

フーリエ級数による連続曲線桁の解析

正員 薄木 征三*

1. ま え が き

薄肉曲線材に関する弾性方程式にもとづき、任意径間、全径間一定断面の連続曲線桁を、フーリエ級数を用いて解析した。

連続曲線桁の解法には種々の方法があるが、フーリエ級数による解法も目新しいものではなく、単純ねじりのみを考慮した場合については既に解が与えられている。本文は曲げねじりを考慮し、中間支点に未知垂直集中荷重とねじりモーメント（共にせん断中心に作用する）を作用せしめ、これを Dirac の Delta 関数で表示し、通常の連続桁の支点条件、即ち、ねじれ回転不能、沈下なしの条件を満たすようと未知反力を決定した。未知反力が知れば、曲線桁の変形、及び断面力は容易に知る事ができる。

最近の様に電子計算機が普及している時点では、級数計算は比較的容易である。手計算では、級数の10項まで計算するのは1項計算するのより10倍の労力を必要とするであろうが、級数の第 n 項が n の一般式で表わされる様な場合には、電子計算機に依れば、例えば100項計算させるプログラムを作成するのは例えば10項計算させるプログラムを作成するのと同じ労力ですむから、級数による解法は、十分実用性を持つと言えるだろう。

なお本文に引用している一般断面薄肉曲線材に関する基礎理論は文献1)を基にしている。

2. 座 標 系 (図-1)

以下の解析で使用する座標系を列記する¹⁾。

① 円柱座標系 ($O'-r, \theta, \zeta$)；変形前の曲線材中立軸¹⁾の曲率中心 O' を原点として、 $\rho-\theta$ 平面は曲線材の曲率面に一致している。変形前の全ての母線の曲率中心が集まる曲率中心線は ζ 軸に一致する事になる。

② 右手系座標系 ($O-x, y, z$)、($S-x^*, y^*, z^*$)；前者は断面の中立点¹⁾を原点とし、 x 軸が変形前の状態で①の ζ 軸に平行な座標系後者は前者をせん断中心 S へ平行移動した座標系。 R_0, R_s はそれぞれ中立点、せん断中心の曲率半径である。

断面上のせん断中心 S を通る軸線の変形は、 x, y, z 方向への変位とねじれ回転角によって表わし、それぞれ u, v, w, φ で表わす。 φ の符号は θ の正の方向に向かって右まわりを正とする。

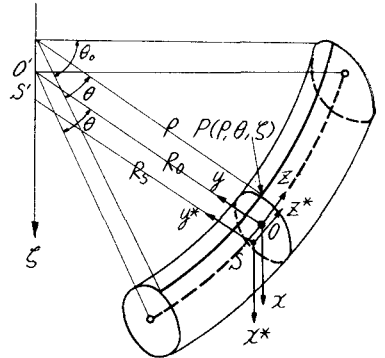


図-1

3. 一般断面薄肉曲線材の弾性方程式

曲線材に作用する任意な外力を、せん断中心を通る軸線の単位長さあたりに作用する次の様な力が表わす。

q_x^*, q_y^*, q_z^* = 作用線がそれぞれ x^*, y^*, z^* 軸に一致する荷重 (q_x^* は垂直荷重, q_y^*, q_z^* は曲率面内荷重)。

m_x^*, m_y^*, m_z^* = それぞれ x^*, y^*, z^* 軸のまわりのモーメント荷重 (m_x^*, m_y^* は曲げモーメント荷重, m_z^* はねじりモーメント荷重)。

m_w^* = せん断中心に関する曲げねじれモーメント荷重。

せん断中心 S の変形で表わした弾性方程式は、 u, v, w, φ に関する四元連立微分方程式として与えられるが、曲率面内の作用荷重のない場合、即ち、 $q_y^* = q_z^* = m_x^* = 0$ の場合は、曲率面の変形、 u, φ に関する弾性方程式は次のようになる¹⁾ (dash は θ についての微分を表わす)。

$$\left(\frac{R_s}{R_0} E \bar{J}_y + \frac{E C_w^*}{R_s^2} \right) u'''' - G J_T^* u'' - \frac{E C_w^*}{R_s} \varphi'''' + \left(G J_T^* + \frac{R_s}{R_0} E \bar{J}_y \right) R_s \varphi'' = R_s^4 q_x^* - R_s^3 m_y^{*'} + R_s^2 m_w^{*'} \quad (1)$$

* 北海道大学工学部土木科 助手

$$-\frac{EC_{w0}^*}{R_s^2} u'''' + \left(GJ_T^* + \frac{R_s}{R_0} E\bar{J}_y \right) u'' + \frac{EC_{w0}^*}{R_s} \varphi'''' - GJ_T^* R_s \varphi'' + \frac{R_s}{R_0} E\bar{J}_y R_s \varphi = R_s^3 m_z^* - R_s^2 m_w^* \quad (2)$$

ここに $E\bar{J}_y$, EC_{w0}^* , GJ_T^* はそれぞれ, 曲げ剛性, 曲げねじれ剛性, ねじれ剛性である。厳密理論によれば, $\bar{J}_y$, C_{w0}^* , J_T^* (それぞれ直線材の断面二次モーメント, 曲げねじれ定数, ねじれ定数に相当する) は, 曲線材の横断面形状のみならず, 曲率半径 ρ の影響が入ってくる。詳しくは文献1) を参考にせられたい。

4. 連続曲線材への応用

(1), (2) に $1/GJ_T^*$ を乗じ

$$k = \frac{R_s}{R_0} \frac{E\bar{J}_y}{GJ_T^*}, \quad \lambda^2 = \frac{GJ_T^*}{EC_{w0}^*} R_s^2$$

とすると, 式 (1), (2) はそれぞれ

$$\left(k + \frac{1}{\lambda^2} \right) u'''' - u'' - \frac{R_s}{\lambda^2} \varphi'''' + (1+k) R_s \varphi'' = \frac{1}{GJ_T^*} (R_s^4 q_z^* - R_s^3 m_y^* + R_s^2 m_w^*) \quad (3)$$

$$-\frac{1}{\lambda^2} u'''' + (1+k) u'' + \frac{R_s}{\lambda^2} \varphi'''' - R_s \varphi'' + k R_s \varphi = \frac{1}{GJ_T^*} (R_s^3 m_z^* - R_s^2 m_w^*) \quad (4)$$

ねじれ回転不能で交点沈下がない m 個の中間交点 (両端交点も同じ条件) を有する連続曲線材を考える (図-2)。 $p(\theta)$, $m_T(\theta)$ をそれぞれせん断中心軸の単位長さあたりに作用する既知垂直荷重, ねじりモーメント荷重とし, 取り出した中間交点上のせん断中心に未知垂直荷重 X_r , ねじりモーメント荷重 T_r ($r=1, 2, \dots, m$) を作用せしめ, これを上記の条件を満たすように決定する事を考える。

従って式 (3), (4) の右辺荷重項は

$$m_y^* = m_w^* = 0$$

q_z^* , q_z^* は通常これをフーリエ級数展開するのであるが, Dirac の Delta 関数を用いれば, 次の様に表わされる。

$$q_z^* = p(\theta) + \frac{1}{R_s} \sum_{r=1}^m X_r \delta(\theta - w_r)$$

$$m_T^* = m_T(\theta) + \frac{1}{R_s} \sum_{r=1}^m T_r \delta(\theta - w_r)$$

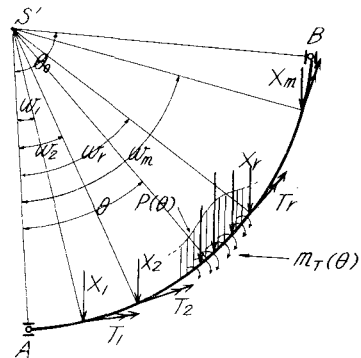


図-2

これらを式 (3), (4) に代入し, u , φ 及びそれらの微係数が区分的に連続であるとして, 両辺に有限 Fourier Sine 変換を行なう。 $u(\theta)$, $\varphi(\theta)$ の変換をそれぞれ $S\{u(\theta)\}$, $S\{\varphi(\theta)\}$ の記号で表わすと $\beta = n\pi/\theta_0$ ($n=1, 2, \dots$) として

$$\left. \begin{aligned} S\{u(\theta)\} &= \int_0^{\theta_0} u(\theta) \sin \beta \theta d\theta \equiv u_s(\beta) \\ S\{\varphi(\theta)\} &= \int_0^{\theta_0} \varphi(\theta) \sin \beta \theta d\theta \equiv \varphi_s(\beta) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$u(\theta)$, $\varphi(\theta)$ の偶数次の微係数に対する変換は, 両端単純支持の場合は

$$u(0) = u(\theta_0) = u''(0) = u''(\theta_0) = 0$$

$$\varphi(0) = \varphi(\theta_0) = \varphi''(0) = \varphi''(\theta_0) = 0$$

であるから, 式 (5) を用いて

$$\left. \begin{aligned} S\{u''''(\theta)\} &= \beta^4 u_s(\beta), & S\{u''(\theta)\} &= -\beta^2 u_s(\beta) \\ S\{\varphi''''(\theta)\} &= \beta^4 \varphi_s(\beta), & S\{\varphi''(\theta)\} &= -\beta^2 \varphi_s(\beta) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

又右辺既知荷重項に対する変換は

$$\begin{aligned} S\{q_z^*(\theta)\} &= \int_0^{\theta_0} p(\theta) \sin \beta \theta d\theta + \frac{1}{R_s} \int_0^{\theta_0} \left[\sum_{r=1}^m X_r \delta(\theta - w_r) \right] \sin \beta \theta d\theta \\ &= p_s(\beta) + \frac{1}{R_s} \sum_{r=1}^m X_r \sin \beta w_r \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
S\{m_z^*(\theta)\} &= \int_0^{\theta_0} m_T(\theta) \sin \beta \theta d\theta + \frac{1}{R_s} \int_0^{\theta_0} \left[T_r \delta(\theta - w_r) \right] \sin \beta \theta d\theta \\
&= m_s(\beta) + \frac{1}{R_s} \sum_{r=1}^m T_r \sin \beta w_r
\end{aligned} \tag{8}$$

(7), (8) で $p_s(\beta)$, $m_s(\beta)$ はそれぞれ $p(\theta)$, $m_T(\theta)$ を有限 Fourier Sine 変換したものである。

(5), (6), (7), (8) により式 (3), (4) を変換した結果を整理して書くと

$$\left(\left(k + \frac{1}{\lambda^2} \right) \beta^2 + 1 \right) \beta^2 u_s(\beta) - R_s \beta^2 \left(\frac{\beta^2}{\lambda^2} + k + 1 \right) \varphi_s(\beta) = \frac{R_s^3}{G J_T^*} \left(R_s p_s(\beta) + \sum_{r=1}^m X_r \sin \beta w_r \right) \tag{9}$$

$$-\left(\frac{\beta^2}{\lambda^2} + k + 1 \right) \beta^2 u_s(\beta) + \left(\frac{\beta^4}{\lambda^2} + \beta^2 + k \right) R_s \varphi_s(\beta) = \frac{R_s^2}{G J_T^*} \left(R_s m_s(\beta) + \sum_{r=1}^m T_r \sin \beta w_r \right) \tag{10}$$

となる。

式 (9), (10) は $u_s(\beta)$, $\varphi_s(\beta)$ に関する二元連立方程式であるからこれを解くと

$$u_s(\beta) = \frac{R_s^3}{k G J_T^*} K_3(\beta) \left(R_s p_s(\beta) + \sum_{r=1}^m X_r \sin \beta w_r \right) + \frac{R_s^2}{k G J_T^*} K_1(\beta) \left(R_s m_s(\beta) + \sum_{r=1}^m T_r \sin \beta w_r \right) \tag{10}$$

$$\varphi_s(\beta) = \frac{R_s^2}{k G J_T^*} K_1(\beta) \left(R_s p_s(\beta) + \sum_{r=1}^m X_r \sin \beta w_r \right) + \frac{R_s}{k G J_T^*} K_2(\beta) \left(R_s m_s(\beta) + \sum_{r=1}^m T_r \sin \beta w_r \right) \tag{11}$$

となる。ここに

$$\left. \begin{aligned} K_1(\beta) &= \frac{\beta^2/\lambda^2 + k + 1}{(\beta^2/\lambda^2 + 1)(\beta^2 - 1)^2} \\ K_2(\beta) &= \frac{(1/\lambda^2 + k) \beta^2 + 1}{(\beta^2/\lambda^2 + 1)(\beta^2 - 1)^2} \\ K_3(\beta) &= \frac{\beta^4/\lambda^2 + \beta^2 + k}{(\beta^2/\lambda^2 + 1)(\beta^2 - 1)^2 \beta^2} \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

である。式 (10), (11) より $u(\theta)$, $\varphi(\theta)$ はそれらの逆変換として、未知反力 X_r , T_r を含んだ形で得られる。

$$\begin{aligned} u(\theta) &= \frac{2}{\theta_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_s(\beta) \sin \beta \theta \\ &= \frac{\alpha R_s^3}{k G J_T^*} \sum_{n=1}^{\infty} \left[R_s K_3(\beta) \left(R_s p_s(\beta) + \sum_{r=1}^m X_r \sin \beta w_r \right) + K_1(\beta) \left(R_s m_s(\beta) + \sum_{r=1}^m T_r \sin \beta w_r \right) \right] \sin \beta \theta \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &= \frac{2}{\theta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_s(\beta) \sin \beta \theta \\ &= \frac{\alpha R_s}{k G J_T^*} \sum_{n=1}^{\infty} \left[R_s K_1(\beta) \left(R_s p_s(\beta) + \sum_{r=1}^m X_r \sin \beta w_r \right) + K_2(\beta) \left(R_s m_s(\beta) + \sum_{r=1}^m T_r \sin \beta w_r \right) \right] \sin \beta \theta \end{aligned} \tag{14}$$

ここに $\alpha \equiv 2/\theta_0$ である。

ここで式 (13) を項別に分解して出てくる級数

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha R_s^4}{k G J_T^*} \sum_{n=1}^{\infty} K_3(\beta) p_s(\beta) \sin \beta \theta \\ &\frac{\alpha R_s^3}{k G J_T^*} X_r \sum_{n=1}^{\infty} K_3(\beta) \sin \beta w_r \sin \beta \theta \quad (r=1, 2, \dots, m) \\ &\frac{\alpha R_s^3}{k G J_T^*} \sum_{n=1}^{\infty} K_1(\beta) m_s(\beta) \sin \beta \theta \\ &\frac{\alpha R_s^2}{k G J_T^*} T_r \sum_{n=1}^{\infty} K_1(\beta) \sin \beta w_r \sin \beta \theta \quad (r=1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

はそれぞれ $p(\theta)$, X_r , $m_T(\theta)$, T_r が単独に両端単純支持曲線桁に作用した時のたわみ曲線を表わしている。従ってこれらは収束級数であると考えるのは合理的である (割合するが実際これらの級数が収束する事が証明できる)。よって級数論の教えるところにより式 (13) は

$$u(\theta) = \frac{\alpha R_s^3}{k G J_T^*} \left[R_s^2 \sum_{n=1}^{\infty} K_3(\beta) p_s(\beta) \sin \beta \theta + R_s \sum_{r=1}^m \left(X_r \sum_{n=1}^{\infty} K_3(\beta) \sin \beta w_r \sin \beta \theta \right) \right]$$

$$+R_s \sum_{n=1}^{\infty} K_1(\beta) m_s(\beta) \sin \beta \theta + \sum_{r=1}^m \left(T_r \sum_{n=1}^{\infty} K_1(\beta) \sin \beta w_r \sin \beta \theta \right) \quad (15)$$

ねじれ角 $\varphi(\theta)$ についても同様に

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) = & \frac{\alpha R_s}{kGJ_T^*} \left[R_s^2 \sum_{n=1}^{\infty} K_1(\beta) p_s(\beta) \sin \beta \theta + R_s \sum_{r=1}^m \left(X_r \sum_{n=1}^{\infty} K_1(\beta) \sin \beta w_r \sin \beta \theta \right) \right. \\ & \left. + R_s \sum_{r=1}^m K_2(\beta) m_s(\beta) \sin \beta \theta + \sum_{r=1}^m \left(T_r \sum_{n=1}^{\infty} K_2(\beta) \sin \beta w_r \sin \beta \theta \right) \right] \quad (16) \end{aligned}$$

さて連続桁の支点条件は

$$u(w_i) = \varphi(w_i) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

式 (15) より $u(w_i)=0$ をつくり、既知荷重項を右辺へ移行しして両辺に $kGJ_T^*/\alpha R_s$ を乗じれば、

$$\begin{aligned} R_s^2 \sum_{r=1}^m \left(X_r \sum_{n=1}^{\infty} K_3(\beta) \sin \beta w_r \sin \beta w_i \right) + R_s \sum_{r=1}^m \left(T_r \sum_{n=1}^{\infty} K_1(\beta) \sin \beta w_r \sin \beta w_i \right) \\ = -R_s^2 \sum_{n=1}^{\infty} K_3(\beta) p_s(\beta) \sin \beta w_i - R_s^2 \sum_{n=1}^{\infty} K_1(\beta) m_s(\beta) \sin \beta w_i \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (17) \end{aligned}$$

同様に $\varphi(w_i)=0$ として、両辺に $kGJ_T^*/\alpha R_s$ を乗じれば

$$\begin{aligned} R_s \sum_{r=1}^m \left(X_r \sum_{n=1}^{\infty} K_1(\beta) \sin \beta w_r \sin \beta w_i \right) + \sum_{r=1}^m \left(T_r \sum_{n=1}^{\infty} K_2(\beta) \sin \beta w_r \sin \beta w_i \right) \\ = -R_s^2 \sum_{n=1}^{\infty} K_1(\beta) p_s(\beta) \sin \beta w_i - R_s \sum_{r=1}^m K_2(\beta) m_s(\beta) \sin \beta w_i \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (18) \end{aligned}$$

これらの X_r, T_r ($r=1, 2, \dots, m$) に関する $2m$ 元連立方程式を解けば未知垂直力 X_r 、未知ねじりモーメント T_r が求まる。式 (17), (18) を行列表示すると

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1 \cdot 2m} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{2m \cdot 1} & \dots & \dots & a_{2m \cdot 2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{2m} \end{pmatrix} = R_s \cdot \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{2m \cdot 0} \end{pmatrix} \quad (19)$$

の形になる (便宜上 $T_1, T_2, \dots, T_m$ を $X_{m+1}, X_{m+2}, \dots, X_{2m}$ と書き換えた)。これは両端単純支持曲線桁を基本系とした場合の仕事方程式に相当する。左辺の行列要素を a_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, 2m$) とすると、

1) $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m$ では

$$a_{ij} = R_s^2 \sum_{n=1}^{\infty} K_3(\beta) \sin \beta w_i \sin w_j$$

2) $1 \leq i \leq m, (m+1) \leq j \leq 2m$ では

$$a_{ij} = R_s \sum_{n=1}^{\infty} K_1(\beta) \sin \beta w_i \sin w_{j-m}$$

3) $(m+1) \leq i \leq 2m, 1 \leq j \leq m$ では

$$a_{ij} = R_s \sum_{n=1}^{\infty} K_1(\beta) \sin \beta w_{i-m} \sin \beta w_j$$

4) $(m+1) \leq i \leq 2m, (m+1) \leq j \leq 2m$ では

$$a_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} K_2(\beta) \sin \beta w_{i-m} \sin \beta w_{j-m}$$

1), 2), 3), 4) に属する m 元正交行列をそれぞれ A_1, A_2, A_3, A_4 とすると上の結果から A_1, A_2, A_3, A_4 はいずれも対称行列であり、かつ $A_2=A_3$ である事がわかる。これは力学的には相反法則から当然の事である。

左辺の荷重項は

1) $1 \leq i \leq m$ では

$$a_{i0} = -R_s^2 \sum_{n=1}^{\infty} K_3(\beta) p_s(\beta) \sin \beta w_i - R_s \sum_{n=1}^{\infty} K_1(\beta) m_s(\beta) \sin \beta w_i$$

2) $(m+1) \leq i \leq 2m$ では

$$a_{i0} = -R_s \sum_{n=1}^{\infty} K_1(\beta) p_s(\beta) \sin \beta w_{i-m} - \sum_{n=1}^{\infty} K_2(\beta) m_s(\beta) \sin \beta w_{i-m}$$

となる。

以上により X_r, T_r は決定される。 X_r, T_r が求まれば式 (13), (14) によりたわみ $u(\theta)$, ねじれ角 $\varphi(\theta)$ も求まる。

5. 既知外力 $p(\theta), m_T(\theta)$ について

代表的外力として、集中荷重と等分布荷重を考える。

1) $\theta = \rho$ 点に集中垂直荷重 P と集中ねじりモーメント荷重 T (いずれもせん断中心に作用する) が作用している時は、 X_r, T_r と同様に

$$p(\theta) = \frac{1}{R_s} P \delta(\theta - \rho), \quad m_T(\theta) = \frac{1}{R_s} T \delta(\theta - \rho)$$

従って

$$p_s(\beta) = \frac{P}{R_s} \int_0^{\theta_1} \delta(\theta - \rho) \sin \beta \theta d\theta = \frac{P}{R_s} \sin \beta \rho$$

$$m_s(\beta) = \frac{T}{R_s} \int_0^{\theta_0} \delta(\theta - \rho) \sin \beta \theta d\theta = \frac{T}{R_s} \sin \beta \rho$$

2) $\rho_1 \leq \theta \leq \rho_2$ ($\leq \theta_0$) に等分布垂直荷重 p , 等分布ねじりモーメント荷重 m_T が作用している場合

$$p_s(\beta) = \int_0^{\theta_0} p(\theta) \sin \beta \theta d\theta = \int_{\rho_1}^{\rho_2} p \sin \beta \theta d\theta \\ = p(\cos \beta \rho_1 - \cos \beta \rho_2) / \beta$$

$$m_s(\beta) = \int_0^{\theta_0} m_T(\theta) \sin \beta \theta d\theta = \int_{\rho_1}^{\rho_2} m_T \sin \beta \theta d\theta \\ = m_T(\cos \beta \rho_1 - \cos \beta \rho_2) / \beta$$

全径間等分布荷重の場合は $\rho_1 = 0, \rho_2 = \theta_0$ とすればよい。

6. 断 面 力

4. で X_r, T_r が求まり、従って $u(\theta), \varphi(\theta)$ を求める事ができたから次に断面力を求める。*印のついている量はせん断中心に関する量、ついてないものは中立点に関する量である。

1) St. Venant のねじりモーメント T_{zs}^*

St. Venant のねじりモーメントは次式で考えられる。

$$T_{zs}^* = \frac{GJ_T^*}{R_s} \left(\frac{d\varphi}{d\theta} - \frac{1}{R_s} \frac{du}{d\theta} \right)$$

以下断面力は $u(\theta)$ と $\varphi(\theta)$ の微係数で表わされる。 $u^k(\theta), \varphi^k(\theta)$ (k は k 回微分する事を表わす) が有界、積分可能ならば、 $u^k(\theta), \varphi^k(\theta)$ のフーリエ級数は $u(\theta), \varphi(\theta)$ のフーリエ級数 (式 (13), (14)) を項別微分して得られる。今 $u(\theta), \varphi(\theta)$ はこの条件を端たと考え式 (13), (14) から u', φ' を求めて計算すると上式は次のようになる。

$$T_{zs}^* = \frac{\alpha}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left[R_s \left(p_s(\beta) + \sum_{r=1}^m X_r \sin \beta w_r \right) (K_1(\beta) - K_3(\beta)) \right. \\ \left. + \left(R_s m_s(\beta) + \sum_{r=1}^m T_r \sin \beta w_r \right) (K_2(\beta) - K_1(\beta)) \right] \beta \cos \beta \theta$$

式 (12) より

$$\left. \begin{aligned} K_1(\beta) - K_3(\beta) &= \frac{k}{(\beta^2/\lambda^2 + 1)(\beta^2 - 1)\beta^2} \\ K_2(\beta) - K_1(\beta) &= \frac{k}{(\beta^2/\lambda^2 + 1)(\beta^2 - 1)} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

となる。故に

$$T_{zs}^* = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \left[R_s \left(R_s p_s(\beta) + \sum_{r=1}^m X_r \sin \beta w_r \right) \cdot \frac{1}{\beta^2} + R_s m_s(\beta) + \sum_{r=1}^m T_r \sin \beta w_r \right] \cdot \frac{\beta \cos \beta \theta}{(\beta^2/\lambda^2 + 1)(\beta^2 - 1)} \quad (21)$$

2) 二次ねじりモーメント T_w^*

二次ねじりモーメント T_w^* は次式で与えられる。

$$T_w^* = -\frac{EC_w^*}{R_s^3} \left(\frac{d^3 \varphi}{d\theta^3} - \frac{1}{R_s} \cdot \frac{d^3 u}{d\theta^3} \right)$$

式 (13), (14) より φ''' , u''' を求め式 (20) を考慮すれば結局

$$T_w^* = \frac{\alpha}{\lambda^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[R_s \left(R_s p_s(\beta) + \sum_{r=1}^m X_r \sin \beta w_r \right) \cdot \frac{1}{\beta^2} + R_s m_s(\beta) + \sum_{r=1}^m T_r \sin \beta w_r \right] \cdot \frac{\beta^3 \cos \beta \theta}{(\beta^2/\lambda^2 + 1)(\beta^2 - 1)} \quad (22)$$

3) 全ねじりモーメント T_z^*

$T_z^* = T_{zs}^* + T_w^*$ であるから計算の結果

$$T_z^* = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \left[R_s \left(R_s p_s(\beta) + \sum_{r=1}^m X_r \sin \beta w_r \right) \cdot \frac{1}{\beta^2} + R_s m_s(\beta) + \sum_{r=1}^m T_r \sin \beta w_r \right] \cdot \frac{\beta \cos \beta \theta}{\beta^2 - 1} \quad (23)$$

4) 曲げねじりモーメント M_w^*

$$M_w^* = -\frac{EC_w^*}{R_s^3} \left(\frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} - \frac{1}{R_s} \cdot \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right)$$

式 (20) の関係を考慮すると計算の結果

$$M_w^* = \frac{\alpha R_s}{\lambda^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[R_s \left(R_s p_s(\beta) + \sum_{r=1}^m X_r \sin \beta w_r \right) \cdot \frac{1}{\beta^2} + R_s m_s(\beta) + \sum_{r=1}^m T_r \sin \beta w_r \right] \cdot \frac{\beta^2 \sin \beta \theta}{(\beta^2/\lambda^2 + 1)(\beta^2 - 1)} \quad (23)$$

5) 曲げモーメント M_y

曲率面内変位 v , w を無視すれば曲げモーメント M_y は

$$M_y = -\frac{EJ_y}{R_0 R_s} \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + R_s \varphi \right)$$

となる。 J_y は y 軸のまわりの断面二次モーメントである。同じく式 (13), (14) より計算の結果

$$M_y = \frac{R_s}{R_0} \cdot \frac{\alpha EJ_y}{kGJ_T^*} \sum_{n=1}^{\infty} \left[R_s \left(R_s p_s(\beta) + \sum_{r=1}^m X_r \sin \beta w_r \right) \left(\beta^2 K_3(\beta) - K_1(\beta) \right) \right. \\ \left. + \left(R_s m_s(\beta) + \sum_{r=1}^m T_r \sin \beta w_r \right) \left(\beta^2 K_1(\beta) - K_2(\beta) \right) \sin \beta \theta \right]$$

ここで式 (12) より

$$\beta^2 K_3(\beta) - K_1(\beta) = \beta^2 K_1(\beta) - K_2(\beta) = 1/(\beta^2 - 1)$$

となる。又

$$R_s EJ_y / kR_0 GJ_T^* = J_y / \bar{J}_y$$

であるから結局

$$M_y = \alpha \frac{J_y}{\bar{J}_y} \sum_{n=1}^{\infty} \left[R_s \left(R_s p_s(\beta) + \sum_{r=1}^m X_r \sin \beta w_r \right) + R_s m_s(\beta) + \sum_{r=1}^m T_r \sin \beta w_r \right] \cdot \frac{\sin \beta \theta}{\beta^2 - 1} \quad (24)$$

なお x 軸のまわりのモーメント M_x は曲率面内変位を無視する場合は 0 である。

6) セン断力 Q_x^*

せん断力 Q_x^* も同様にフーリエ級数表示ができるが、せん断力は垂直荷重の和であるから集垂直荷重の左右で急変する。ところがこのような不連続点付近ではフーリエ級数は一般に収束が遅くなる。それでせん断力に関しては通常行なう方法で求める。

図-2 で軸 $S'-A$ のまわりのモーメントのつりあい条件より

$$\sum_{r=1}^{m+1} T_r \sin w_r + \sum_{r=1}^{m+1} X_r R_s \sin w_r + \int_0^{\theta_0} q(\theta) R_s d\theta \cdot R_s \sin \theta + \int_0^{\theta_0} m_T(\theta) R_s d\theta \cdot \sin \theta = 0 \quad (25)$$

ここで T_{m+1} は端支点 B におけるねじりモーメント (これは式 (23) で $\theta = \theta_0$ とすればよい) X_{m+1} は同じ支

点における垂直反力 (未知), $w_{m+1} \equiv \theta_0$ とする。式 (25) より

$$X_{m+1} = - \left(\sum_{r=1}^{m+1} T_r \sin w_r + R_s \sum_{r=1}^m X_r \sin w_r + R_s^2 \int_0^{\theta_0} q(\theta) \sin \theta d\theta + R_s \int_0^{\theta_0} m_T(\theta) \sin \theta d\theta \right) / R_s \sin w_{m+1}$$

故に $\theta = \theta$ 断面におけるせん断力 Q_x^* は θ から θ_0 に作用している垂直荷重の和であるとして

$$Q_x^* = \int_{\theta}^{\theta_0} \left[\frac{1}{R_s} \sum_{r=1}^{m+1} X_r \delta(\theta - w_r) + q(\theta) \right] R_s d\theta = \int_0^{\theta_0} \sum_{r=1}^{m+1} X_r \delta(\theta - w_r) d\theta + R_s \int_0^{\theta_0} q(\theta) d\theta$$

$w_r < \theta < w_{r+1}$ ($r=0, 1, 2, \dots, m, w_0 \equiv 0$) で

$$Q_x^* = \sum_{r=1}^{m+1} X_r + R_s \int_{\theta}^{\theta_0} q(\theta) d\theta \quad (26)$$

Q_y^* は曲率面内変位を無視する時 0 である。

又曲率面内変位を無視する時軸力は生じない。

以上により断面力が決まれば断面内の応力分布も知る事ができる。同じ事を書くのは割愛するが、文献 1) を参照されたい。曲率半径 ρ の影響を考慮しない場合については文献 3) などを参照されたい。

7. 計 算 例

図-3 のような 2 軸対称 I 形断面を有する二径間連続桁を取りあげる。断面図心を D とすると D 点を通る軸線の曲率半径を R_D とし、 D 点を座標の原点として直角座標 ($D-\bar{x}, \bar{y}$) をとる。この座標に対する中立点 O , せん断中心 S の座標を $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$, $(\bar{x}_s, \bar{y}_s)$ とすると断面諸原は以下ようになる。

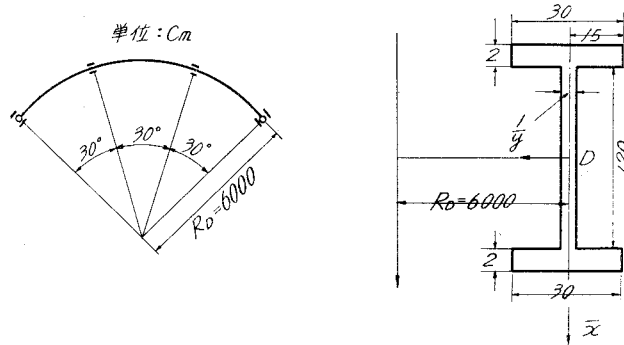


図 - 3

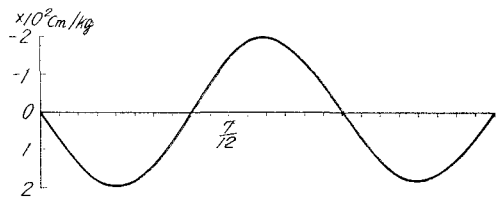
$\bar{x}_0 = 0 \text{ cm}$	$\bar{y}_0 = 6.254284 \times 10^{-3} \text{ cm}$
$\bar{x}_s = 0 \text{ cm}$	$\bar{y}_s = -1.571154 \times 10^{-2} \text{ cm}$
$R_0 = R_D + \bar{y}_0 = 5.999994 \times 10^3 \text{ cm}$	$\bar{J}_y = J_y - J_{xy}^2/J_x = J_y$
$R_s = R_D + \bar{y}_s = 6.000009 \times 10^3 \text{ cm}$	$J_T^* = 2.000029 \times 10^2 \text{ cm}^4$
$J_{xy} = 0$	$C_w^* = 3.351223 \times 10^7 \text{ cm}^6$
$J_x = 9.006160 \times 10^3 \text{ cm}^4$	$k = 7.655319 \times 10^3$
$J_y = 5.905603 \times 10^5 \text{ cm}^4$	$\lambda^2 = 8.287101 \times 10$

又同一断面について直線桁としての主な断面定数は

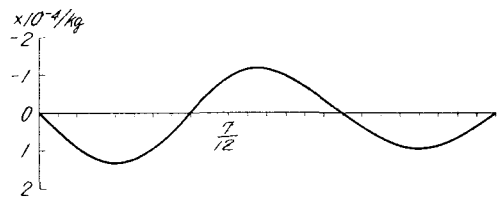
$\bar{x}_0 = \bar{y}_0 = \bar{x}_s = \bar{y}_s = 0$	$C_w^* = 3.240000 \times 10^7 \text{ cm}^6$
$R_0 = R_s = R_D = 6 \times 10^3 \text{ cm}$	$k = 7.655429 \times 10^3$
$J_y = 5.905600 \times 10^5 \text{ cm}^4$	$\lambda^2 = 8.570412 \times 10$
$J_T = 2 \times 10^2 \text{ cm}^4$	

つまり C_w^*, λ^2 は厳密理論の方が 2~3% 大きい但他の断面定数はほとんど変わらない。

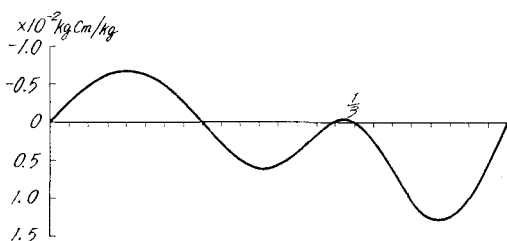
厳密理論の断面定数を用いて $P=1$ がせん断中心軸上を移動する場合の $\theta=7\theta_0/12$ 点の変形及び断面力の影響線を図-4~図-9 に示す。計算は北大の HARP 103 を用い、変形、断面力とも級数の 30 項まで計算させた。



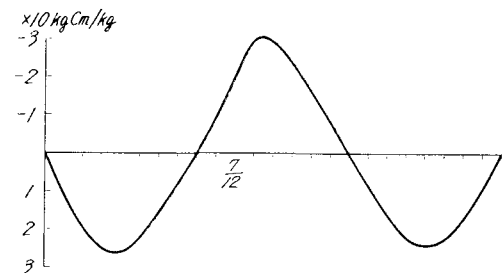
図—4 たわみ u 影響線



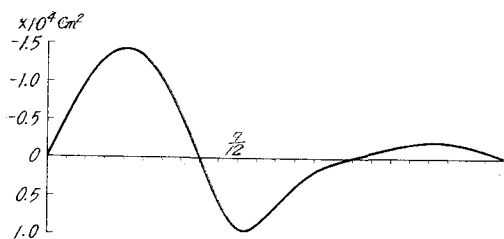
図—5 ねじれ角 φ 影響線



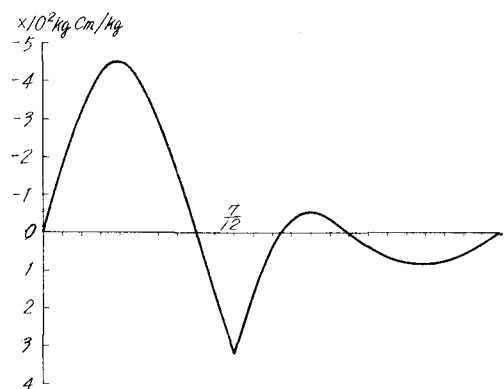
図—6 支点(不静定)ねじりモーメント T_1 影響線



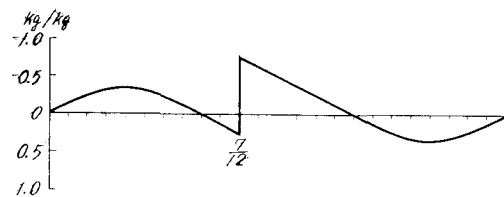
図—7 全ねじりモーメント T_x^* 影響線



図—8 曲げねじりモーメント M_{tw}^* 影響線



図—9 曲げモーメント M_y 影響線



図—10 せん断力 Q_x^* 影響線

なお直線桁としての断面定数を用いた場合と比較してみたが、変形、断面力とも、 $\pm 2\%$ 以内の相異しか認められなかった。又直線桁としての断面定数を用いた場合は、変形、断面力をフーリエ級数表示に依らないで代数式で表わしたたわみ角法³⁾と比較してみると(従ってこの場合の両者の相異はフーリエ級数の収束状態に基づく相異である)たわみ u は $\pm 0.1\%$ 以下、ねじれ角 φ は $\pm 1.5\%$ 以下の誤差が生じた。断面力はやや収束が悪く全ねじりモーメント T_x^* は $\pm 5\%$ 以下、曲げねじりモーメント M_{tw}^* は $\pm 5\%$ 以下、曲げモーメント M_y は $\pm 3\%$ 以下の誤差が認められた。この誤差は、級数の項数を多くとればとる程小さくなる事はいうまでもない。

8. あとがき

以上変形、断面力などのフーリエ級数解を提示してきたが、通常代数関数による解法と比較すると次の様な特徴を見い出せる。

- 1) 本法に従えば、連続曲線桁を解くことは式 (18), (19) の多元連立方程を解くだけの簡単な内容となる。即ちたわみ角法などでは各節点の変位を媒介として、不静定力を算出するという二度手間が省ける。
- 2) せん断力を除いては各影響線を一つの数式で表わせる。
- 3) 反面、断面力に関しては、級数の収束が変形に比較して遅くなる。この点に関しては、級数が速く収束する

ように数学的装作を加える余地がある。

終りに本文作成にあたり種々のご指導をいただいた北海道大学の渡辺教授並びに稼農助教授に深く感謝します。

文 献

- 1) 深沢泰晴：「薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎理論」土木学会論文集, 昭和 39 年, 第 110 号.
- 2) 平井 敦・深沢泰晴：「曲線桁の振動問題の解析」昭和 39 年第 19 回年次学術講演会講演概要.
- 3) 渡辺 昇：曲線桁の理論と計算.
- 4) Kenneth S. Miller：Enginecring Mathematics, 邦訳：技術者の数学 I, II, 共立全書.