

## 有限要素法による直角三角形板の解析について

正員 酒井 忠 明\*

正員 芳 村 仁\*\*

正員 ○奥 村 勇\*\*\*

### 要 旨

橋梁取付部の道路の擁壁には、直角三角形に類似した形を持つものがしばしば見られる。これを平板構造的にみると、一辺が固定で、斜辺と他の一辺が自由の周辺条件を持った直角三角形板の曲げの問題と考えることができる。筆者らは三角形要素を用いた有限要素法 (Finite Element Method) によりこの問題を解析したので発表したい。

### 1. 緒 言

有限要素法は二次元連続面、三次元連続体などの応力、弾性変形の解析において、その境界条件、荷重状態のいかににかかわらず対処できるので非常に有力な解析手段であり、最近特に注目されている。我国においても、長方形要素のそれについてはいくつかの論文がみられるが、三角形要素による板の曲げの解析例は少ないようである。

不規則な境界あるいは内部に孔を持った平板、任意に重なった曲率を持つ殻などの解析には、長方形要素によるより三角形要素による方が好都合であり、また三角形要素をもちいてこそ有限要素法の威力が充分に発揮されることと思われる。

三角形要素による板の曲げの研究は欧米においてもあまり多くない。早くには、R. W. Clough<sup>1)</sup>, J. L. Tocher<sup>2)</sup>らの研究があるが、いずれも解の収束性において問題があったようである。最近になって、R. T. Severn<sup>3)</sup> が板要素の応力分布を仮定して、直角三角形要素の stiffness matrix を導いており、また Clough と Tocher<sup>4)</sup>, O. C. Zienkiewicz と Y. K. Cheung<sup>5)</sup> らがそれぞれ三角形要素の新しい変形パターンを発表している。

本論文では三角形を用いた有限要素法の概要を示し、特に直角三角形の板要素について stiffness matrix を導いた。計算例として、一辺が固定で、斜辺と他の一辺が自由の直角三角形板が満載等分布荷重を受けた場合について、たわみと曲げモーメントを求めた。

### 2. 三角形板要素の変形

図-1に示した三角形1, 2, 3の面積を  $A$  とすると、 $A$  はそれぞれの頂点の座標によって次のように表わすことができる。

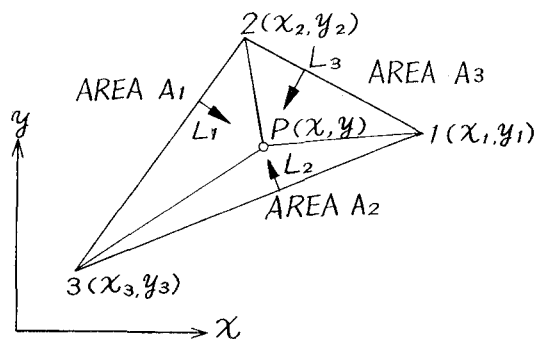


図-1

$$2A = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (1)$$

また  $L_1, L_2$  および  $L_3$  を次のように定義すると、

$$L_1 = A_1/A, \quad L_2 = A_2/A, \quad L_3 = A_3/A \quad (2)$$

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (3)$$

これらは  $x-y$  座標で次のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= (a_1 + b_1x + c_1y)/2A \\ L_2 &= (a_2 + b_2x + c_2y)/2A \\ L_3 &= (a_3 + b_3x + c_3y)/2A \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= x_2y_3 - x_3y_2 \\ b_1 &= y_2 - y_3 = y_{23} \\ c_1 &= x_3 - x_2 = x_{32} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

他の  $a_2, b_2, \dots$  については右下のサフィックス 1, 2, 3 を循環置換すると得られる。したがって、式(5)を  $x$  と  $y$  に

\* 北海道大学工学部教授 工博

\*\* 北海道大学工学部助教授 工博

\*\*\* 北海道大学工学部助手 工修

ついて解くと、図-1の三角形の任意点  $P$  の位置は次のように決められる。

$$\left. \begin{aligned} x &= L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3 \\ y &= L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ある形をした板を無数の小さな三角形の要素に分割し、その中の任意の要素を取りだして図-2に示す。図の板要

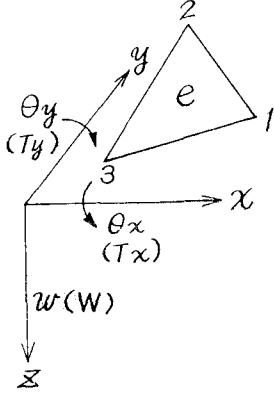


図-2

素  $e$  は9つの自由度 (三つの節点1, 2および3に、それぞれ、一つの垂直変位と二つの回転角) をもち、それらを次のように表わす。

$$\{\delta\}^e = [w_1, \theta_{x_1}, \theta_{y_1}, w_2, \theta_{x_2}, \theta_{y_2}, w_3, \theta_{x_3}, \theta_{y_3}]^T \quad (7)$$

ここで

$$\begin{aligned} (\theta_x)_i &= - \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{i,} & (\theta_y)_i &= - \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{i,} \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (8)$$

板要素  $e$  の剛体としての運動を  $w^R$  とすると、area coordinates  $L_1, L_2$  および  $L_3$  を用いて次のように表わすことができる。

$$w^R = w_1L_1 + w_2L_2 + w_3L_3 \quad (9)$$

したがって要素の相対的な垂直変位を  $w^*$  で表わすと、次のようになる。

$$w^* = w - w^R \quad (w: \text{絶対変位}) \quad (10)$$

$w^*$  は各節点で零となるから相対変位は6つの回転成分だけとなり次のようである。

$$\{\delta^*\}^e = [\theta_{x_1}^*, \theta_{y_1}^*, \theta_{x_2}^*, \theta_{y_2}^*, \theta_{x_3}^*, \theta_{y_3}^*]^T \quad (11)$$

ここで

$$\theta_x^* = - \frac{\partial w^*}{\partial y} = \theta_x + \frac{\partial w^R}{\partial y} \quad (12)$$

$$\theta_y^* = \frac{\partial w^*}{\partial x} = \theta_y - \frac{\partial w^R}{\partial x} \quad (13)$$

式(9)を式(12)および式(13)に代入して書き直すと次のようになる。

$$\theta_x^* = \theta_x + (c_1w_1 + c_2w_2 + c_3w_3)/2J \quad (14)$$

$$\theta_y^* = \theta_y - (b_1w_1 + b_2w_2 + b_3w_3)/2J \quad (15)$$

よって  $\{\delta\}^e$  と  $\{\delta^*\}^e$  の関係は次のように表わすことができる。

$$\{\delta^*\}^e = \mathbf{T} \{\delta\}^e \quad (16)$$

ここで  $\mathbf{T}$  は次のような  $6 \times 9$  の行列である。

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\frac{c_1}{2J} & 1 & 0 & -\frac{c_2}{2J} & 0 & 0 & \frac{c_3}{2J} & 0 & 0 \\ -\frac{b_1}{2J} & 0 & 1 & -\frac{b_2}{2J} & 0 & 0 & -\frac{b_3}{2J} & 0 & 0 \\ -\frac{c_1}{2J} & 0 & 0 & -\frac{c_2}{2J} & 0 & 0 & \frac{c_3}{2J} & 0 & 0 \\ -\frac{b_1}{2J} & 0 & 0 & -\frac{b_2}{2J} & 0 & 1 & -\frac{b_3}{2J} & 0 & 0 \\ -\frac{c_1}{2J} & 0 & 0 & -\frac{c_2}{2J} & 0 & 0 & \frac{c_3}{2J} & 1 & 0 \\ -\frac{b_1}{2J} & 0 & 0 & -\frac{b_2}{2J} & 0 & 0 & -\frac{b_3}{2J} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

相対垂直変位  $w^*$  を  $\{\delta^*\}^e$  の6つの変位成分を用いて次のように表わす。

$$\begin{aligned} w^* &= F_{x_1}\theta_{x_1}^* + F_{y_1}\theta_{y_1}^* + F_{x_2}\theta_{x_2}^* + F_{y_2}\theta_{y_2}^* \\ &\quad + F_{x_3}\theta_{x_3}^* + F_{y_3}\theta_{y_3}^* \end{aligned} \quad (18)$$

ここで  $F$  は 'shape function' とよばれるものである。例えば  $F_{x_1}$  については節点で次のような条件

$$\text{すべての節点で} \quad F_{x_1} = \frac{\partial F_{x_1}}{\partial x} = 0$$

$$\text{節点2と節点3で} \quad \frac{\partial F_{x_1}}{\partial y} = 0$$

$$\text{または節点1で} \quad \frac{\partial F_{x_1}}{\partial y} = -1$$

を満足するようなある関数であり、area coordinates により次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} F_{x_1} &= y_{12} \left( L_1^2 L_2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) \\ &\quad + y_{13} \left( L_1^2 L_3 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} F_{y_1} &= x_{21} \left( L_1^2 L_2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) \\ &\quad + x_{31} \left( L_1^2 L_3 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) \end{aligned} \quad (20)$$

他の関数  $F_{x_2}, F_{y_2}, \dots$  も同様にして得られる。

### 3. STIFFNESS AND STRESS MATRICES

#### (1) 一般の三角形要素について

板要素の任意点における曲率とねじり率を次のように表わす。

$$\chi = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \{\delta^*\}^e \quad (21)$$

ここで  $\mathbf{B}$  は任意点の  $x, y$  の座標を含んだ  $3 \times 6$  の行列である。

曲げモーメントおよびねじりモーメントは平板の理論により、直交異方性板に対しては、

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{D} \chi \quad (22)$$

等方性板の場合には

$$D_x = D_y = D, \quad D_1 = \nu D, \quad D_{xy} = 0.5(1-\nu)D$$

とする。

今おのおのの節点の相対変位  $(\delta^*)^e$  に対応した外力を  $T_{x_1}, T_{y_1}, T_{x_2}, \dots$  とすると、板要素に作用する外力は次のように表わせる。

$$\mathbf{F}^* = [T_{x_1}, T_{y_1}, T_{x_2}, T_{y_2}, T_{x_3}, T_{y_3}]^T \quad (23)$$

仮想変位を

$$(\delta^*)^e_{\text{virtual}} = \mathbf{I} \quad (\mathbf{I}: \text{単位行列})$$

とおくと外力による仮想仕事  $W_E$  は

$$W_E = (\delta^*)^e_{\text{virtual}} \mathbf{F}^* = \mathbf{I} \mathbf{F}^* = \mathbf{F}^* \quad (24)$$

となる。一方モーメント  $M$  と仮想変位  $(\chi)_{\text{virtual}}$  とによる内部仕事  $W_I$  は次式となる。

$$W_I = \iint (\chi)_{\text{virtual}}^T \mathbf{M} dx dy \quad (25)$$

ここで

$$(\chi)_{\text{virtual}} = \mathbf{B} (\delta^*)^e_{\text{virtual}} = \mathbf{B} \mathbf{I} = \mathbf{B} \quad (26)$$

これらの仕事等しいこと、すなわち、 $W_E = W_I$  より外力と変位の関係が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^* &= \iint \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} (\delta^*)^e dx dy \\ &= \left[ \iint \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy \right] (\delta^*)^e = \mathbf{k}^* (\delta^*)^e \end{aligned} \quad (27)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{ab} \begin{pmatrix} p^{-2}y & 4-6x-3y & p^{-2}y & 2-6x-2y & 2p^{-2}y & y \\ 6y+3x-4 & -p^2x & -x & -2p^2x & 6y+2x-2 & -p^2x \\ p^{-1}(3-2x-6y) & p(2y+6x-3) & p^{-1}(2y-2x+1) & p(4x+4y-2) & p^{-1}(2-4x-4y) & p(2y-2x+1) \end{pmatrix} \quad (35)$$

ここで  $p=a/b$ 、また簡単のために  $x$  と  $y$  はそれぞれ  $x/a$  と  $y/b$  を表わすものとする。

次に式(28)より  $\mathbf{k}^*$  は次のように得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^* &= \int_0^1 \int_0^{1-y} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy \\ &= \frac{1}{12ab} \left[ D_x \mathbf{k}_1^* + D_y \mathbf{k}_2^* + D_{xy} \mathbf{k}_3^* + D_1 \mathbf{k}_4^* \right] \end{aligned} \quad (36)$$

したがって式(31)より stiffness matrix  $\mathbf{K}$  は次のように得られる。

9つの成分をもった絶対変位  $(\delta)^e$  に対応する外力を次のように表わすと、

$$\mathbf{F} = [W_1, T_{x_1}, T_{y_1}, W_2, \dots]^T \quad (28)$$

外力  $\mathbf{F}$  と式(23)の外力  $\mathbf{F}^*$  とのなす仕事等しいことにより次式が得られる。

$$(\delta^*)^e_{\text{virtual}} \mathbf{F}^* = (\delta)^e \mathbf{F} \quad (29)$$

よって式(16)と式(27)より

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}^* \mathbf{T} (\delta^*)^e = \mathbf{K} (\delta)^e \quad (30)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}^* \mathbf{T} \quad (31)$$

となる。ここに  $\mathbf{K}$  は三角形の板要素  $e$  の stiffness matrix である。

また式(21)と式(22)からモーメントは次式のようになる。

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} \chi = \mathbf{D} \mathbf{B} (\delta^*)^e = \mathbf{s}^* (\delta^*)^e \quad (32)$$

ここで  $\mathbf{s}^*$  は  $9 \times 6$  の行列である。上式を  $(\delta)^e$  で表わすと、

$$\mathbf{M} = \mathbf{s}^* (\delta^*)^e = \mathbf{s}^* \mathbf{T} (\delta)^e = \mathbf{E} (\delta)^e \quad (33)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{s}^* \mathbf{T} (\delta)^e \quad (34)$$

となる。ここで  $\mathbf{E}$  は曲げモーメントおよびねじりモーメントの計算にもちいる  $9 \times 9$  の stress matrix である。

## (2) 直角三角形要素について

図-3に示された直角三角形の板要素  $e$  の各節点の座標

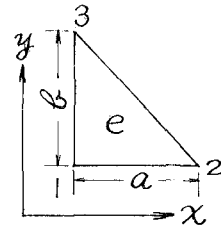


図-3

を用いて、式(18)の shape function  $F_{x_1}, F_{x_2}, \dots$  を  $x$  と  $y$  の多項式に展開して、式(21)の  $\mathbf{B}$  を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{K} (\delta)^e = \frac{1}{12ab} \left[ D_x \mathbf{K}_1 + D_y \mathbf{K}_2 + D_{xy} \mathbf{K}_3 \right. \\ &\quad \left. + D_1 \mathbf{K}_4 \right] (\delta)^e \end{aligned} \quad (37)$$

ここで  $\mathbf{F} = [W_1, T_{x_1}/a, T_{y_1}/b, \dots]^T$

$$(\delta)^e = [w_1, a\theta_{x_1}, b\theta_{y_1}, \dots]^T$$

同様に、曲げモーメントおよびねじりモーメントを求める stress matrix  $\mathbf{E}$  は式(34)より次のように得られる。

$$\mathbf{M} = \frac{1}{ab} \mathbf{E} (\delta)^e \quad (38)$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 40p^{-2} & & & & & & & & & \\ -2p^{-3} & p^{-4} & & & & & & & & \\ 14p^{-1} & 2p^{-2} & 15 & & & & & & & \\ -32p^{-2} & -2p^{-3} & -22p^{-1} & 40p^{-2} & & & & & & \\ -2p^{-3} & p^{-4} & 2p^{-2} & -2p^{-3} & p^{-4} & & & & & \\ 20p^{-1} & -p^{-2} & 5 & -16p^{-1} & -p^{-2} & 12 & & & & \\ -8p^{-2} & 4p^{-3} & 8p^{-1} & -8p^{-2} & 4p^{-3} & -4p^{-1} & 16p^{-2} & & & \\ -4p^{-3} & 2p^{-4} & 4p^{-2} & -4p^{-3} & 2p^{-4} & -2p^{-2} & 8p^{-3} & 4p^{-4} & & \\ -2p^{-1} & p^{-2} & 2 & -2p^{-1} & p^{-2} & -1 & 4p^{-1} & 2p^{-2} & 1 & \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Symetrical} \\ p = \frac{a}{b} \end{matrix}$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 40p^2 & & & & & & & & & \\ -14p & 15 & & & & & & & & \\ 2p^3 & 2p^2 & p^4 & & & & & & & \\ -8p^2 & -8p & -4p^3 & 16p^2 & & & & & & \\ 2p & 2 & p^2 & -4p & 1 & & & & & \\ 4p^3 & 4p^2 & 2p^4 & -8p^3 & 2p^2 & 4p^4 & & & & \\ -32p^2 & 22p & 2p^3 & -8p^2 & 2p & 4p^3 & 40p^2 & & & \\ -20p & 5 & -p^2 & 4p & -1 & -2p^2 & 16p & 12 & & \\ 2p^3 & 2p^2 & p^4 & -4p^3 & p^2 & 2p^4 & 2p^3 & -p^2 & p^4 & \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Symetrical} \\ p = \frac{a}{b} \end{matrix}$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} 128 & & & & & & & & & \\ -16p^{-1} & 10p^{-2} & & & & & & & & \\ 16p & -2 & 10p^2 & & & & & & & \\ -64 & 8p^{-1} & -8p & 32 & & & & & & \\ -16p^{-1} & -6p^{-2} & -2 & 8p^{-1} & 10p^{-2} & & & & & \\ 32p & -4 & 4p^2 & -16p & -4 & 8p^2 & & & & \\ -64 & 8p^{-1} & -8p & 32 & 8p^{-1} & -16p^2 & 32 & & & \\ -32p^{-1} & 4p^{-2} & -4 & 16p^{-1} & 4p^{-2} & -8 & 16p^{-1} & 8p^{-2} & & \\ 16p & -2 & -6p^2 & -8p & -2 & 4p^2 & -8p & -4 & 10p^2 & \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Symetrical} \\ p = \frac{a}{b} \end{matrix}$$

$$K_4 = \begin{pmatrix} 64 & & & & & & & & & \\ -12p^{-1} & -p^{-2} & & & & & & & & \\ 12p & -11 & -p^2 & & & & & & & \\ -32 & 12p^{-1} & 0 & 16 & & & & & & \\ 0 & -p^{-2} & -1 & 0 & -p^{-2} & & & & & \\ 20p & 0 & 2p^2 & -16p & 2 & 12p^2 & & & & \\ -32 & 0 & -12p & 16 & 0 & -4p & 16 & & & \\ -20p^{-1} & 2p^{-2} & 0 & 4p^{-1} & 2p^{-2} & -6 & 16p^{-1} & 12p^{-2} & & \\ 0 & -1 & -p^2 & 0 & -1 & 2p^2 & 0 & 2 & -p^2 & \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Symetrical} \\ p = \frac{a}{b} \end{matrix}$$

$E =$

$$\begin{pmatrix} 6pD_1+6p^{-1}D_x & -4D_1 & 4D_x & -6p^{-1}D_x & 0 & 2D_x & -6pD_1 & -2D_1 & 0 \\ 6p^{-1}D_1+6pD_y & -4D_y & 4D_1 & -6p^{-1}D_1 & 0 & 2D_1 & -6pD_y & -2D_y & 0 \\ -8D_{xy} & 3p^{-1}D_{xy} & -3pD_{xy} & 4D_{xy} & -p^{-1}D_{xy} & -2pD_{xy} & 4D_{xy} & 2p^{-1}D_{xy} & pD_{xy} \\ -2pD_1-6p^{-1}D_x & -D_1 & -2D_x-p^2D_1 & 4pD_1+6p^{-1}D_x & -D_1 & -4D_x-2p^2D_1 & -2pD_1 & 0 & -p^2D_1 \\ -6p^{-1}D_1-2pD_y & -D_y & -2D_1-p^2D_y & 6p^{-1}D_1+4pD_y & -D_y & -4D_1-2p^2D_y & -2pD_y & 0 & -p^2D_y \\ 8D_{xy} & p^{-1}D_{xy} & 3pD_{xy} & -4D_{xy} & -3p^{-1}D_{xy} & 2pD_{xy} & -4D_{xy} & -2p^{-1}D_{xy} & -pD_{xy} \\ -6pD_1-2p^{-1}D_x & p^{-2}D_x+2D_1 & D_x & -2p^{-1}D_x & p^{-2}D_x & 0 & 6pD_1+4p^{-1}D_x & 2p^{-2}D_x+4D_1 & D_x \\ -2p^{-1}D_1-6pD_y & p^{-2}D_1+2D_y & D_1 & -2p^{-1}D_1 & p^{-2}D_1 & 0 & 4p^{-1}D_1+6pD_y & 2p^{-2}D_1+4D_y & D_1 \\ 8D_{xy} & -3p^{-1}D_{xy} & -pD_{xy} & -4D_{xy} & p^{-1}D_{xy} & 2pD_{xy} & -4D_{xy} & -2p^{-1}D_{xy} & 3pD_{xy} \end{pmatrix}$$

## 5. 計算例

図-4 に示したような周辺条件を持った一辺の長さが  $\ell$  の直角三角形板が満載等分布荷重を受けた場合について、 $8 \times 8$  分割の三角網目をもちいてたわみ  $w$  と曲げモーメント  $M_x, M_y$  を求めたので、その結果を図-5、図-6 および図-7 にそれぞれ示す。

板は等方性と考え、またポアソン比  $\nu=0$  として、 $D_x=D_y=D$ ,  $D_{xy}=0.5D$  として計算した。なお結果の各図において  $\text{——}$  は固定辺、 $\text{---}$  は自由辺を表わすものとする。

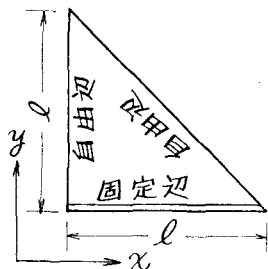


図-4

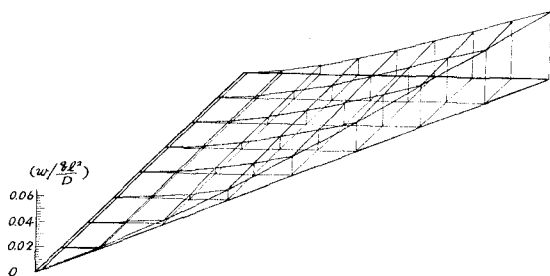


図-5 Surface of Deflection  $w$

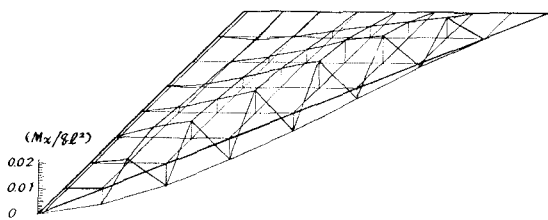


図-6 Surface of Bending Moment  $M_x$

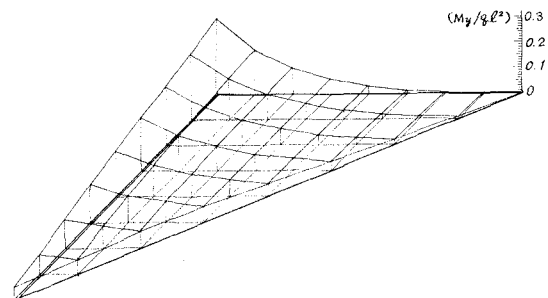


図-7 Surface of Bending Moment  $M_y$

## 6. 結 語

平板、殻などの有力な解法の一つとして、この有限要素法の他に有限差分法があげられる。前者が構造物の力と変形を考えた物理的近似であるのに対し、後者は微分方程式の差分による数学的近似であるので、両者は本質的には異なっているが、どちらも多元連立一次方程式の計算に帰着することでは一致している。連立一次方程式の元数について考えると、有限要素法では一つの節点に未知量が三つあるので、周辺を除いた節点については差分法による場合より節点数の2倍だけ元数が多くなる。一方精度の面では、板の周辺条件により多少異なるが大差はない。また断面力の算出の点などから考えると、長方形要素による有限要素法で解くような場合には、差分法による方が有利であるように思われる。

三角形要素による有限要素法はその応用範囲を非常に広くするものであるが、精度の点および断面力の不連続の大小の点において、長方形要素による場合より不利なことを筆者らは周辺固定の正方形板を解いて確めた。

多元連立一次方程式の計算には、大容量高速電子計算機が必要であるが、有限要素法によった場合にできる連立一次方程式の係数行列には零要素が多いので、その零要素をもちいないで方程式を解くようなプログラムを工夫すると小中型電子計算機においても充分満足すべき結果が得られると考えられる。

終りに数値計算を行なうにあたり、電子計算機のプログラミングにご助言をいただいた北大計算センターの江丸氏に感謝する次第です。

## 参 考 文 献

- 1) R. W. Clough: The finite element in structural mechanics, "Stress Analysis", 1965.
- 2) J. L. Tocher: Analysis of plate bending using triangular elements, 1962.
- 3) R. T. Severn, P. R. Taylor: The finite element method for flexure of slabs when stress distributions are assumed, 1966.
- 4) R. W. Clough, J. L. Tocher: Finite element stiffness matrices for analysis of plate bending, 1965.
- 5) O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung: Finite element-displacement approach, 1966.
- 6) O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung: The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs, 1964.
- 7) S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger: "Theory of plates and shells", 1959.