

鋼管桁橋の設計理論と基礎模型実験について

正員 中村作太郎

1. 緒 論

鋼管は構造用鋼材の中で同一圧縮力に要する材料が最も少なく、同時に振りとすべての方向の曲げに対しても特別な形鋼を除いて、他の構造用形鋼よりはるかに大きい抵抗力をもっている。さらにまた、局部座屈に対しても、鋼管は圧延形鋼にくらべてはるかに強いから、かなり肉厚を薄くすることが出来る。このように、鋼管¹⁾は他の構造用形鋼にくらべ力学的経済性に富んでいるから、鉄骨構造特に、橋梁に用いられればきわめて有利であることがかなり以前より知られていた。すなわち、最初に鉄管が大規模に橋梁に用いられたのは、1850年代に英国で建設された Royal Albert 橋であり、支間 140 m の鉄道橋の圧縮上弦材に練鉄製の円管断面が使用されたことはきわめて著名である。その後、英国の Forth 橋 (1880 年)、米国の St. Louis 橋 (1874 年)、Stockholm の Mälarsee の道路橋 (1934 年) などに鋼管が用いられ、アーク溶接の進歩、パイプ自動切断機の出現によって鋼管が盛んに使用されるようになって来た。

しかし鋼管をそのまま桁橋して用いることはかなり以前より提唱されているが、応力解析や設計上の問題点において不明の点がありそれほどの進歩を見なかった。鋼管自体を桁とする Self-Support System は水路橋として種々試みられている。その主たる目的は水力発電所のベストックとかその他の Water Supplying Steel Pipe であり、管径の 3~5 倍程度の比較的短径間で支持されたものである。長径間の支持を必要とする時は、特に普通の橋梁を架設してこれに pipe を支持させる構造が採用されて来た。

鋼管桁構造が初めて用いられたのは 1921 年、スエーデンの Kugforo 発電所であったが、この時は理論解析が行なわれなかったのでスエーデン以外の国で採用する所はなかった。我が国では 1939 年国鉄千手発電所と東京電力信濃川発電所のベストックに初めて採用された。

最近漸く鋼管桁橋が登場²⁾するようになって来たが、これらの設計理論と構造形式はこれからの研究課題であると思う。著者は先に鋼管桁橋の設計試案³⁾について研究を試みたが、その後その設計理論と基礎模型実験について吟味検討を行なったので、今回はそれについて論述することとする。

2. 設計理論

2.1 鋼管桁橋の構造形式

鋼管桁橋の側面構造形式としては、単純桁とするか連続桁にするかの二通りの場合が考えられる。また横断面の構造形式としては、1-管型、2-管型、3-管型などが考えられるがそれは有効幅員によって決定されるものである。それから鋼管桁と床組の取付構造形式としては、鋼床板管桁橋とするか鉄筋コンクリート床版を用いた合成管桁橋または非合成管桁橋とすかに分類出来る。

なお鋼管桁橋の設計をするに当っては、上述の構造形式を組合せる事により、各種の鋼管桁橋が出来上るわけである。しかし鋼管桁の特徴を生かし、今後益々進歩発展すると思われるのは、溶接技術の進歩と相俟って鋼床板管桁橋であると思う。特に 1-管型、2-管型の構造形式が有利になる場合が多いと推定される。

2.2 鋼床板管桁橋の設計理論概要

もっとも有利と考えられる鋼床板管桁橋を主体として、その設計理論概要について述べる。

1. 鋼床板の応力計算理論

鋼床板の応力計算⁴⁾は鋼床板箱桁橋と全く同じ方法によって行なうことが出来る。すなわち、直交異方性平板理論に解法か格子理論による解法を用いればよい。直交異方性平板理論としては、M. T. Huber 氏によって提唱されている偏微分方程式に立脚し、また、W. Cornelius 氏はこの理論を実際的に応用するため、種々有益な研究をし、諸定数について便利な表を与えているのでこれを用いればよい。K. Girkmann 氏も計算し易しい式を与えているのでこれを用いてもよい。

格子理論による解法としては、H. Homberg 氏の棒力学を用いた厳密計算法を用いることになるが、種々数表が与えられているのでこれを使用すれば便利である。

2. 鋼管主桁の設計理論

主桁の曲げモーメントによる最大線応力度を求めるのに、普通の断面係数法による略算法は別として、Cylindrical shell の曲げ理論解析を用いる方法と Long pipe beam としての簡易公式を用いる方法があげられる。Cylindrical shell については W. Flügge, W. S. Wlassow, S. Timo-

* 室蘭工業大学教授

shenko の諸氏による名著書において論じられているが、A. I. C. (米国)、J. E. Gibson 氏などの実用的数表は設計計算に役立っているし、H. Lundgren, K. W. Johausen の両氏による設計理論の研究も見逃すことが出来ない。

また主桁のせん断力による最大せん断応力度は、 $\tau_{\max} = S/\pi(r^2 - r'^2)$ (S : せん断力, r : 管の外径, r' : 管の内径) によって計算出来るし、支点部における活荷重による振りモーメントに対するせん断応力度の吟味には、Saint Venant 氏の円管に対する解式 $\tau_{\theta} = M_t/2\pi r^2 t$ (M_t : 振りモーメント, r : 円の中心より肉厚中心までの距離, t : 肉厚, τ_{θ} : せん断応力度) によって計算すればよい。また支点部における活荷重による振りモーメントに対する溶接部のせん断応力度の吟味には、 $T = M_t/r$ (M_t : 活荷重による振りモーメント, r : 円の中心より肉厚中心までの距離, T : 円管に作用する接線方向の引張力) なる式を用いて計算すればよいし、溶接部分に生ずるせん断応力度の計算には、 $\tau = T/aS = M_t/ar \cdot S$ (S : 円管と取付枠との溶接延長, a : 溶接のノド厚) を用いればよい。

それから鋼管主桁の曲げ座屈理論については種々研究されているが、L. G. Brazier 氏による円筒の曲げ座屈理論のほか、L. H. Donnell 氏の実験公式、R. W. Mossman-R. G. Robinon, W. Flügge, E. E. Lundquist などの諸氏による研究成果があるので、これらの公式を用いて計算すればよい。特に薄肉長径間の Pipe beam ではその曲げ座屈の問題は忽せに出来ないと思うので今後の研究課題とすべきであろう。

しかし、余ほどの長径間の Pipe beam でない限り、種々の理論や実験公式によると、中心圧縮荷重の座屈値に比べ、曲げ座屈の値はその 30~50% に過ぎないから設計上そう心配なことはないものと考えてる。

3. 支点部取付枠の安定計算³⁾

地震による水平力、風荷重による水平力、活荷重が片側にだけ乗った時の偏心荷重などを計算し、取付枠底部の一端 (偏心荷重のある側) を支点として転倒モーメントを計算し、抵抗モーメントと比較吟味すればよい。

4. その他設計上力学的吟味検討を要する問題点

i) 鋼管主桁の支点部における圧座に対する力学的吟味

鋼管主桁の支点部においては、死・活荷重による上載荷重とそれによって生ずる反力とにより、円管が上・下より圧縮され、断面変形をともしつつ圧座の現象を呈する。これは後で挙げる模型実験によっても実証される所であり、これに対する理論計算が当然必要なもの考える。その計算理論については後述する。

ii) 取付枠の詳細設計計算とその間隔に対する力学的吟味

支点部と中間部の取付枠についてはそれぞれの詳細に渡り応力計算を必要とし、また中間取付枠の間隔を薄肉円筒

の圧縮座屈などの理論を基として計算し、種々力学的に吟味検討して見る必要がある。

2.3 円管桁の曲げ理論

1. 円筒殻の曲げ理論解析^{5)~9)}

円筒殻の曲げ理論を取扱う場合には、最初膜応力状態を対象としたものから出発するのが常である。この場合には任意の外力が面内応力のみによって支えられ、縁周辺に沿って膜応力状態が規制する応力及びひずみを生ずるよう、殻周辺を支えねばならない。逆にいうと任意の支持条件に対しては膜応力状態は一般に完全には成立せず、少なくともその縁周辺には応力の乱れを生ずるのが常である。それで任意の境界条件を満足させるためには、面内応力 (膜応力) の他に面に垂直なせん断力及び曲げモーメントを加えて釣合いの状態を考え、膜応力の修正を行わなければならない。

i) 力の釣合い方程式

図-1 を参照し、X, Y, Z なる荷重を受ける円筒殻について膜応力に曲げ応力を含めた力の釣合式をたてる。

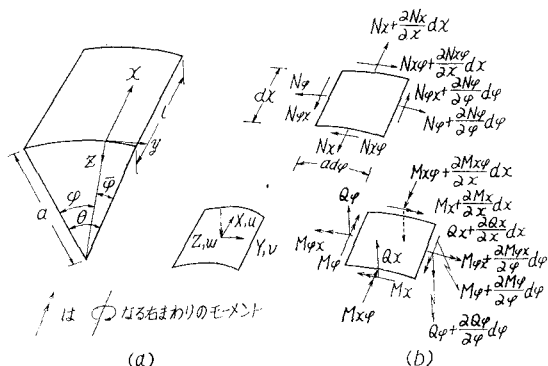


図-1 円筒殻の力の釣合い

図-1(b) には、円筒面から切り取った微小要素に作用する 3 成分の荷重 X, Y, Z と 10 個の応力 $N_x, N_y, N_{x\phi}, N_{y\phi}, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_{x\phi}, M_{y\phi}$ が示されている。

いま、 x, y, z : 流動座標とし、 X, Y, Z : x, y, z 方向の外力、 N_x, N_y : 直応力、 $N_{x\phi}, N_{y\phi}$: 面内せん断応力、 Q_x, Q_y : 面に直角なせん断力、 M_x, M_y : 曲げモーメント、 $M_{x\phi}, M_{y\phi}$: 振りモーメント、 a : 中央面の半径とすれば、図-1(a) に示す x, ϕ 座標により次式を得る。力の釣合式の誘導においては、すべて (1) の記号を用いる。

$$\frac{\partial}{\partial x} = a \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (1)$$

$$N_x' + N_{x\phi}' + Xa = 0, \quad N_y' + N_{y\phi}' - Q_\phi + Ya = 0, \\ Q_\phi' + Q_\phi + N_\phi + Za = 0 \quad (2)$$

$$M_\phi' + M_{\phi\phi}' - aQ_\phi = 0, \quad M_x' + M_{x\phi}' - aQ_x = 0, \\ aN_{x\phi} - aN_{\phi x} + M_{\phi x} = 0 \quad (3)$$

$$Q_\phi = \frac{1}{a} (M_\phi' + M_{\phi\phi}'), \quad Q_x = \frac{1}{a} (M_x' + M_{x\phi}') \quad (4)$$

ii) 応力, ひずみ, 変位に関する式

いま, $\sigma_x, \sigma_y (\sigma_\varphi)$: 面内垂直応力度, $\tau_{xy} (\tau_{x\varphi}), \tau_{yx} (\tau_{\varphi x})$:

切線応力度とし, $\int_{-t/2}^{+t/2}$, t : 殻厚とすれば

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= \int \sigma_\varphi dz, & N_x &= \int \sigma_x \left(1 - \frac{z}{a}\right) dz; \\ N_{\varphi x} &= \int \tau_{\varphi x} dz, & N_{x\varphi} &= \int \tau_{x\varphi} \left(1 - \frac{z}{a}\right) dz \\ M_\varphi &= \int \sigma_\varphi z dz, & M_x &= \int \sigma_x \left(1 - \frac{z}{a}\right) z dz; \\ M_{\varphi x} &= \int \tau_{\varphi x} z dz, & M_{x\varphi} &= \int \tau_{x\varphi} \left(1 - \frac{z}{a}\right) z dz \end{aligned} \right\} (5)$$

次に E : 弾性係数, ν : ポアソン比, $\varepsilon_\varphi, \varepsilon_x$: 面内ひずみ,

$\gamma_{x\varphi}$: せん断ひずみとすれば

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_x), & \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\varphi), \\ \tau_{x\varphi} &= \tau_{\varphi x} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{x\varphi} \end{aligned} \quad (6)$$

また u_z, v_z, w_z : この面上の変位, u, v, w : 中央面上 とすれば

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= \frac{B}{a} (v' - w + \nu u') - \frac{D}{a^3} (w + w'') = \frac{B}{a} \{v' - w + \nu u' - k(w + w'')\} \\ N_x &= \frac{B}{a} \{u' - \nu(w - v')\} + \frac{D}{a^3} w'' = \frac{B}{a} \{u' - \nu(w - v') + k w''\} \\ N_{\varphi x} &= \frac{B}{a} \frac{1-\nu}{2} (u' + v') + \frac{D}{a^3} \frac{1-\nu}{2} (v' - w'') = \frac{B}{a} \frac{1-\nu}{2} \{u' + v' + k(u' - w'')\} \\ N_{x\varphi} &= \frac{B}{a} \frac{1-\nu}{2} (u' + v') + \frac{D}{a^3} \frac{1-\nu}{2} (v' + w'') = \frac{B}{a} \frac{1-\nu}{2} \{u' + v' + k(v' + w'')\} \\ M_\varphi &= -\frac{D}{a^2} (w + w'' + \nu w'''), & M_x &= -\frac{D}{a^2} \{u' + w'' + \nu(v' + w'')\} \\ M_{\varphi x} &= -\frac{D}{a^2} (1-\nu) \left(w'' - \frac{u'}{2} + \frac{v'}{2}\right), & M_{x\varphi} &= -\frac{D}{a^2} (1-\nu) (w'' + v') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

また中央面で6個のひずみを次の通り表わすことが出来る。

$$\left. \begin{aligned} x \text{ 方向ひずみ } \varepsilon_x &= \frac{u'}{a}, & y \text{ 方向ひずみ } \varepsilon_\varphi &= \frac{v' - w}{a} \\ \text{せん断ひずみ } \gamma_{x\varphi} &= \frac{u' + v'}{a}, & \text{ねじり率 } \kappa_{x\varphi} &= \frac{w''}{a^2} \\ x \text{ 方向率変化 } \kappa_x &= \frac{w''}{a^2}, & y \text{ 方向曲率変化 } \kappa_\varphi &= \frac{w + w''}{a^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

また ω : 殻の法線のまわりの回転とすれば

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{u'}{a} - \frac{v'}{a} \right) \dots\dots\dots (11)$$

N, M と $\varepsilon, \gamma, \kappa, \omega$ との関係は次の通りになる。

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= B(\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_x) - \frac{D}{a} \kappa_\varphi, & N_x &= B(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\varphi) + \frac{D}{a} \kappa_x \\ N_{\varphi x} &= B \frac{1-\nu}{2} \gamma_{x\varphi} - \frac{D}{a} \frac{1-\nu}{2} \left(\kappa_{x\varphi} - \frac{\gamma_{x\varphi}}{2a} + \frac{\omega}{a} \right) \\ N_{x\varphi} &= B \frac{1-\nu}{2} \gamma_{x\varphi} + \frac{D}{a} \frac{1-\nu}{2} \left(\kappa_{x\varphi} + \frac{\gamma_{x\varphi}}{2a} + \frac{\omega}{a} \right) \\ M_\varphi &= -D(\kappa_\varphi + \nu \kappa_x), & M_x &= -D \left(\kappa_x + \nu \kappa_\varphi + \frac{\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\varphi}{a} \right) \\ M_{\varphi x} &= -D(1-\nu) \left(\kappa_{x\varphi} + \frac{\omega}{a} \right), & M_{x\varphi} &= -D(1-\nu) \left(\kappa_{x\varphi} + \frac{\gamma_{x\varphi}}{2a} + \frac{\omega}{a} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

の変位, 記号' と '' には (1) 式を適用すれば

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{v'_z}{a}, \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{a-z} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - w_z \right) = \frac{1}{a-z} (v'_z - w_z) \\ \gamma_{x\varphi} &= \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{1}{a-z} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} = \frac{v'_z}{a} + \frac{u'_z}{a-z} \end{aligned} \right\} \dots\dots (7)$$

ここで変位 u_z, v_z, w_z と中央面上の変位 u, v, w との間に, 平板同様, 曲げについての適合条件式すなわち法線保持の仮定を適用する。

$$u_z = u - \frac{z}{a} w', \quad v_z = \left(1 - \frac{z}{a}\right) v' - \frac{z}{a} w', \quad w_z = w \dots\dots\dots (8)$$

(8) を (7) に代入し, ひずみを u, v, w で表わし, (6), (9) 式を用い,

$$B = \frac{Et}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}, \quad k = \frac{D}{Ba^2} = \frac{t^2}{12a^2}$$

iii) 変位 u, v, w で表わした力の釣合式とその解析

円筒殻の力の釣合式(2)は(4)を用いて次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} N_x'' + N_{\varphi x}'' + aX &= 0, & aN_{\varphi} + aN_{x\varphi}'' - M_{\varphi}'' - M_{x\varphi}'' + a^2Y &= 0 \\ aN_{\varphi} + M_z'' + M_{x\varphi}'' + M_x'' + M_{\varphi x}'' + a^2Z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

いま、 $k = \frac{D}{Ba^2} = \frac{E^2}{12a^2}$ とおき(9)式を(12)式に代入すると次のような変位 u, v, w についての連立偏微分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} u'' + \frac{1-\nu}{2} u'' + \frac{1+\nu}{2} v'' - \nu w'' + k \left\{ \frac{1-\nu}{2} u'' + w'' - \frac{1-\nu}{2} w'' \right\} + \frac{a^2}{B} X &= 0 \\ \frac{1+\nu}{2} u'' + v'' + \frac{1-\nu}{2} v'' - w'' + k \left\{ \frac{3(1-\nu)}{2} v'' + \frac{3-\nu}{2} w'' \right\} + \frac{a^2}{B} Y &= 0 \\ \nu u'' + v'' - w'' + k \left\{ \frac{1-\nu}{2} u'' - u'' - \frac{3-\nu}{2} v'' - w'' - 2w'' - w'' - 2w'' - w'' \right\} + \frac{a^2}{B} Z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

次に u, v, w を長手方向にフーリエ級数に展開して変位を(15)の形に表わす。

$$u = \sum u_n \cos \lambda \xi, \quad v = \sum v_n \sin \lambda \xi, \quad w = \sum w_n \sin \lambda \xi \dots\dots\dots (15)$$

ここに $\xi = x/a$, $\lambda = n\pi a/l$, l : 円筒の長さ, u_n, v_n, w_n : φ のみの函数である。

また X_n, Y_n, Z_n : φ のみの函数とし、外力を次の通りおく。

$$X = \sum X_n \cos \lambda \xi, \quad Y = \sum Y_n \sin \lambda \xi, \quad Z = \sum Z_n \sin \lambda \xi \dots\dots\dots (16)$$

(14)式に(15), (16)式を代入すれば、(14)式は φ に関する次の連立常微分方程式となる。

$$\left. \begin{aligned} -\lambda^2 u_n + \frac{1-\nu}{2} u_n'' + \frac{1+\nu}{2} \lambda v_n' - \nu \lambda w_n' + k \left\{ \frac{1-\nu}{2} u_n'' - \lambda^2 w_n - \frac{1-\nu}{2} \lambda w_n'' \right\} + \frac{a^2}{B} X_n &= 0 \\ -\frac{1+\nu}{2} \lambda u_n' + v_n'' - \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 v_n - w_n'' + k \left\{ -\frac{3(1-\nu)}{2} \lambda^2 v_n - \frac{3-\nu}{2} \lambda^2 w_n'' \right\} + \frac{a^2}{B} Y_n &= 0 \\ -\nu \lambda u_n + v_n' - w_n' - k \left\{ \frac{1-\nu}{2} \lambda u_n'' + \lambda^3 u_n - \frac{3-\nu}{2} \lambda^2 v_n + \lambda^4 w_n - 2\lambda^2 w_n'' + w_n'' + 2w_n'' + w_n'' \right\} + \frac{a^2}{B} Z_n &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

(14)式の特解すなわち $x=0, l$ における境界条件を満たすが、 $\varphi=0, \bar{\varphi}=0$ における境界条件導入を考えないときの力の釣合式の解は次のようにして求められる。

まず荷重 X_n, Y_n, Z_n をフーリエ級数展開して次の形におく。

$$\text{対称荷重} \dots\dots X_n = \sum X_{mn} \cos m\varphi, \quad Y_n = \sum Y_{mn} \sin m\varphi, \quad Z_n = \sum Z_{mn} \cos m\varphi \dots\dots\dots (18)$$

$$\text{逆対称荷重} \dots\dots X_n = \sum X_{mn} \sin m\varphi, \quad Y_n = \sum Y_{mn} \cos m\varphi, \quad Z_n = \sum Z_{mn} \sin m\varphi \dots\dots\dots (19)$$

(18), (19)式を(17)式に代入し、 u_n, v_n, w_n を次の形で与える。

$$\text{対称荷重} \dots\dots u_n = \sum u_{mn} \cos m\varphi, \quad v_n = \sum v_{mn} \sin m\varphi, \quad w_n = \sum w_{mn} \cos m\varphi \dots\dots\dots (20)$$

$$\text{逆対称荷重} \dots\dots u_n = \sum u_{mn} \sin m\varphi, \quad v_n = \sum v_{mn} \cos m\varphi, \quad w_n = \sum w_{mn} \sin m\varphi \dots\dots\dots (21)$$

(18), (19), (20), (21)式によって(17)式は u_{mn}, v_{mn}, w_{mn} による応力曲げによる合応力 T は次式によって表わされる。
 について次の連立一次方程式になる。

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{mn} \\ v_{mn} \\ w_{mn} \end{bmatrix} = \frac{a^2}{B} \begin{bmatrix} X_{mn} \\ Y_{mn} \\ Z_{mn} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (22)$$

これより、 u_{mn}, v_{mn}, w_{mn} が求まれば(20), (21), (15)式により u, v, w が計算出来るから(9)式により各種応力は計算出来る。しかし一般に $\varphi=0, \bar{\varphi}=0$ において与えられた境界条件を満足しないことが多いから、この場合は $X_n = Y_n = Z_n = 0$ とおいた(17)式から余函数 u_n, v_n, w_n を求めなければならない。

2. 長い円管桁の曲げ理論実用解式^{8)~11)}

図-2を参照し、桁としてタワミから生ずる垂直方向によ

$$\left. \begin{aligned} \text{合応力 } T &= \frac{M \cos \theta}{\pi r^2} \\ \text{曲 率 } \frac{1}{R} &= \frac{M}{EI} = \frac{M}{E \pi r^3 t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

ここに M : 軸方向曲げモーメント, θ : 中心軸のまわりの角度, r : 円管の半径, t : 管厚, I : 断面二次モーメント。

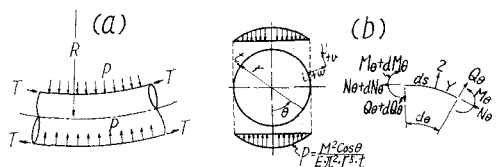


図-2 長い円管桁の力の釣合い

また円筒殻の単位面積当りの垂直方向の見かけの力 P は

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{T}{R} = \frac{M^2}{E\pi^2 r^5 t} \cos \theta = \Phi \cos \theta \\ \text{ただし } \Phi &= \frac{M^2}{E\pi^2 r^5 t}, \quad E: \text{弾性係数} \end{aligned} \right\} \dots (24)$$

長い円管桁の場合、支間中央における応力を簡単のため平面変形状態と仮定して取扱う。

Y, Z を P の接線方向と法線方向の成分とする。

$$\left. \begin{aligned} Y &= P \sin \theta = \Phi \cos \theta \sin \theta, \\ Z &= P \cos \theta = \Phi \cos^2 \theta \end{aligned} \right\} \dots (25)$$

そこで図-2を参照し、次の3つの式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \left(\frac{dN_\theta}{d\theta} + Q_\theta \right) + Y &= 0, \quad \frac{1}{r} \left(\frac{dQ_\theta}{d\theta} - N_\theta \right) + Z = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{dM_\theta}{d\theta} + Q_\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (26)$$

また、応力と変位との関係は(27), (28)によって表わされる。

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = \frac{12r^2}{Et^3} M_\theta, \quad \frac{dv}{d\theta} + w = \frac{r}{Et} N_\theta \dots (27)$$

(26)式より

$$\frac{d^2 Q_\theta}{d\theta^2} + Q_\theta = - \left(rY + r \frac{dZ}{d\theta} \right) = - \frac{3}{2} r \Phi \sin 2\theta \quad (28)$$

この解は次式によって与えられる。

$$Q_\theta = A \sin \theta + B \cos \theta + \frac{1}{2} r \Phi \sin 2\theta \quad \dots (29)$$

積分常数 A, B は $\theta = \pi/2, 0$ にて $Q_\theta = 0$ になることから定まる。結局 $Q_\theta = \frac{1}{2} r \Phi \sin 2\theta$ となり、 N_θ, M_θ は(26)式より

$$N_\theta = \frac{dQ_\theta}{d\theta} + rZ = - r \Phi \sin^2 \theta \quad \dots (30)$$

$$M_\theta = - \int Q_\theta r d\theta + C = - \frac{1}{2} \Phi r^2 \sin^2 \theta + C \quad \dots (31)$$

(27)式より

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = \frac{12r^2}{Et^3} \left(- \frac{1}{2} \Phi r^2 \sin^2 \theta + C \right) \quad \dots (32)$$

この解は

$$\left. \begin{aligned} w &= D \sin \theta + E \cos \theta \\ &+ \frac{12r^2}{Et^3} \left\{ - \frac{1}{6} \Phi r^2 (1 + \cos^2 \theta) + C \right\} \end{aligned} \right\} \dots (33)$$

によって表わされる。

積分常数 D, E は境界条件 $\theta = 0, \pi/2$ にて $\frac{dw}{d\theta} = 0$ より $D = E = 0$ と定まるのでタワミ w は次式のようになる。

$$w = + \frac{12r^2}{Et^3} \left\{ - \frac{1}{6} \Phi r^2 (1 + \cos^2 \theta) + C \right\} \quad \dots (34)$$

(27)式に w, N_θ の値を代入し積分すると、 v は次の通りになる。

$$\left. \begin{aligned} v &= - \frac{\Phi r^2}{Et} \left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \\ &- \frac{12r^2}{Et^3} \left\{ - \frac{1}{6} \Phi r^2 \left(\frac{3\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) + C \cdot \theta \right\} + F \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

積分常数 C, F は境界条件 $\theta = 0, \pi/2$ にて $v = 0$ より

$$F = 0, \quad C = \Phi \left(\frac{1}{4} r^2 - \frac{t^2}{24} \right)$$

となり、 M_θ, w, v の完全な表示式は次の通りになる。

$$\left. \begin{aligned} M_\theta &= \Phi \left\{ \frac{r^2}{2} \left(\frac{1}{2} - \sin^2 \theta \right) - \frac{t^2}{24} \right\} \\ w &= - \frac{\Phi r^2}{Et} \left(\frac{1}{2} + \frac{r^2}{t^2} \cos^2 2\theta \right) \\ v &= \frac{1}{2} \frac{\Phi r^2}{Et} \left(\frac{1}{2} + \frac{r^2}{t^2} \right) \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \dots (36)$$

2・4 円管桁の圧座に関する設計理論

円管桁に垂面荷重が載荷された場合、支点部付近において大なる反力の影響を受け断面変形をおこし、円管が縦方向に割目を生じて破壊することが往々にしてある。これについて理論的に取扱った論文は余り見当たらないので著者はこの点に留意し設計計算理論を提案する。

次にその計算手順と理論について述べる。

1. 支点反力の桁におよぼす圧力分布の解析

円管桁に死・活荷重が満載された場合を取扱い、両支点部に反力が逆方向に下方から載荷され、桁は上方より等分布荷重により弾性的に満遍なく支持されているものと仮定する。すなわち逆荷重を受ける弾性床上の桁¹²⁾として取扱うときわめて都合がよい。

いま、単一集中荷重 P を受ける弾性床上の桁の微分方程式

$$\frac{d^2 y}{d\xi^4} + 4y = 0 \quad \dots (37)$$

(37)式の解は周知の通り(38)式によって表わされる。

$$y = \frac{1}{2} \left\{ (A_1 e^\xi + A_2 e^{-\xi}) \cos \xi + (A_3 e^\xi + A_4 e^{-\xi}) \sin \xi \right\} \quad \dots (38)$$

(38)式において積分常数 A_1, A_2, A_3, A_4 は境界条件によって、

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= P\lambda/2am, \quad A_2 = P(2+\lambda)/2am, \\ A_3 &= P\delta/2am, \quad A_4 = P(2-\delta)/2am \end{aligned} \right\}$$

となり、

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{P}{2m} \left\{ e^{-\xi} (\sin \xi + \cos \xi) \right. \\ &\left. + \lambda \cosh \xi \cos \xi + \delta \sinh \xi \sin \xi \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots (39)$$

もし桁の長さがきわめて長い場合は、 $l = \infty$ 、従って $a = \infty$ となり

$$\lambda = 0, \quad \delta = 0$$

となる。

その場合は

$$P = \frac{P}{2m} \left\{ (\cosh \xi - \sinh \xi) (\cos \xi + \sin \xi) \right\} = \frac{P}{2m} f_1(\xi) \quad (40)$$

なお上述の式において

$$\left. \begin{aligned} m &= \sqrt{\frac{4EI}{a}}, \quad \xi = \frac{x}{m}, \\ f_1(\xi) &= (\cosh \xi - \sinh \xi) (\cos \xi + \sin \xi) \\ \lambda &= \frac{\cos \beta - \sin \beta + e^{-\beta} + 2}{\sinh \beta + \sin \beta}, \\ \delta &= \frac{\cos \beta + \sin \beta - e^{-\beta}}{\sinh \beta + \sin \beta}, \quad \beta = \frac{l}{m} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

ここに E : 弾性係数, I : 断面二次モーメント, a : 弾性床係数。

図-3 は反力の圧力分布の傾向を示す $f_1(\xi)$ 曲線である。

2. 圧座による横方向曲げモーメントの解析¹³⁾

図-4 において

$$\left. \begin{aligned} BC \text{ 間} \cdots M_\varphi &= M_B - \frac{Q}{a} \cdot \frac{x^2}{2} \\ CE \text{ 間} \cdots M_\varphi &= M_B - \frac{Q}{2} \left(x - \frac{a}{4} \right) \\ EA \text{ 間} \cdots M_\varphi &= M_B - \frac{Q}{3} \left(x - \frac{a}{4} \right) \\ &\quad - \frac{Q}{b} \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2} - x \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

$$W = \int \frac{M_\varphi^2}{2EI} ds, \quad \frac{\partial W}{\partial M_B} = 0 \quad (43)$$

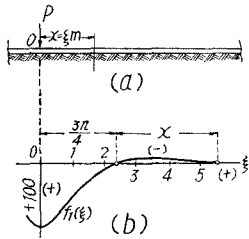


図-3 反力の分布函数 $f_1(\xi)$ の変化曲線

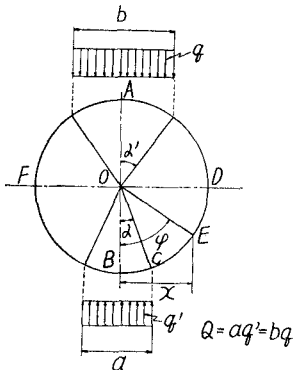


図-4 円管桁の横断面における力の釣合い

$$\therefore \int \frac{M_\varphi}{EI} \frac{\partial M_\varphi}{\partial M_B} ds = 0 \quad (44)$$

$$\frac{\partial M_\varphi}{\partial M_B} = 1 \text{ より}$$

$$\int M_\varphi ds = 0 \quad (45)$$

$$\therefore \int_0^a \left(M_B - \frac{Qx}{2a} \right) ds + \int_a^{\pi-a'} \left\{ M_B - \frac{Q}{2} \left(x - \frac{a}{4} \right) \right\} ds + \int_{\pi-a'}^\pi \left\{ M_B - \frac{Q}{2} \left(x - \frac{a}{4} \right) - \frac{Q}{b} \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2} - x \right)^2 \right\} ds = 0 \quad (46)$$

$$x = r \sin \varphi, \quad a = 2r \sin \alpha, \quad b = 2r \sin \alpha', \quad ds = rd\varphi$$

を代入し、式の誘導整理を行なえば、縦亀裂をもっとも生じ易い底部 B 点の曲げモーメントは次の通りになる。

$$M_B = \frac{Qr}{2\pi} \left\{ \frac{3}{4} (\cos \alpha + \cos \alpha') + \frac{1}{4} \left(-\frac{\alpha}{\sin \alpha} + \frac{\alpha'}{\sin \alpha'} \right) - \frac{\sin \alpha}{2} (\pi - \alpha) + \frac{\sin \alpha'}{2} \cdot \alpha' \right\} \quad (47)$$

いま $\alpha = \pi/2, \alpha' = \pi/2$ とすれば

$$M_B = 0.2509 r^2 \quad (48)$$

この場合最大曲げモーメントは管の底部 B 点に生ずる。

3. 横方向曲げモーメントによる繊維応力度の解析¹³⁾

いま 図-5 を参照し、 f_c : 鋼管の受ける繊維応圧力度、

f_t : 鋼管の受ける繊維応張力度、 E_c : 鋼管の圧縮弾性係数、

E_t : 鋼管の引張弾性係数、 b : 鋼管の反力分布幅とすれば、

断面内にかかる応力の総和は 0 になるから次式が成立する。

$$\frac{2}{3} f_c x b - \frac{2}{3} f_t (t-x) b = 0 \quad (49)$$

すなわち、 $f_c x = f_t (t-x)$ となり、 M : 横方向曲げモーメントとすれば、

$$M_1 = \frac{5}{12} f_c x^2 b, \quad M_2 = \frac{5}{12} f_t (t-x)^2 b$$

$$\therefore M = \frac{5}{12} f_c b x^2 + \frac{5}{12} f_t b (t-x)^2 \quad (50)$$

いま、 $E_c/E_t \doteq 1, f_t/f_c = n$ とすれば、

$$f_t = n f_c, \quad x = n(t-x)$$

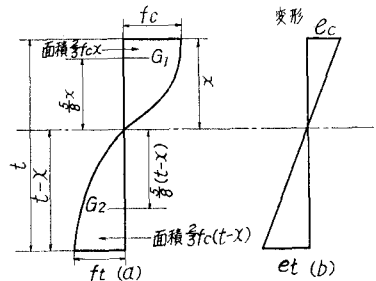


図-5 円管桁の横方向曲げモーメントによる繊維応力度分布と変形

$$\begin{aligned} \therefore x &= \frac{n}{1+n} t, \\ M &= \frac{5}{12} f_c b x^2 + \frac{5}{12} f_t b (t-x)^2 = \frac{5}{12} f_t b \left\{ \frac{1}{n} x^2 + (t-x)^2 \right\} \\ \therefore f_t &= \frac{M}{\frac{5}{12} b \left\{ \frac{1}{n} x^2 + (t-x)^2 \right\}} \left. \begin{aligned} f_c &= \frac{1}{n} f_t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n=f_t/f_c=1 \text{ とすれば, } x=0.5t \text{ となり} \\ f_t=f_c=\frac{M}{0.2083bt^2} \dots\dots\dots (52) \end{aligned}$$

2.5 円管桁の曲げ座屈理論と実験解式¹⁴⁾

1. L. G. Brazier 氏の理論

円筒の単位長さを考え断面上の点がある変位 (v, w) をなすときの外モーメントによる軸方向の伸縮による歪エネルギー U_1 と周方向の曲率変化による歪エネルギー U_2 とを求めると

$$U_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 K_1^2 \phi d^2 dy, \quad U_2 = \frac{1}{2} D_2 \phi K_2^2 dy \dots\dots (53)$$

ここに、 α_1 : 外板の軸方向の引張剛性、 D_2 : 外板の周方向の曲げ剛性、 K_1 : 曲げモーメント M による軸方向の曲率、 K_2 : 変形 v, w による周方向の曲率変化、 d : 変化後の点の中立軸 NA よりの距離。

全歪エネルギーは、

$$U = U_1 + U_2 \dots\dots\dots (54)$$

そこで Castigliano の定理により

$$M = \frac{dU}{dK_1} \dots\dots\dots (55)$$

$$\begin{aligned} M &= \pi r^3 \alpha_1 \left(K_1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{\alpha_1 r^4}{D_2} K_1^3 \right) \\ \therefore M_{\max} &= \frac{4\sqrt{6}}{9} \pi r \sqrt{D_2 \alpha_1} \dots\dots\dots (56) \end{aligned}$$

これは一般の直交異方性同筒についての結果である。中立軸より最遠点の曲げによる最大圧縮内力 (単位幅) N_1 は

$$N_1 = \alpha_1 K_1 r = \sqrt{\frac{8}{3}} \sqrt{\frac{D_2 \alpha_1}{r}} \dots\dots\dots (57)$$

等方性一様板厚の同筒では

$$\begin{aligned} D_2 &= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{Et}{1-\nu^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (58) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore M_{\max} &= \frac{2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{1-\nu^2} E r t^2, \\ \sigma_{\max} &= \frac{2\sqrt{2}}{9(1-\nu^2)} E \frac{t}{r} \dots\dots\dots (59) \end{aligned}$$

$\nu=0.3$ のときは

$$M_{\max} = 1.086 E r t^2, \quad \sigma_{\max} = 0.346 E \frac{t}{r} \dots\dots\dots (60)$$

2. G. Gerard 氏の実験式

σ_K : 座屈時の最大曲げ応力とすれば

$$\begin{aligned} \text{弾性域では } \sigma_K &= 0.36 \frac{Et}{r}, \quad \text{塑性域では } \sigma_K = 0.36 \frac{E s t}{r} \\ &\dots\dots\dots (61) \end{aligned}$$

3. L. H. Donnell 氏の座屈モーメントによる解式 座屈曲げ応力 σ_K は

$$\begin{aligned} \sigma_K &= \frac{M_K}{Z} = \frac{32}{\pi} \cdot \frac{D}{D^4 - d^4} \cdot M_K \left. \begin{aligned} D &= 2r+1, \quad d = 2r-t \\ r &: \text{円筒の半径, } t: \text{厚さ} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (62) \end{aligned}$$

4. E. Chwalla 氏の解式

断面は楕円形に変形し、周長は不変と仮定して高次微小項まで精密に考慮、エネルギー法により解いている。

$$N_{\max} = M_K = 0.378 \pi E r t^2, \quad \sigma_{\max} = 0.51 E t / r \quad (63)$$

ここに r : 円筒の半径、 t : 厚さ、 E : 弾性係数

3. 基礎模型実験

3.1 模型製作および実験方法

模型材料は NK-SS 41 鋼材よりなり、製作は札幌市田尻機械工業株式会社に依頼した。鋼管桁模型の寸法は図-6 の通りで、半径の異なる等断面のもの 2 種類、Beam-1 (B-1)、Beam-2 (B-2) と変断面のもの 1 種類、Beam-3 (B-3) とがそれぞれである。模型 B-1、B-2、B-3 とそれぞれ 48 枚ずつの Strain gage (type: KP-10-A 1, gage length: 10.0 mm, resistance: $120.0 \pm 0.5 \Omega$, gage factor: $2.06 \pm 1\%$, quantity: 10) を貼り、万能試験機 RH-100 型 (最大力量 100 t) にかけ中央二点荷重により載前試験を行なった。3 種類の模型とも図-6 の通り支間 80 cm にて単純支持し、上載荷重は最初 0.25 t ずつ追加して行ったが、中間にて 1.0 t きざみとし、最後には 2.0~3.0 t きざみに増加した。

各模型とも中央部、端部の断面のほか中間部の二断面につき、SM 4 J 型抵抗線歪測定器を用いて Gage 個所の歪を測り、断面応力度分布を求めた。Strain gage の貼った個所は図-7 の通りである。抵抗線歪測定器の付属装置としては、インジケター (SM 4 J 型抵抗線測定器)、ジャンクションボックス (SJ 4 C)、スイッチボックス (SS 24 J)、Gage tester (GF 5 B) などである。

また各模型ともその支間中央点のほか支点部に近い 2 個所にダイヤル・ゲージ (精度: 1/100 mm) を取付け、それぞれのタワミを測定した。

以上は弾性限度以内の測定であるが、更に荷重を増加し、模型が弾性限度を超過し、塑性領域に入り、破壊するまでの現象を慎重に観測し、その変形状況をも記録した。

なお、模型の鋼材 (NK-SS 41) については予め試験片をとり、引張と曲げの素材試験を行ない、理論破壊荷重、理

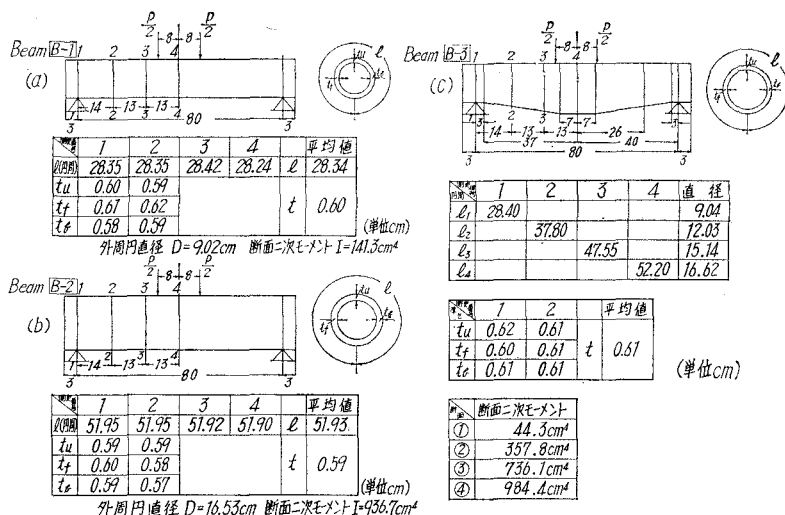


図-6 鋼管桁の模型寸法

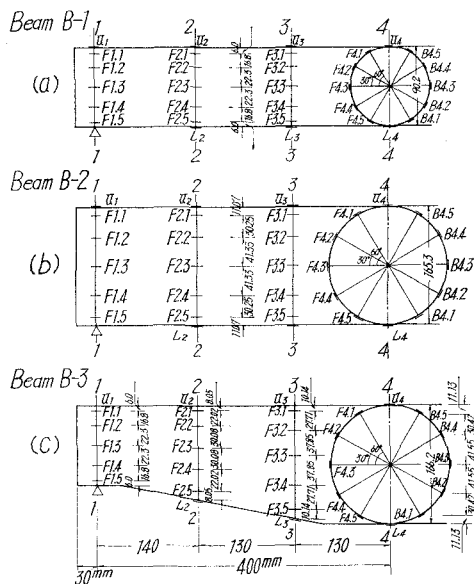


図-7 模型桁の Strain Gage 測定箇所

論タワミなどの計算にそれらの結果すなわち素材試験の降伏点、破壊限度、弾性係数などの値を用いた。

3.2 理論計算値と実験値の比較

1. 弾性限度以内の断面応力度 σ_e

各模型 B-1, B-2, B-3 の支定点 (断面 1~1), 中間部 2 箇所 (断面 2~2, 断面 3~3) および中央点 (断面 4~4) について理論計算と実験による断面応力度 σ_e の分布比較図を画けば、図-8(a)~(e), 図-(a)~(e), 図-10(a)~(e) の通りである。

理論計算においては円筒殻の曲げ理論解式よりも長い円管桁の曲げ理論解式を用いた方が実験値に近いように思わ

れたのでその計算値を記載した。

B-1 では荷重の小さい中は理論値の方がはるかに大きく出ているが、荷重が大きくなるにつれて理論値と実験値は割合によく接近するようである。B-2 では荷重の大小を問わず理論値と実験値の差異はほぼ一定の比率を示している。断面 3~3, 断面 4~4 では大体において理論値の方が幾分大きく出る傾向にある。B-3 では変断面のためか B-1, B-2 とはかなり異った傾向を示し、特に断面 4~4 においては実験値の方が理論計算値よりも幾分大きく出る傾向にあり、圧縮応力度においてその傾向が顕著である。すなわち変断面の鋼管桁に対する曲理論は更なる研究の余地があると考えられる。

2. 荷重-タワミ曲線

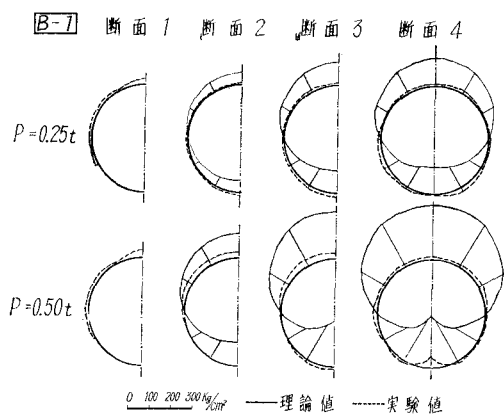
各模型 B-1, B-2, B-3 における中央点の理論計算と実験による荷重-タワミ曲線比較図を画けば図-11 の通りである。何れも実験値の方が大きく出ており、特に B-2 においては著しい差異がある。また B-3 における各荷重についての理論計算と実験によるタワミ曲線比較図を画けば図-12 の通りとなる。更に曲げとせん断力を同時に考慮せる理論計算値および曲げとせん断力のほかに偏心をも考慮した理論計算および曲げとせん断力のほかに偏心をも考慮した理論計算値を実験値と比較して見れば図-13 の通りとなる。この図を見れば明かなように、B-1, B-3 では偏心の影響も考慮すればかなりよく実験値に近接することがわかる。

3. 曲げによる破壊荷重

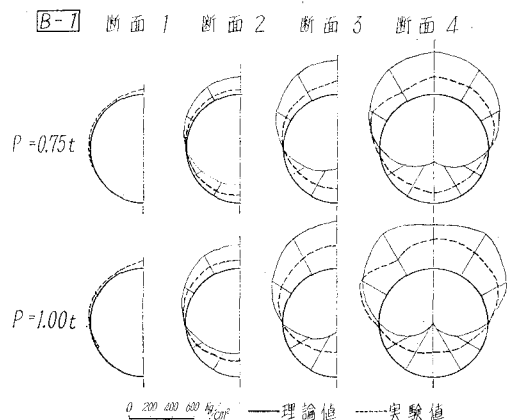
曲げによる破壊荷重 P_K は次式によって計算出来る。

$$\sigma_K = \frac{M_K}{W} = \frac{16P_K}{W}, \quad P_K = \frac{1}{16} W \cdot \sigma_K \dots \dots \dots (64)$$

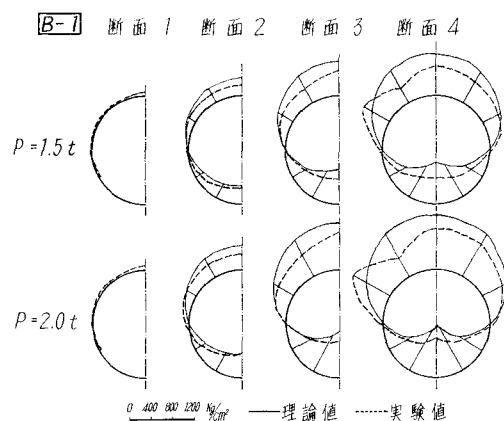
素材試験¹⁵⁾の結果より



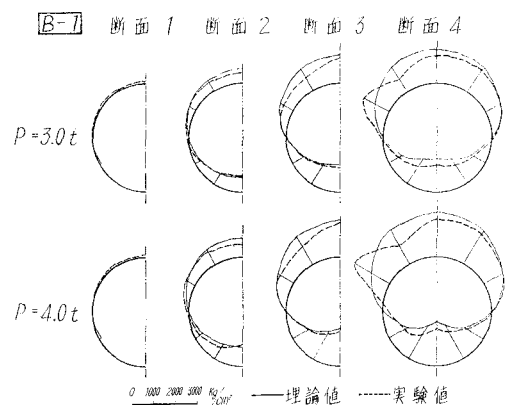
(a) 断面応力度 (σ_x) 分布 (No. 1)



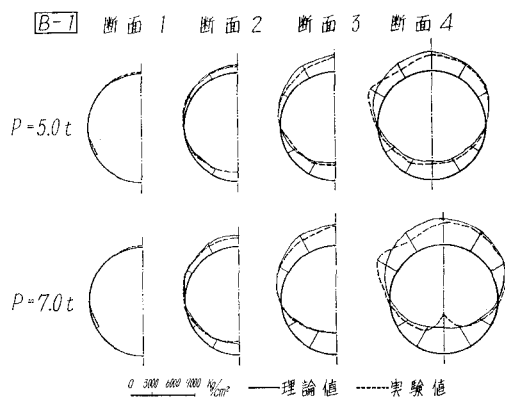
(b) 断面応力度 (σ_x) 分布 (No. 2)



(c) 断面応力度 (σ_x) 分布 (No. 3)

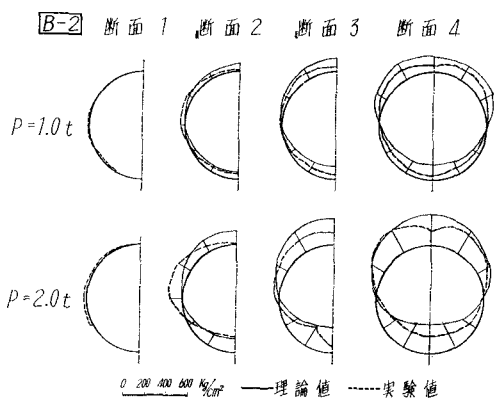


(d) 断面応力度 (σ_x) 分布 (No. 4)

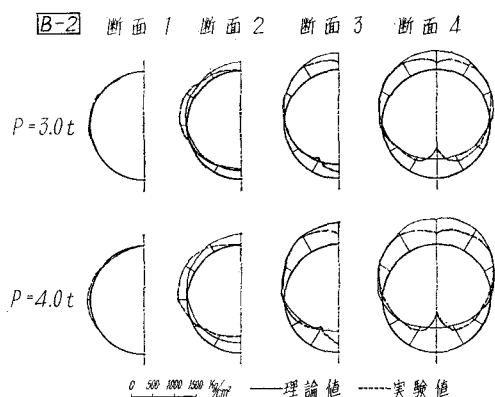


(e) 断面応力度 (σ_x) 分布 (No. 5)

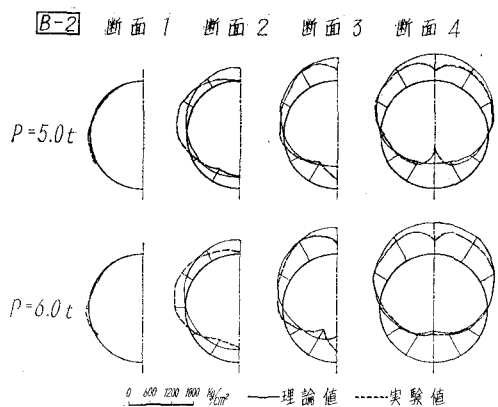
図—8 模型 B-1 の断面応力度 (σ_x) 分布比較



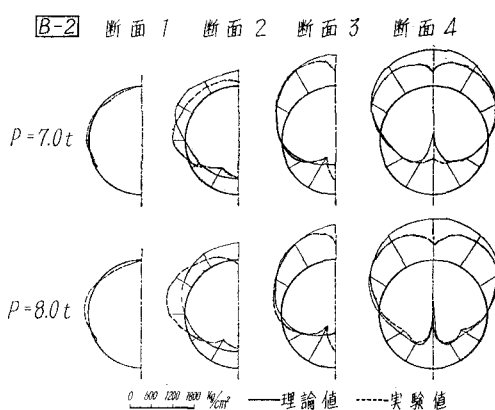
(a) 断面応力度 (σ_x) 分布 (No. 1)



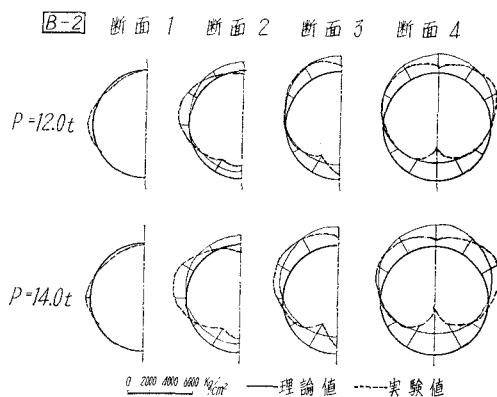
(b) 断面応力度 (σ_x) 分布 (No. 2)



(c) 断面応力度 (σ_x) 分布 (No. 3)

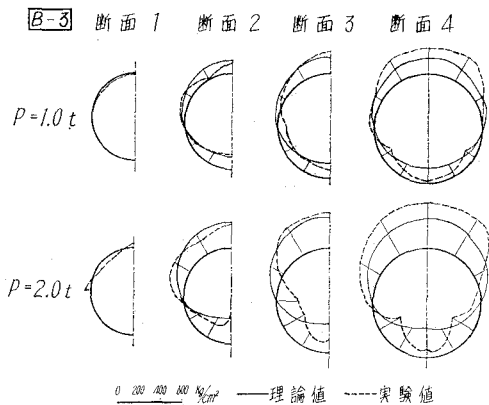


(d) 断面応力度 (σ_x) 分布 (No. 4)

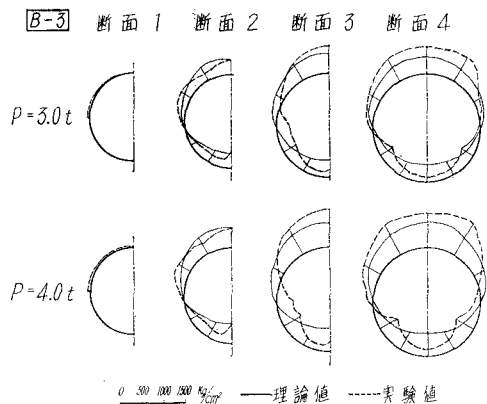


(e) 断面応力度 (σ_x) 分布 (No. 5)

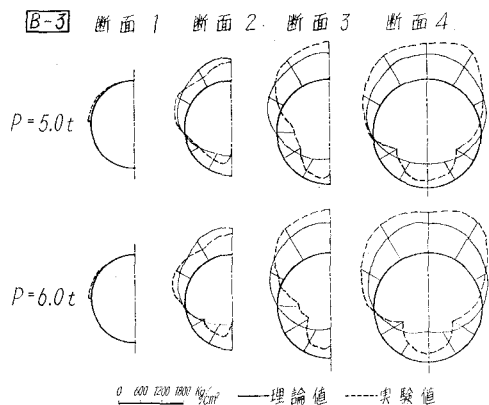
図—9 模型 B-2 の断面応力度 (σ_x) 分布比較



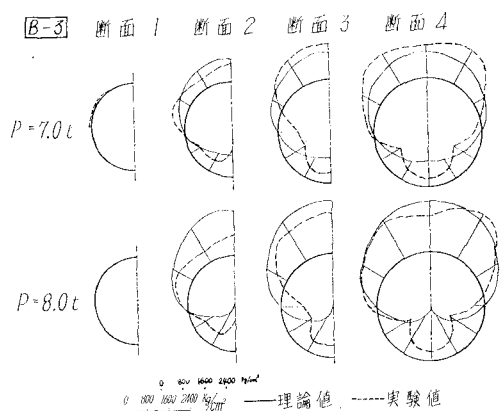
(a) 断面応力度 (σ_x) 分布 (No. 1)



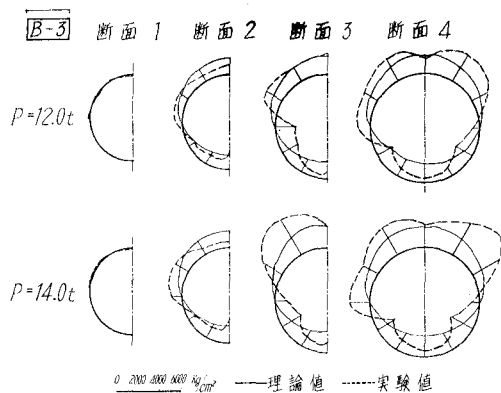
(b) 断面応力度 (σ_x) 分布 (No. 2)



(c) 断面応力度 (σ_x) 分布 (No. 3)



(d) 断面応力度 (σ_x) 分布 (No. 4)



(e) 断面応力度 (σ_x) 分布 (No. 5)

図-10 模型 B-3 の断面応力度 (σ_x) 分布比較

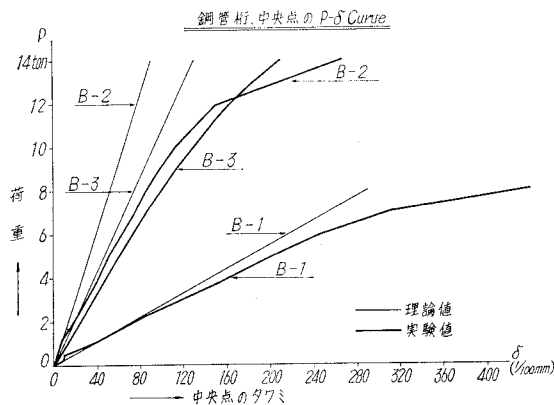


図-11 各模型の荷重—タワミ曲線比較

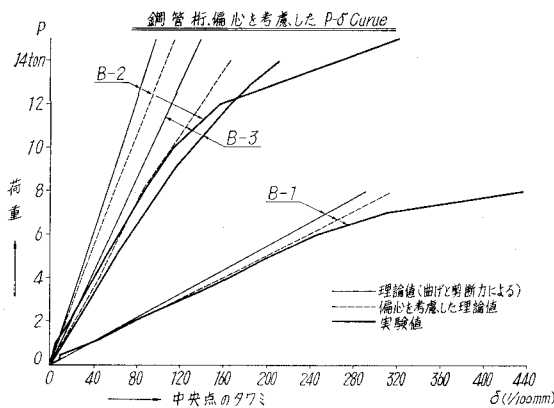


図-13 各模型の各種理論による荷重—タワミ曲線比較

Tension test :

$$\sigma_{K(Y \cdot P)} = 2670 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_{K(M \cdot P)} = 4390 \text{ kg/cm}^2$$

Bending test :

$$\sigma_{K(Y \cdot P)} = 2610 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_{K(M \cdot P)} = 4290 \text{ kg/cm}^2$$

ここに $\sigma_{K(Y \cdot P)}$: 降伏点応力度, $\sigma_{K(M \cdot P)}$: 最大応力度

上述の結果を用い, 破壊荷重 (降伏点荷重, 最大荷重) を計算すれば表-1 の通りとなる。

3.3 考 察

1. 曲げによる断面応力度 σ_x

等断面の模型桁 B-1, B-2 では実験値の方が理論値よりも小なる傾向にあり, 管径の小さな B-1 において荷重の小さな範囲において特に著しかった。しかし荷重がある程度大きくなければ B-1 の応力度分布の傾向はむしろ 3 理論値 (長い円管桁の理論計算値) とよく接近するようである。管径が大になればなるほど短い円管桁の理論を用いる必要があるのは当然である。変断面の模型桁 B-3 では実験値の方が理論値よりも大きく出ているので, 理論計算さえ研究すれば経済断面の設計が得られるものと思う。

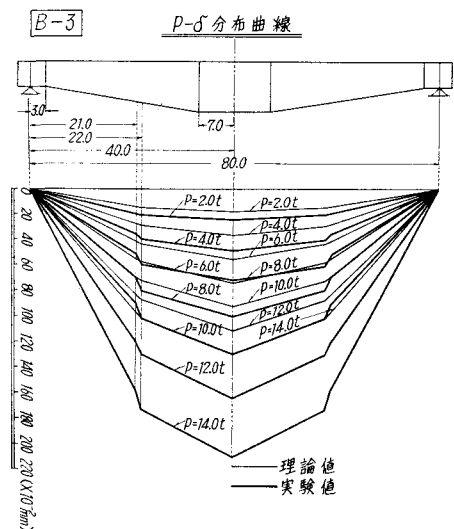


図-12 模型 B-3 の荷重によるタワミ曲線変化

表-1 曲げによる破壊荷重 P_K

模 型	断面係数 W (cm^3)	理 論 値 (Tension test)		理 論 値 (Bending test)		実験値 $P_{K(Y \cdot P)}$ (kg)
		$P_{K(Y \cdot P)}$ (kg)	$P_{K(M \cdot P)}$ (kg)	$P_{K(Y \cdot P)}$ (kg)	$P_{K(M \cdot P)}$ (kg)	
B-1	31.33	5.23	8.60	5.11	8.40	7.20
B-2	113.33	18.91	31.10	18.49	30.39	15.60
B-3	118.46	19.76	32.50	19.32	31.76	14.80

注) 変断面桁 B-3 の断面係数 W は破壊の生ずる中央断面のものをを用いた

2. タ ワ ミ

等断面の桁 B-1, B-2 において理論せん断力タワミの曲げタワミに対する割合はそれぞれ 7%, 25% で管径が大なるにつれせん断力の影響が顕著になっている。偏心曲げモーメントによる影響も管径の大小を問わずかなりあることがわかる。要するに従来の単桁理論によるタワミ計算値は管径がある程度小さい場合以外はそのままでは当てはまらない。変断面桁 B-3 における $P-\delta$ 曲線等は等断面桁と異なり初めから緩い曲線形を示し, 降伏点に近いところからタワミの急増を示す傾向にある。せん断力と偏心曲げモーメントの影響を加算すれば実験値と理論値は割合に接近することを見出した。なお, 変断面桁のタワミ算定には弾性荷重法を用いたことを付記し, 実用的に利用価値の高いことを強調する次第である。

3. 曲げによる破壊荷重

曲げによる破壊荷重の実験値は明瞭でないので, 一応降伏点荷重によって理論計算値と比較して見た。その結果は表-1 の通りであり, 実験値の方が管径の小さな B-1 の場合のみ理論計算値より大きく, 管径の大なる B-2 と変断面桁

B-3 では逆に実験値が小さく出ている。すなわち、これを言い換えるならば、管径が大きくなるほど理論よりも小さい荷重で早く破壊すると言うことが出来ると思う。

これは管径が大きくなればなるほど横断面における局部変形を起し、局部座屈または圧座現象を呈するようになるからであり、普通の曲げ応力度だけで検することは出来ない。

4. 変形と破壊現象

破壊とは材料の一部または全体に分離を起すか著しく大きい変形を起して使用不可能になった状態を総称していうのであり、ここではタワミまたは断面変形の急激な増加を示す状態を破壊と仮定してよいと思う。推定最大応力度およびタワミは、各模型 B-1, B-2, B-3 に対し、それぞれ 6,800 kg/cm², 6,500 kg/cm², 3,600 kg/cm² および 4.6, 5.5, 2.8 mm であり、限度荷重、最大限度応力度、タワミは、それぞれ B-1, B-2, B-3 に対し、5, 9, 11 t; 2,300 kg/cm², 2,500 kg/cm², 2,400 kg/cm² および 2.0, 1.0, 1.5 mm となり、降伏点荷重までは素材荷重までは素材試験の $\sigma_K(Y-P) = 2,650 \text{ kg/cm}^2$ とほぼ一致し、塑性領域に入る段階では 4,300 kg/cm を上回るようである。

また管径の大きな等断面桁 B-2 では、支点部付近に圧座の現象が明かに見られ、横断面の著しい変形が発見された。このことは管桁橋の設計において充分注意しなければならない点であり、吟味検討を要する研究課題でもあると思う。

4. 圧座に関する計算例

4.1 設計条件

型式：単純鋼管桁、支間：50 m、鋼管の寸法：半径 125 cm、厚さ 3 cm、設計荷重：T-20, L-20 の活荷重および死荷重、横断面形式：鋼甲板 1-管桁構造、設計示方書：鋼道路橋設計示方書、溶接鋼道路橋示方書、鋼管構造計算規準・同解説、高張力鋼デザイン・マニュアル、高張力鋼鉄道橋設計示方書

4.2 支点部における圧座の理論計算

支点部の反力

$$R = R_l + R_a = 162,000 + 81,414 = 243,414 \text{ kg}$$

計算には公式 (37)~(52) を用いる。

$$\alpha = \frac{P}{y} = 24,228 \text{ kg/cm}^2, \quad m = \sqrt[4]{\frac{4EI}{a}} = 292 \text{ cm}$$

$$\therefore x = \xi m = 229.2 \text{ cm},$$

$$\beta = \frac{l}{m} = 17.12 = 5\pi + 1.32, \quad \lambda \doteq 0$$

同様に

$$\delta \doteq 0, \quad p = \frac{P}{2m} f_1(\xi) = 416.805 f_1(\xi)$$

管桁を 1 m 毎に区切り、格点 0… $p_0 = 490 \text{ kg/cm}$, 格点

1… $p_1 = 470 \text{ kg/cm}$, 格点 2… $p_2 = 380 \text{ kg/cm}$, 格点 3… $p_3 = 265 \text{ kg/cm}$, 格点 4… $p_4 = 197 \text{ kg/cm}$, 格点 5… $p_5 = 143 \text{ kg/cm}$, 曲げモーメント M は、格点 0… $M_0 = 1.928 \times 10^6 \text{ kg}\cdot\text{cm}$, 格点 1… $M_1 = 1.839 \times 10^6 \text{ kg}\cdot\text{cm}$, 格点 2… $M_2 = 1.479 \times 10^6 \text{ kg}\cdot\text{cm}$, 格点 3… $M_3 = 1.038 \times 10^6 \text{ kg}\cdot\text{cm}$, 格点 4… $M_4 = 0.770 \times 10^6 \text{ kg}\cdot\text{cm}$, 格点 5… $M_5 = 0.558 \times 10^6 \text{ kg}\cdot\text{cm}$ 。

単位応力度を $f_t = f_c = M/0.2083 \text{ bt}^2$ によって求め、支点付近三格点について平均値をとれば $f_t = f_c = 9,307 \text{ kg/cm}^2$ となり、横方向の曲げによる繊維応力度は高張力鋼 80 キロハイテンを用いても間に合わないこととなる。支点部の線接触をさけ支承鋼板をある幅だけ溶接によって固定させれば曲げモーメントは減るけれども 1/2 としても $f_t = f_c = 4,654 \text{ kg/cm}^2$ となりまだまだ危険状態である。変断面管桁を用い、支点部の管径を $D = 80 \text{ cm}$ とすれば曲げモーメントが 1/9.79 に減り、支点付近三格点の平均繊維応力度は $f_t = f_c = 951 \text{ kg/cm}^2$ になり、これならば普通鋼を用いても充分完全となる。この意味からいっても模型実験を試みた B-3 のような変断面鋼管桁を設計に用いることは力学上有利である。

4.3 考察

鋼管桁の曲げ座屈については公式 (53)~(63) を用いて種々計算を行なって見たが全く完全であり問題とするに足りなかった。この意味からいっても支点部の圧座に関する吟味検討に力を注いで鋼管桁の主要寸法を定めることは妥当なものと思う。勿論圧座の設計理論は実用解法であって、純理論的には円管桁の一般的曲げ理論、曲げ座屈理論の追求によって全体的に解決しなければならないものと思う。

5. 円周に沿い線荷量を受ける薄肉円管桁の曲げ理論について

薄肉円管桁の曲げ理論について厳密に取扱った論文は余り見当たらない。円筒殻の曲げ理論から出発してある仮定の基で近似的に取纏めたものが多い。

最近 H. R. Meck¹⁶⁾ 氏が “Bending of a Tin Cylindrical Shell Subjected to a Line Load Around a Circumference” と題し Journal of Applied Mechanics に発表した論文は従来円筒殻の長さについて厳格に吟味追求したものが少いことに鑑み、短い円筒殻、長い円筒殻、更に任意の長さを有する円筒殻それぞれについて従来のものよりも厳格な曲げ理論を展開した。この種の理論を追求する上に非常に参考になると考えられるので、荷重その他に著者の考えを入れて要点のみ紹介することとする。

5.1 一般的な解法

1. 基礎微分方程式

$$\frac{\partial^8 w}{\partial x^8} + \frac{1}{a^8} \frac{\partial^8 w}{\partial \theta^8} + \frac{2}{a^8} \frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + \frac{1}{a^8} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{12(1-\nu^2)}{a^2 h^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 p}{\partial x^4} + \frac{1}{a^4} \frac{\partial^4 p}{\partial \theta^4} \right) \dots\dots\dots (65)$$

2. 曲げモーメント

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) \right\} \\ M_\theta &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (66)$$

3. 曲げ応力度

$$\sigma_x = \frac{6M_x}{h^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{6M_\theta}{h^2} \dots\dots\dots (67)$$

上述の解式において、

$$\left. \begin{aligned} a: & \text{円管の平均半径, } h: \text{厚さ, } L: \text{支間, } x: \text{軸方向の座標, } \theta: \text{円周方向の座標 (角度), } P: \text{最大線荷重, } p: \\ & \text{分布荷重, } M: \text{単位長当りの曲げモーメント, } N: \text{単位長当りの膜力, } E: \text{弾性係数, } \nu: \text{ポアソン比, } u: \text{軸} \\ & \text{方向変位, } v: \text{円周方向の変位, } w: \text{中心方向の変位 (外側正), } \kappa: \text{曲率, } \varepsilon: \text{(伸縮) 歪, } \sigma: \text{応力度, } m: \text{軸方} \\ & \text{向曲げの Lobes 数, } n: \text{円周方向曲げの Lobes 数, } D: \text{円周に沿うた載荷幅 (微小幅) } D = Eh^3/12(1-\nu^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (68)$$

(65) 式の解法には二つの方法がある。その一つは載荷重を x についてのフーリエ級数によって表わし、 w とその誘導関数を解く方法であり、もう一つの方法は 8 次の微分方程式を近似的に 4 次の微分方程式に変換し、閉合形として解く方法である。

4. タワミ・タワミ角・曲率

図-14 において要求される端部の条件は $w=0$ および $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ によって表わされる。

荷重を表わすフーリエ級数 p は

$$p = \frac{-4p}{\pi D} \cos n\theta \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi x}{2L} \cos \frac{m\pi x}{L} \dots\dots\dots (69)$$

この式を (65) 式に代入し w を解き更に $D \rightarrow 0$ の限界をとって中心放射状方向の変位を次式より求めることが出来る。

$$w = \frac{-2P}{DL} \cos n\theta \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{\left(\frac{n^2 + m^2\pi^2}{a^2 + L^2} \right)^2 \cos \frac{m\pi x}{L}}{\left(\frac{n^2 + m^2\pi^2}{a^2 + L^2} \right)^4 - 2 \frac{n^6}{a^8} + \frac{n^4}{a^8} + \frac{12(1-\nu^2)}{a^2 h^2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4} \dots\dots\dots (70)$$

タワミ角および曲率は (71), (72), (73) 式で示される。

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2P}{DL} \cos n\theta \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{\left(\frac{m\pi}{L} \right) \left(\frac{n^2 + m^2\pi^2}{a^2 + L^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{L}}{\left(\frac{n^2 + m^2\pi^2}{a^2 + L^2} \right)^4 - 2 \frac{n^6}{a^8} + \frac{n^4}{a^8} + \frac{12(1-\nu^2)}{a^2 h^2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4} \dots\dots\dots (71)$$

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{2P}{DL} \cos n\theta \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{n^2 + m^2\pi^2}{a^2 + L^2} \right)^2 \cos \frac{m\pi x}{L}}{\left(\frac{n^2 + m^2\pi^2}{a^2 + L^2} \right)^4 - 2 \frac{n^6}{a^8} + \frac{n^4}{a^8} + \frac{12(1-\nu^2)}{a^2 h^2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4} \dots\dots\dots (72)$$

$$\kappa_\theta = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) = -(n^2 - 1) \frac{w}{a^2} \dots\dots\dots (73)$$

曲げモーメントは (66) 式に (72), (73) 式を代入することにより求めることが出来る。(65) 式は 8 次の微分方程式であるが、4 つの境界条件のみが明記されている。この場合 w と M_x は両端にて 0 であり、8 次の微分方程式を近似的の 4 次微分方程式に変換し閉合形として解く際には両端単純支持または両端緊結された場合にのみ満足なよい結果が得られる。

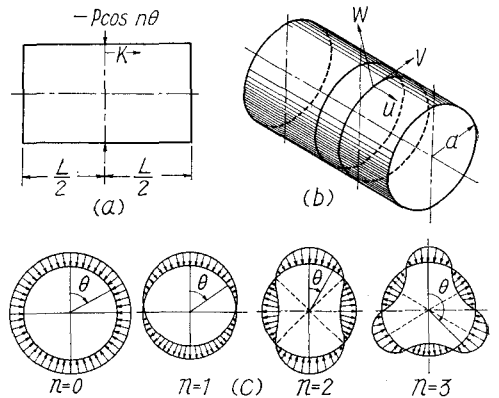


図-14 円周の周りに線荷重を受ける薄肉円管桁

5.2 任意の長さの円管桁

もし円筒が非常に短い・非常に長い場合は以外には 8 次の微分方程式 (65) は 4 次の微分方程式に変換出来ない。それでもっと一般的な解法を適用しなければならない。

すなわち

$$w = Ce^{\psi(x/a)} \cos n\theta \dots\dots\dots (74)$$

(74) 式を (65) 式に代入することにより ψ に対する代数方程式が得られる。

$$(\psi^2 - n^2)^4 + 4\lambda^4 \psi^4 - 2n^6 + n^4 = 0, \quad \lambda = \alpha a \dots\dots\dots (75)$$

λ^4 は非常に大きな数であるから (75) 式は 4 つの非常に大きな根と 4 つの非常に小さな根とを有することがわかる。

大きな根は

$$\left. \begin{aligned} (\Psi^2 - n^2)^4 + 4\lambda^4 \Psi^4 &\approx 0, & \Psi^4 + 4\lambda^4 &\approx 0 \\ \Psi &= (1+i)\lambda, & (1-i)\lambda, & (-1+i)\lambda, & (-1-i)\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (76)$$

小さな根は

$$\left. \begin{aligned} 4\lambda^4 \Psi^4 + n^8 - 2n^6 + n^4 &\approx 0 \\ \Psi &= (1+i) \frac{n(n^2-1)^{1/2}}{2\lambda}, & (1-i) \frac{n(n^2-1)^{1/2}}{2\lambda}, & (-1+i) \frac{n(n^2-1)^{1/2}}{2\lambda}, & (-1-i) \frac{n(n^2-1)^{1/2}}{2\lambda} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (77)$$

(65) 式に対する一般解は

$$\begin{aligned} w = & \left[A_1 e^{\alpha x} \cos \alpha x + A_2 e^{\alpha x} \sin \alpha x + A_3 e^{-\alpha x} \cos \alpha x + A_4 e^{-\alpha x} \sin \alpha x \right. \\ & \left. + B_1 e^{\beta x} \cos \beta x + B_2 e^{\beta x} \sin \beta x + B_3 e^{-\beta x} \cos \beta x + B_4 e^{-\beta x} \sin \beta x \right] \cos n\theta \dots\dots\dots (78) \end{aligned}$$

非常に短い円筒の場合は (78) 式右辺の最初の 4 つの項により、また非常に長い円筒の場合には最後の 4 つの項によりその解が与えられる。単純支持の場合には次式が得られる。

$$\begin{aligned} w = & -\frac{1}{2} \left[3(1-\nu^2) \right]^{1/4} \frac{P}{E} \left(\frac{a}{h} \right)^{3/2} \left[\frac{e^{-\alpha L} (\cos \alpha L + \sin \alpha L)}{\cosh \alpha L + \cos \alpha L} - \frac{e^{-\alpha L} + \cos \alpha L + \sin \alpha L}{\cosh \alpha L + \cos \alpha L} \cosh \alpha x \cos \alpha x \right. \\ & + \frac{e^{-\alpha L} + \cos \alpha L - \sin \alpha L}{\cosh \alpha L + \cos \alpha L} \sinh \alpha x \sin \alpha x \left. \right] \cos n\theta - \left[3(1-\nu^2) \right]^{3/4} \frac{n}{(n^2-1)^{3/2}} \frac{P}{E} \left(\frac{a}{h} \right)^{5/2} \left[e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \right. \\ & \left. - \frac{e^{-\beta L} + \cos \beta L + \sin \beta L}{\cosh \beta L + \cos \beta L} \cosh \beta x \cos \beta x + \frac{e^{-\beta L} + \cos \beta L - \sin \beta L}{\cosh \beta L + \cos \beta L} \sinh \beta x \sin \beta x \right] \cos n\theta \dots\dots\dots (79) \end{aligned}$$

中央点におけるタワミは

$$w_0 = -\frac{1}{2} \left[3(1-\nu^2) \right]^{1/4} \frac{P}{E} \left(\frac{a}{h} \right)^{3/2} \frac{\sinh \alpha L - \sin \alpha L}{\cosh \alpha L + \cos \alpha L} - \left[3(1-\nu^2) \right]^{3/4} \frac{n}{(n^2-1)^{3/2}} \frac{P}{E} \left(\frac{a}{h} \right)^{5/2} \frac{\sinh \beta L - \sin \beta L}{\cosh \beta L + \cos \beta L} \dots (80)$$

中央点における軸方向の曲率は

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_0 = \left[3(1-\nu^2) \right]^{3/4} \frac{P}{Eh^2} \left(\frac{a}{h} \right)^{1/2} \frac{\sinh \alpha L + \sin \alpha L}{\cosh \alpha L + \cos \alpha L} + \frac{1}{2} \left[3(1-\nu^2) \right]^{1/4} \frac{n^3}{(n^2-1)^{1/2}} \frac{P}{Eh^2} \left(\frac{h}{a} \right)^{1/2} \frac{\sinh \beta L + \sin \beta L}{\cosh \beta L + \cos \beta L} \dots\dots\dots (81)$$

曲げモーメントおよび曲げ応力度は (66), (67) 式より容易に誘導出来る。

6. 結 論

上述するように鋼管桁橋の設計理論には円管桁としての諸研究者^{16)~21)}による曲げ理論、座屈理論などが用いられるが、基礎模型実験によっても明かなように、短い円管、長い円管によって実験値と理論値の差異に異った傾向を示すことがわかった。また変断面の円管桁においては更に複雑な応力分布を示すことが見出されたので、変断面円管桁の論析の研究が必要であると思う。

なお円管桁の曲げ理論には長い円管桁の曲げ理論による実用解式を用いればある荷重範囲 (きわめて荷重の小なる場合) を除けば、設計上それほどの支障は来さないものと模型実験結果より判断されるところである。

しかし厳密に云えば、長さを考慮した円管桁の曲げ理論の適用が必要であり、円周の周りの線荷重の影響を考慮した理論解析の応用が要求せられる。これにはすでに論述した H. R. Meck 氏の解析理論が適当ではないかと考える。

次に模型実験によっても明かなように管径の割合大きな

円管桁においては、支点部付近の圧座現象による横断面の変形と繊維応力度の吟味検討が特に必要のように思う。それには著者提案による計算方法が設計上幾分でも役立てば幸いである。

基礎模型実験については室蘭工業大学助手志村政雄、万代良夫の両氏のほか、同大学土木工学科の学生諸君の協力を得たことを心から感謝するとともに、本研究は文部省科学研究費交付金を受けたものなることを付し深く謝意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) 仲威雄・多田英之：鋼管構造の設計，3 (昭 38)，オーム社。
- 2) E. V. Rennenkampff：Der Bauingenieur 36, Heft 9, 337 (1961)。
- 3) 中村作太郎・須田勲：土木学会北海道支部技術資料，第 20 号，109 (昭 39-2)。
- 4) 伊藤鉦一・戸倉隆：土木技術，Vol. 17-9, 10, 11, 37 (昭 37-9)，38 (昭 37-10)，31 (昭 37-11)。
- 5) 坂井善勝：曲面構造，シエルの理論とその応用，261 (昭 40)，丸善 K.K..

- 6) 寺崎恒正訳： フリュージェ曲面板の力学, 130 (昭 29), コロナ社.
- 7) 横尾義貫他 3 名共訳： 円筒シャーレの設計, 110 (昭 33), 丸善 K.K..
- 8) S. Timoshenko: Thery of Plates and Shells, 389 (1940), McGraw-Hill.
- 9) K. Girkmann: Flächentragwerke, 466 (1963), Springer-Verlag.
- 10) 内田勝雄他 3 名： 土木学会論文集, 第 64 号, 10 (昭 34-9).
- 11) 松尾滋： 土木学会論文集, 第 75 号, 1 (昭 36-7).
- 12) 鷹部屋福平： 高級桁梁論, 218 (昭 4), 岩波書店.
- 13) 中村作太郎： 室蘭工業大学研究報告, 第 1 卷 5 号, 177 (昭 29-6).
- 14) 長柱研究委員会： 弾性安定要覧, 509 (昭 35), コロナ社.
- 15) 吉沢武男他 9 名： 機械材料の試験と検査, 77 (昭 31), 日本機械学会.
- 16) H. R. Meck: Journal of Applied Mechanics, Vol. 28, Ser. E. No. 1, 117 (1961-9).
- 17) Paul Seide: Journal of Applied Mechanics, Vol. 28, Ser. E. No. 1, 112 (1961-3).
- 18) Paul Seide, V. I. Weingarten: Journal of Applied Mechanics, Vol. 28, Ser. E. No. 1, 112 (1961-3).
- 19) B. O. Almroth: Journal of Applied Mechanics, Vol. 29, Ser. E. No. 4, 675 (1962-12).
- 20) В. Ф. Евмцихн: Строительная Механика и Расчет Сооружений, V, No. 1, 23 (1963-1).
- 21) W. S. Rumman: JOURNAL of the Proceeding of the American Society of Civil Edgineers, Structural Division, ST 8, 161 (1961-12).