t+m}$ として時刻 t に対応する移動平均値を Y_t とすると

* 北海道変発局土木試験所 河川研究室副室長

$$Y_t = a_1 X_{t-m} + a_2 X_{t-m+1} + \cdots + a_m X_t \\ + \cdots + a_{2m} X_{t+m-1} + a_{2m+1} X_{t+m}$$

$$\text{ただし } \sum_{i=1}^{2m+1} a_i = 1$$

と表わされ、 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2m+1} = \frac{1}{2m+1}$ のとき Y_t は単純移動平均値である。いずれの方法によっても傾向変動曲線がきまれば時系列から傾向変動成分を除去することができる。

$$r_L = \frac{\frac{1}{N-L} \sum_{i=1}^{N-L} \left(X_i - \frac{1}{N-L} \sum_{i=1}^{N-L} X_i \right) \left(X_{i+L} - \frac{1}{N-L} \sum_{i=1}^{N-L} X_{i+L} \right)}{\left[\frac{1}{N-L} \sum_{i=1}^{N-L} \left\{ X_i - \frac{1}{N-L} \sum_{i=1}^{N-L} X_i \right\}^2 \cdot \frac{1}{N-L} \sum_{i=1}^{N-L} \left\{ X_{i+L} - \frac{1}{N-L} \sum_{i=1}^{N-L} X_{i+L} \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (4)^2$$

と表わされる。

(4) 式の分母の [] 内の第 1 項は時系列のはじめの $(N-L)$ 項の分散を、また第 2 項は終りの $(N-L)$ 項の分散を表わし分子は遅れ L の共分散を表わす。しかし (4) 式によって $L=1, 2, \dots$ に対する自己相関係数 $r_1, r_2, \dots$ を計算するのは煩雑なので

$$r_L = \frac{\frac{1}{N-L} \sum_{i=1}^{N-L} \left(X_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \right) \left(X_{i+L} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \right)}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(X_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \right)^2} \quad (5)^2$$

と書きかえた式がよく用いられる。 N が十分に大きく L があまり大きくないときは (4) 式と (5) 式とは極めて近似した値を示す。また母集団の自己相関係数 (ρ_L) の推定値としては (5) 式の方がよいといわれる。横軸に遅れ L をとり縦軸に r_L をとって表わされる図をコログラムという。いま時系列が周期変動成分と偶然変動成分 (ε_t) の和として (6) 式で表わされるとする。

$$X_t = a \sin \frac{2\pi}{P} t + \varepsilon_t \quad (6)$$

(5) 式で計算した自己相関係数は N が十分に大きいときは

$$r_L = \rho_L = \frac{a^2/2}{(a^2/2) + \text{var } \varepsilon_t} \cos \frac{2\pi}{P} \cdot L \\ = \frac{a^2}{a^2 + S_\varepsilon^2} \cos \frac{2\pi}{P} \cdot L \quad (7)^1$$

とかける。(7) 式で $\text{var } \varepsilon_t$ は偶然変動成分 ε_t の分散である。したがって時系列に周期変動が存在するときにはコログラムも同じ周期の変動をすることがわかる。実際に時系列の周期変動はただ一つの単振動で表わされるとは限らず一般にいくつかの単振動の集積型のことが多い。この場合にもコログラムは振動的で卓越する周期を見出すことは比較的容易である。周期変動が単振動の和と考えられるときには Fourier 級数による近似法が用いられる。Fourier 級数は基本周期を P とすると

$$X_{t,P} = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i \cos \frac{2\pi i}{P} t + \sum_{i=1}^n B_i \sin \frac{2\pi i}{P} t \quad (8)$$

2) 周期変動成分の分離法

周期変動成分の存在は時系列図から知ることでもできるがコログラムあるいはパワースペクトラムによる方が明確である。ここにはコログラムによる方法について述べる。 N 個のエレメントからなる時系列 $\{X_t\}$ を $X_1, X_2, \dots, X_i, X_{i+1}, \dots, X_N$ とすると遅れ (lag) L あるいは L 次の自己相関係数 r_L は

で表わされ A_0, A_i, B_i の決定は調和解析によればよい。ただ周期変動を近似するために何個の単振動を組合せればよいかは別に判断しなければならない。Anderson³⁾ は循環型時系列の 1 次自己相関係数 r_1 の分布は正規分布で近似することができ、その期待値 $E(r_1)$ および分散 $\text{var } r_1$ は次式で与えられることを示した。

$$E(r_1) = -\frac{1}{N-1} \quad (9)$$

$$\text{var } (r_1) = \frac{N-2}{(N-1)^2} \quad (10)$$

また Siddiqui³⁾ は正規分布に従う独立変数からなる母集団から抽出した N 個のエレメントからなる時系列について計算した r_1 の期待値および分散の期待値を次式で与え r_1 の分布は近似的に正規分布であることを示した。

$$E(r_1) = -\frac{1}{N} \quad (11)$$

$$E(r_1^2) = \frac{N^3 - 2N^2 + 3}{N^2(N^2 - 1)} \quad (12)$$

(9) と (11) 式および (10) と (12) 式は N が十分に大きくなると近似した値を示す。このことから正規分布に従う独立変数からなる母集団の 1 次自己相関係数は $\rho_1 = 0$ であることがわかる。いま (9) (10) 式を用いて一定の信頼水準 (α) に対する信頼限界 $r_1(\alpha)$ を求めると

$$r_1(\alpha) = \frac{-1 \pm n_\alpha \sqrt{N-2}}{N-1} \quad (12)$$

となる。ここに n_α は正規分布の平均値からの偏位で α に対応してそれぞれ

$$\alpha = 90\% \text{ のとき } n_\alpha = 1,645$$

$$\alpha = 95\% \text{ のとき } n_\alpha = 1,960$$

$$\alpha = 99\% \text{ のとき } n_\alpha = 2,326$$

である。水文統計における有意性の検定には $\alpha = 95\%$ がよく用いられ、この信頼水準のとき (13) 式は

$$r_1(95\%) = \frac{-1 \pm 1.96 \sqrt{N-2}}{N-1} \quad (14)$$

となる。 L 次自己相関係数の有意性の検定も (14) 式に準じて (15) 式で行なわれる⁴⁾。

$$r_L(95\%) = \frac{-1 \pm 1.96\sqrt{N-L-2}}{N-L-1} \quad (15)^*$$

この検定法を利用して時系列の周期変動を表わすのに必要な Fourier 級数の項数を決定することができる。いま周期変動成分と推計的成分からなる時系列についてコレログラムを書き有意な r_L の存在が確かめられると同時に卓越する周期を見出せたとすると、一般にこれが基本周期で (8) 式の P となり調和解析によって Fourier 級数を決定することができる。そこで

$$X_t - \left\{ A_0 + A_1 \cos \frac{2\pi}{P}t + B_1 \sin \frac{2\pi}{P}t \right\}$$

で表わされるような新しい時系列についてコレログラムを書き r_L の有意性を検定する。もしも有意な r_L が存在しそれが周期的であればさらに

$$X_t - \left\{ A_0 + \sum_{i=1}^2 A_i \cos \frac{2\pi i}{P}t + \sum_{i=1}^2 B_i \sin \frac{2\pi i}{P}t \right\}$$

で表わされる時系列について同様の検定を繰り返す。このようにして一定の信頼水準に対して周期的に変動する有意な自己相関係数がなくなるまで Fourier 級数の項数を増してゆけばよい。最終的に n 項までとった Fourier 級数で近似できたとすると、その結果得られる時系列

$$\left\{ X_t - \left(A_0 + \sum_{i=1}^n A_i \cos \frac{2\pi i}{P}t + \sum_{i=1}^n B_i \sin \frac{2\pi i}{P}t \right) \right\}$$

は推計的成分のみからなると考えられる。

3) 推計的成分の近似法

2) で得られた時系列

$$\left\{ X_t - \left(A_0 + \sum_{i=1}^n A_i \cos \frac{2\pi i}{P}t + \sum_{i=1}^n B_i \sin \frac{2\pi i}{P}t \right) \right\}$$

のコレログラムのすべての r_L が有意でないならば、その

時系列は偶然変動成分からなると考えられる。すなわち時系列の各エレメントは独立でその発生順序には無関係に頻度分布の特性を調べて適当な確率分布型で近似することができる。またコレログラムが $L=0$ で $r_0=1$ から直線的に減少しているときは推計的成分は偶然変動成分の単純移動平均型である。したがってその数学的モデルは

$$X_t = \frac{1}{m} (\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1} + \cdots + \varepsilon_{t+m-1})$$

と書ける。ここに項数 m はコレログラムが $r_L=0$ となるときの遅れ L に等しく $m=L$ とすればよい。一方コレログラムが指数型の減少曲線に従うとき、すなわち $r_L=r_1^L$ の関係があるとき 1 次の自己回帰型 (1 次 Markov・モデル) で近似できる。1 次 Markov・モデルは $X_t = r_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$ と表わされる。このほかの数学的モデルで近似する場合にもコレログラムの形をみて判断するしかない。

IV. 十勝川流域における解析例

1) 年降水量の場合

十勝川流域の雨量観測所のうち比較的長期間の連続した観測記録があるのは 18 カ所である。これらの観測所のうち記録期間の長い帯広、大正、茂岩を選んで 20 次までの自己相関係数を (5) 式で計算した。1 例として帯広における年降水量を図-1 に、コレログラムを図-2 に示した。図-1 では傾向変動あるいは長期振動の存在は明確でない。図-2 には (15) 式で計算した 95% の信頼限界曲線を記入した。これによると年降水量の独立性はかなり強いと考えられる。しかし r_{12} , r_{16} , r_{19} などのはるかに限界値をこえており、これは (4) 式のかわりに (5) 式で r_L を計算したこと起因するとも考えられるまた長期振動の影響によるとも考えられる。この点は改めて検討しなければならない。ここでは十勝川流域内外の 21 観測所の年降水量について頻度分布の特性値を計算してその地域分布を調べてみる。特

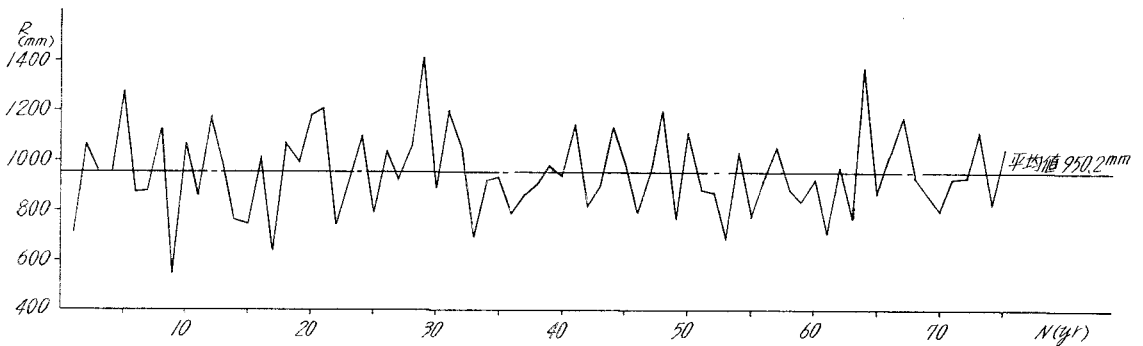
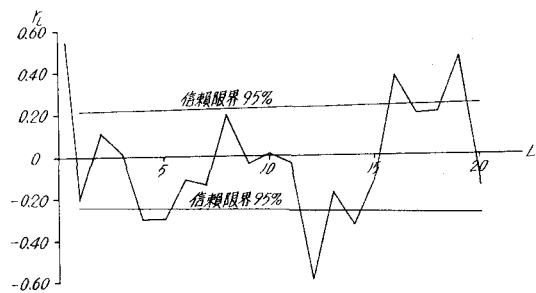


図-1 年降水量時系列図 (帯広)

* (15) 式は $L=1$ のとき式 (14) に一致すべきであると考えられるので $r_L = \frac{-1 \pm 1.96\sqrt{N-L-1}}{N-L}$ とした方がよいと思われる。

(15) 式は参考文献 (4) のものをそのまま転載したが $N-L$ が大きいときは計算値に差は現われない。



図—2 年降水量のコレログラム (帯広)

性値とは平均値、標備偏差係数、歪み係数および尖度係数である。

平均値 ($\bar{R}$): N 個の観測値から計算される母集団平均の推定値は

$$\bar{R} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i \quad (16)$$

である。(16) 式で計算した平均年降水量の地域分布を図-3に示した。図からは利別川流域の年降水量が比較的少ない反面十勝川本川および札内川の上流部で多くなる傾向がみられる。

標準偏差係数 (C_{st})¹⁾: 平均値のまわりの分散の程度を示す特性値には数種類あるが、ここでは平均値に対する相対的な分散の程度を示す標準偏差係数を用いる。観測値から計算される母集団標準偏差の不偏推定値は

$$s = \left[\frac{N}{N-1} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i^2 - \bar{R}^2 \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (17)^{5)}$$

で与えられ $C_{st} = \frac{s}{\bar{R}}$ を標準偏差係数という。標準偏差係数の地域分布を図-4に示した。年平均降水量と標準偏差係数の分布の間に特別な関連はないようである。

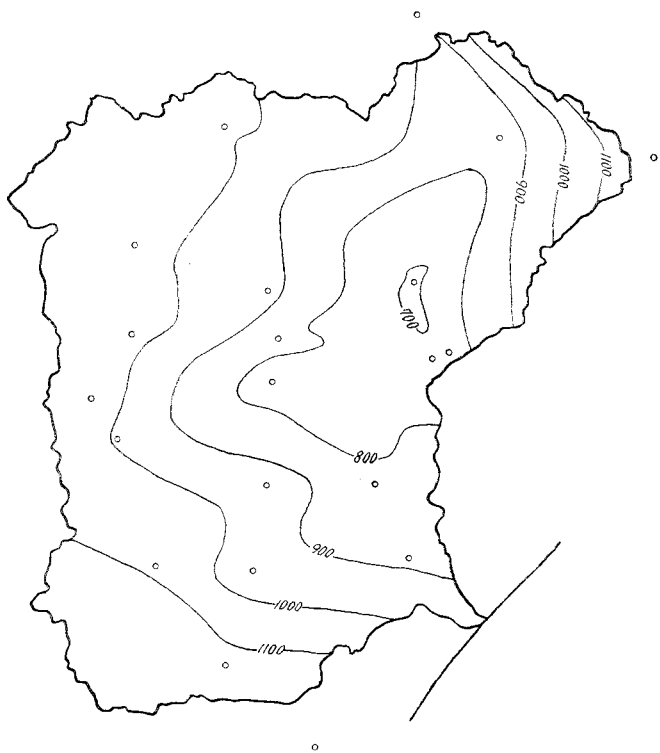
歪み係数 (C_s): 観測値から計算される母集団の歪み係数の不偏推定値は次式で表わされる。

$$C_s = \frac{1}{s^3} \frac{N}{(N-1)(N-2)} \sum_{i=1}^N (R_i - \bar{R})^3 \quad (18)^{5)}$$

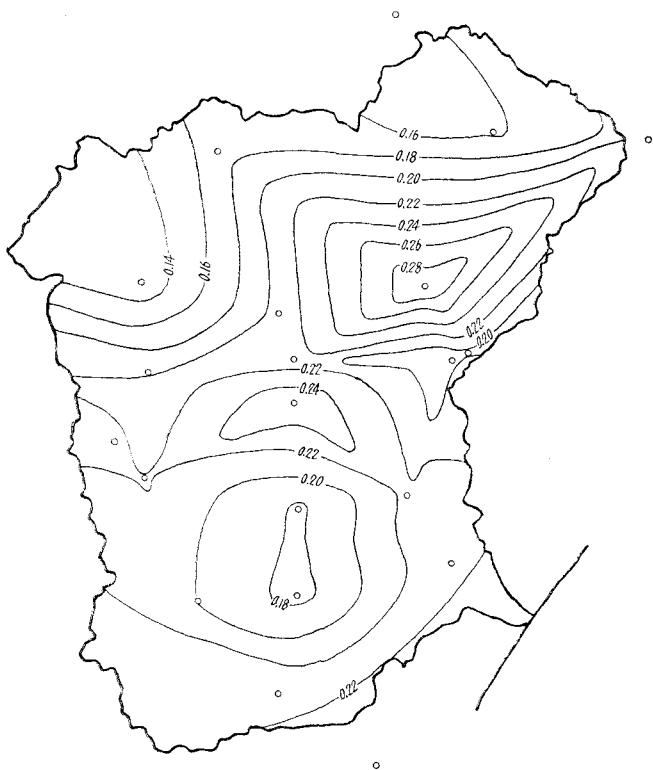
歪み係数は頻度分布の非対称性を表わす無次元数で対称分布ならば $C_s = 0$ 、また $C_s > 0$ ならば正の非対称分布、 $C_s < 0$ ならば負の非対称分布といい C_s の絶対値が大きくなる程非対称性は著しい。歪み係数の地域分布を図-5に示した。図から十勝川本川上流部および札内川下流部で非対称性が強いことがわかる。

尖度係数 (C_k): 尖度係数は頻度分布の尖りの程度を示す無次元数で

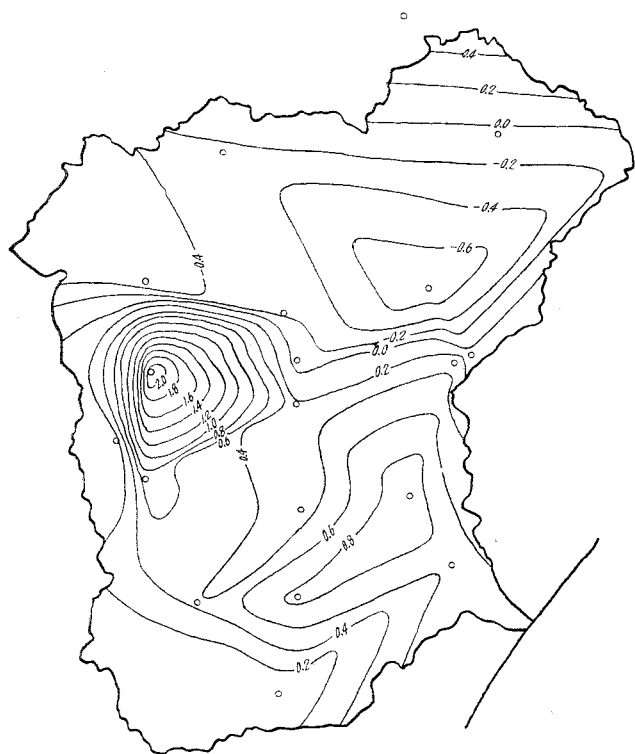
$$C_k = \frac{1}{s^4} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (R_i - \bar{R})^4 \right\} \quad (19)$$



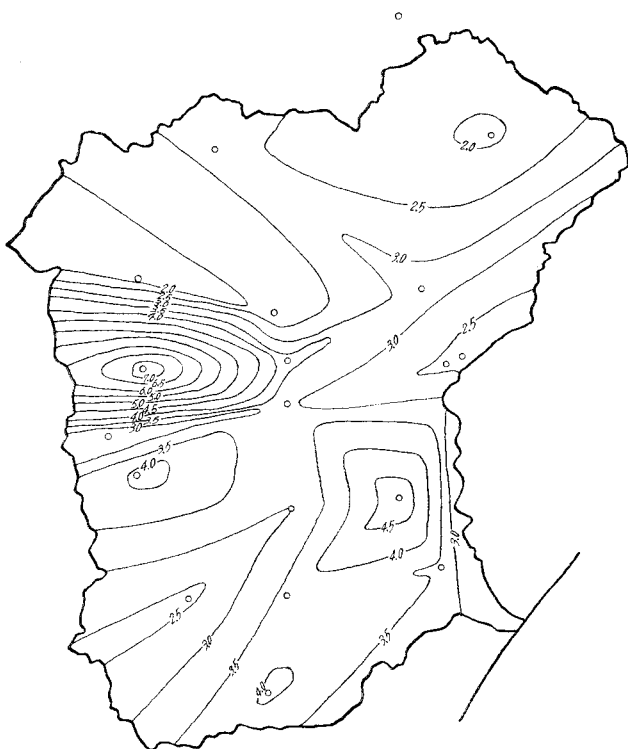
図—3 平均年降水量の地域分布図 (単位 mm)



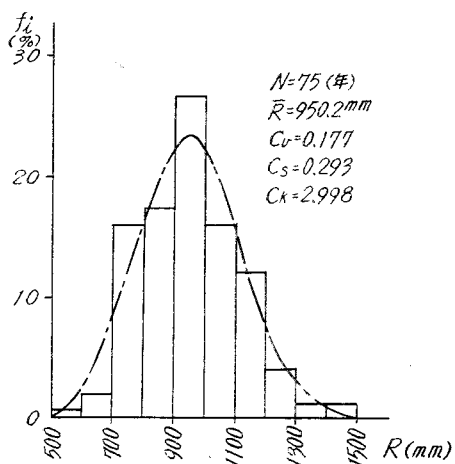
図—4 標準偏差係数の地域分布図 (年降水量)



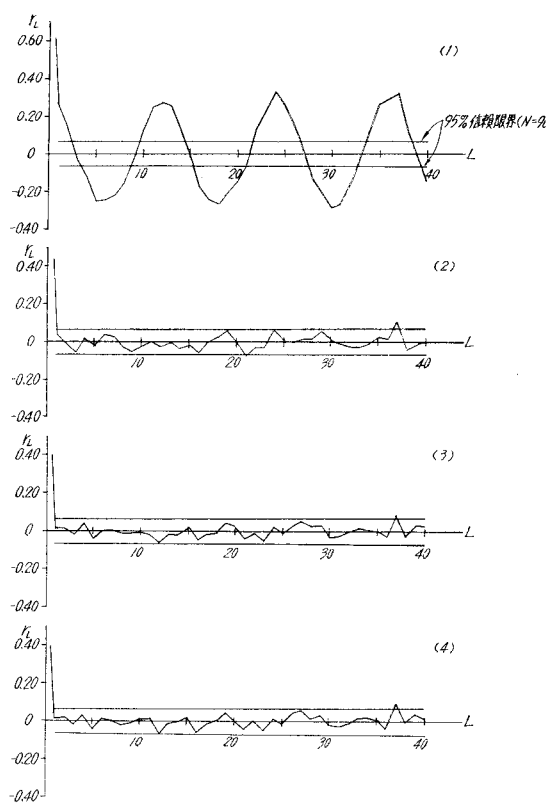
図—5 歪み係数の地域分布図 (年降水量)



図—6 尖度係数の地域分布図 (年降水量)



図—7 年降水量頻度分布図 (帯広)



図—8 月降水量のコレログラム (帯広)

と表わされる。正規分布の尖度係数は $C_k=3$ であり $C_k>3$ ならば正規分布より尖った分布を表わし、 $C_k<3$ ならば正規分布より偏平な分布を表わす。 C_k の地域分布を図-6に示した。図-5, 6 を比較すると C_s の大きい十勝川本川上流部および札内川中下流部で C_k も大きい値を示している。

帯広における年降水量の相対頻度分布を1例として図-7に示す。図中に正規分布曲線を記入してあるが帯広の場合正規分布による近似がよく適合する。 χ^2 検定で適合度を調べると¹⁾

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^6 \frac{(e_i - o_i)^2}{e_i} = 1.68 < \chi^2_{0.99} = 9.49 \quad (\text{自由度 } 4)$$

となり適合度はかなり良好である。ここに e_i, o_i はそれぞれ頻度分布の期待値および観測値を表わす。

2) 月降水量の場合

月降水量時系列の解析は帯広および茂岩の資料を用いて行なった。帯広の場合資料数は $N=900$ 、茂岩では $N=720$ である。ここには帯広における結果のみを示す。解析方法は前節に述べたとおりであるが月降水量時系列には明確な傾向変動が認められなかったため、その構造は周期変動成分と推計的成分の和とみなした。図-8に4個のコレログラムを示したが(1)は原時系列に対するもので周期変動が認められ基本周期は12カ月と考えられる。図-8のコレログラム(2)は基本周期の変動成分を除いた時系列に対するものであり、(3)(4)はそれぞれ6カ月周期までおよび4カ月周期までの変動成分を除去して得られる時系列のコレログラムである。図-8には(15)式で計算した95%の信頼限界曲線も示してあるが、4カ月までの周期変動成分を除去して得られる時系列は偶然変動成分のみからなると考えられる。したがって月降水量時系列は

$$R_t = \bar{R}_0 + \sum_{i=1}^3 A_i \cos \frac{2\pi i}{12} t + \sum_{i=1}^3 B_i \sin \frac{2\pi i}{12} t + \varepsilon_t \tag{20}$$

で近似できる。(20)式の $\bar{R}_0, A_i, B_i$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} \bar{R}_0 &= 79.2 & A_1 &= -23.7 & B_1 &= -36.0 \\ A_2 &= -13.7 & B_2 &= -0.1 \\ A_3 &= 2.5 & B_3 &= 7.1 \end{aligned} \quad (\text{単位: mm})$$

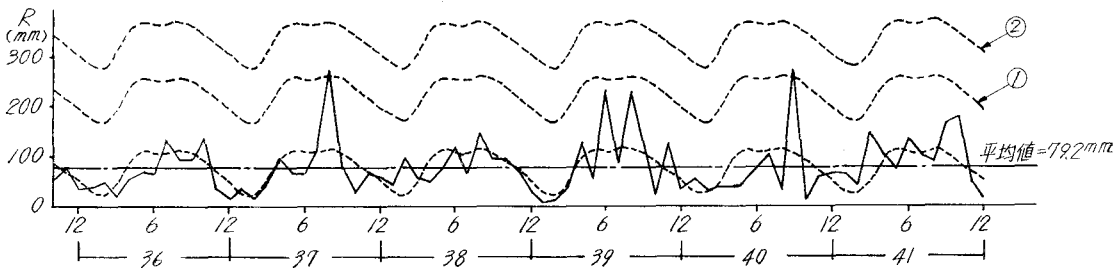


図-9 月降水量時系列図(帯広)

である。一方 ε_t の頻度分布の特性値は

$$\begin{aligned} \text{平均値: } \bar{\varepsilon}_t &= 0 & \text{標準偏差: } s_{\varepsilon} &= 46.9 \text{ mm} \\ \text{歪み係数: } C_{s\varepsilon} &= 1.02 & \text{尖度係数: } C_{k\varepsilon} &= 5.00 \end{aligned}$$

である。

いま ε_t の分布を1常数の Γ 分布で近似して確率 $\frac{1}{100}$ および $\frac{1}{1200}$ に対する限界値を求めてみよう。

まず ε_t の分布を Γ 分布で近似するため次の変換を行なう。

$$z = \frac{\sqrt{\alpha}}{s_{\varepsilon}} \varepsilon_t + \alpha \tag{21}$$

z の頻度分布の特性値は

$$\bar{z} = \alpha, \quad s_z = \sqrt{\alpha}, \quad C_{sz} = 1.02, \quad C_{kz} = 5.00$$

となる。この z が $f(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{\Gamma(\alpha)}$ で表わされる Γ 分布で近似できると仮定する。 Γ 分布の特性値は、平均値 $= \alpha$ 、標準偏差 $= \sqrt{\alpha}$ 、歪み係数 $= \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$ 、尖度係数 $= \frac{3(\alpha+2)}{\alpha}$ であるから $\alpha=3$ にとると変数 z は x にかかなり近似した分布を示す。

確率 $\frac{1}{100}$ のとき：これはほぼ8年に一度の割合いで起る月降水量の限界値に相当する。 Γ 分布の図あるいは表を利用すれば $z(0.99)=5.40$ が得られ(21)式から $\varepsilon_t(0.99)=146.2$ mm が求まる。したがって(20)式から $R(0.99)$ を計算することができる。図-9に昭和36年から41年までの月降水量を実線で、また確率 $\frac{1}{100}$ に対する限界値 $R(0.99)$ を破線①で示した。75年間の資料900個のうちこの限界を越えるのは15例で5年に一度の割合いで起っており期待した頻度より多い。

確率 $\frac{1}{1200}$ のとき：100年に一度の割合いで起る月降水量の限界値は前項と同様にして $\varepsilon_t(0.99917)=256.4$ mm となる。(20)式から計算した確率 $\frac{1}{1200}$ に対する限界値を図-9に破線②で示したが、この限界値を越える例は起っていない。

この解析には「十勝川計画高水流量の検討・付属資料」⁶⁾ および気象台の資料を使用した。

V. む す び

時系列の構造は複雑でその成分を適切に評価することは容易ではない。しかし時系列の構造が明らかにされない限りそれを将来に延長し将来起り得る現象を予測することは困難である。本文はコログラムを用いて時系列の構造を検討し、月降水量については一定の確率に対する限界値の予測を試みたものである。年降水量の場合頻度分布特性値の地域分布は山地部でやや不正確である。これは観測所の不足によるもので近年設置された観測所の資料が使用できるようになれば精度は向上する。月降水量の確率的推定は偶然変動成分の分布を Γ 分布で近似したが、ほぼ期待したような結果が得られたと考える。ただ確率 $\frac{1}{100}$ に対する限界値を越える事例が予想以上に多い。これが偶然変動成分の分布型を Γ 分布で近似したことによるのかあるいはこ

の解析で考慮していない長期の波動的変動の影響によるものであるのか今後さらに検討するつもりである。

参 考 文 献

- 1) 岸根卓郎：理論応用・統計学.
- 2) M. G. Kendal & A. Stuart: The advanced theory of statistics Vol. 3.
- 3) V. Yevjevich: Fluctuation of wet and dry years, Part II: Hydrology Papers, C.S.U.
- 4) L. A. Roesner & V. Yevjevich: Mathematical models for time series of monthly precipitation and monthly runoff: Hydrology Papers, C.S.U.
- 5) Ven T. Chow: Handbook of applied hydrology.
- 6) 北海道開発局帯広開発建設部：十勝川水系降雨量観測資料.