

3 径間連続逆ランガー桁の振動について

正員 瀬谷 拓治*

正員 ○浅野 幸雄*

§1. 概 要

ランガー型式の橋梁は計算が比較的簡単な上鋼重が軽く、容姿も軽快なので、しばしば用いられるが、半面剛性が、小さく振動が大きいと言われている。

最低次固有振動については、多くの研究〔参考文献 (1), (2) など〕がなされているが、本文は側径間を有する連続逆ランガーについて、従来と違って定和分変換理論を用いて変形法により解析を行ない、床版が補剛桁と合成効果がある場合と、ない場合とに分けて固有振動を求め、さらに実際に設計架設された橋梁について振動測定を行なって理論計算を照査したものである。

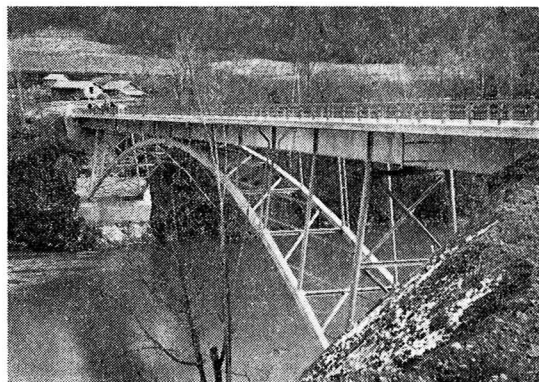


写真-1

§2. 理論解析

1. 計算上の仮定

(1) 質量については、ランガー部では補剛桁の各格点に平均化された自重が集散的に作用するものとする。

(2) 応力は全て引張力を正とする。

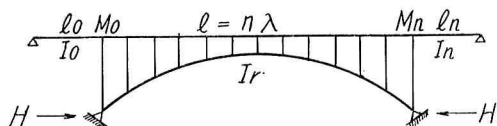


図-1

(3) 中間支点到に於いては、支柱の鉛直変位は無視する。

2. 記号の説明

l_0, I_0, W_0 ; 第1径間の支間長, 断面2次モーメント, 全自重

l_n, I_n, W_n ; 第3径間の支間長, 断面2次モーメント, 全自重

λ_r, I_r, W_r ; ランガー部の任意点の格間長, 断面2次モーメント及び格点自重

M_0, M_n ; 中間支点上の曲げモーメント

$A_r^{(p)}, A_r^{(s)}$; 任意点の鉛直材及び肋材の断面積

$\delta_r, \delta_{r'}$; 任意点の補剛桁及び肋材の鉛直変位

e_r ; 任意点の肋材の水平変位

h_r ; 任意点の鉛直材の長さ

α_r ; 任意点の肋材が水平線となす角

S_r, V_r ; 任意点の肋材及び鉛直材に働く力

P_r ; 任意点に作用する慣性力

H ; 水平反力

3. 理論解析

理論解析中すべての値に $e^{i\omega t}$ が付くが、これを消去した形で解析式を表わすことにする。

肋材に関して

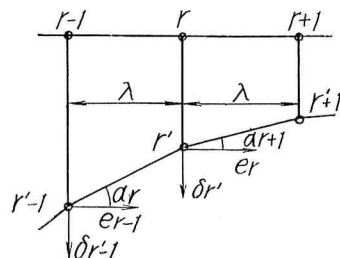


図-2

部材 $(r', r-1)$ について

r' 点の変位

$$e_r \cos \alpha_r - \delta_{r'} \sin \alpha_r$$

$r'-1$ 点の変位

$$e_{r-1} \cos \alpha_{r-1} - \delta_{r'-1} \sin \alpha_{r-1}$$

* 函館ドック K.K. 橋梁鉄構設計課

部材 $(r', r'-1)$ に働く力は $\lambda_r = \lambda$ (一定) とすれば

$$S_r = -\frac{A_r^{(S)} \cdot E}{\lambda \cdot \sec \alpha_r} \left\{ (e_r - e_{r-1}) \cos \alpha_r - (\delta_{r'} - \delta_{r'-1}) \sin \alpha_r \right\} \quad (1)$$

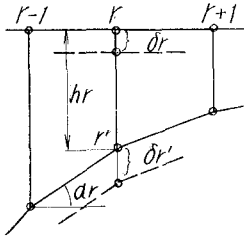
又,

$$S_r = H \sec \alpha_r \quad (2)$$

(1), (2) 式より

$$\frac{H \lambda \sec^3 \alpha_r}{A_r^{(S)} \cdot E} + (\delta_{r'} - \delta_{r'-1}) \tan \alpha_r = e_r - e_{r-1} \quad (3)$$

鉛直材に関して



図—3

r 点の鉛直材の変位は

$$\delta_{r'} - \delta_r$$

鉛直材に働く力は

$$V_r = \frac{EA_r^{(V)}}{h_r} (\delta_{r'} - \delta_r) \quad (4)$$

又,

$$V_r = H (\tan \alpha_r - \tan \alpha_{r+1}) = H \cdot C \quad (5)$$

[放物線アーチでは $\tan \alpha_r - \tan \alpha_{r+1} = C$ (一定)]

(4), (5) 式より

$$(\delta_{r'} - \delta_r) = \frac{H \cdot h_r}{E \cdot A_r^{(V)}} \cdot C \quad (6)$$

$r-1$ 点に於いては

$$(\delta_{r'-1} - \delta_{r-1}) = \frac{H \cdot h_{r-1}}{E \cdot A_{r-1}^{(V)}} \cdot C \quad (7)$$

(6), (7) 式より差をとって整理すれば

$$(\delta_{r'} - \delta_{r'-1}) = \frac{H \cdot C}{E} \left(\frac{h_r}{A_r^{(V)}} - \frac{h_{r-1}}{A_{r-1}^{(V)}} \right) + (\delta_r - \delta_{r-1}) \quad (8)$$

(8) 式を (3) 式に代入すれば

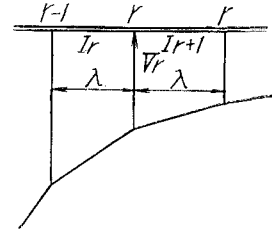
$$\frac{H \lambda \sec^3 \alpha_r}{E \cdot A_r^{(S)}} + \frac{H \cdot C}{E} \left(\frac{h_r}{A_r^{(V)}} - \frac{h_{r-1}}{A_{r-1}^{(V)}} \right) \tan \alpha_r + (\delta_r - \delta_{r-1}) \tan \alpha_r = (e_r - e_{r-1})$$

さらにこれを各格点について集めれば

$$\sum_{r=1}^n \frac{H \lambda \sec^3 \alpha_r}{E \cdot A_r^{(S)}} + \sum_{r=1}^n \frac{H \cdot C}{E} \left(\frac{h_r}{A_r^{(V)}} - \frac{h_{r-1}}{A_{r-1}^{(V)}} \right) \tan \alpha_r + \sum_{r=1}^n (\delta_r - \delta_{r-1}) \tan \alpha_r = 0 \quad (9)$$

[ここで $\sum_{r=1}^n (e_r - e_{r-1}) = 0$, 即ちアーチ支承部の水平変位なし]

補剛桁に関して



図—4

3 連モーメント式より荷重がないとき

$$\frac{\lambda}{6EI_r} M_{r-1} + M_r \left(\frac{\lambda}{3EI_r} + \frac{\lambda}{3EI_{r+1}} \right) + \frac{\lambda}{6EI_{r+1}} M_{r+1} = \frac{\delta_r - \delta_{r-1}}{\lambda} - \frac{\delta_{r+1} - \delta_r}{\lambda} \quad (10)$$

r 点の鉛直力の釣合より

$$\frac{M_r - M_{r-1}}{\lambda} - \frac{M_{r+1} - M_r}{\lambda} = P_r + V_r \quad (11)$$

ここで $I_r = I$ (一定) とすれば (10) 式より

$$\frac{\lambda}{6EI} M_{r-1} + \frac{4\lambda}{6EI} M_r + \frac{\lambda}{6EI} M_{r+1} = -\frac{1}{\lambda} \left\{ \delta_{r+1} - 2\delta_r + \delta_{r-1} \right\} \quad (12)$$

左辺を変形して

$$\text{左辺} = \frac{\lambda}{6EI} \left\{ (M_{r+1} - 2M_r + M_{r-1}) + 6M_r \right\}$$

ここで

$$\Delta^2 M_{r-1} = M_{r+1} - 2M_r + M_{r-1}$$

$$\Delta^2 \delta_{r-1} = \delta_{r+1} - 2\delta_r + \delta_{r-1}$$

よって (12) 式は

$$\frac{\lambda}{6EI} \left\{ \Delta^2 M_{r-1} + 6M_r \right\} = -\frac{1}{\lambda} \Delta^2 \delta_{r-1} \quad (13)$$

又, (11) 式より

$$M_{r+1} - 2M_r + M_{r-1} = -(P_r + HC) \lambda$$

よって

$$\Delta^2 M_{r-1} = -(P_r + HC) \lambda \quad (14)$$

Inertia Force は

$$P_r = -\frac{W}{g} \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = \frac{W}{g} \omega^2 \delta_r \quad (15)$$

ここで

$$\sum_{r=1}^n M_r \sin \frac{i\pi r}{n} = \bar{M}_i \quad M_r = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \bar{M}_i \sin \frac{i\pi r}{n}$$

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^n \delta_r \sin \frac{i\pi r}{n} &= \bar{\delta}_\ell & \delta_r &= \frac{2}{n} \sum_{\ell=1}^n \bar{\delta}_\ell \sin \frac{i\pi r}{n} \\ \sum_{r=1}^n \delta_{r'} \sin \frac{i\pi r}{n} &= \bar{\delta}_{\ell'} & \delta_{r'} &= \frac{2}{n} \sum_{\ell=1}^n \bar{\delta}_{\ell'} \sin \frac{i\pi r}{n} \\ \sum_{\ell=1}^n C \sin \frac{i\pi r}{n} &= \bar{C}_\ell & C &= \frac{2}{n} \sum_{\ell=1}^n \bar{C}_\ell \sin \frac{i\pi r}{n} \\ D_\ell &= 2 \left(1 - \cos \frac{i\pi}{n} \right)\end{aligned}$$

とおくと, (13) 式は

$$(6-D_\ell) \bar{\nabla}_\ell = \frac{6EI}{\lambda^2} D_\ell \bar{\delta}_\ell \quad (16)$$

(14) 式は

$$-D_\ell \bar{\nabla}_\ell = -\left(\frac{W}{g} \omega^2 \bar{\delta}_\ell + H \bar{C}_\ell \right) \lambda \quad (17)$$

とおける。

ここで側径間を考慮すれば, 0, n 点に関して 3 連モーメント式より [参考文献 (4)]

$$\begin{cases} M_0 \left\{ \frac{l_0}{6EI} (2+f_{7,k}) + \frac{2\lambda}{6EI} \right\} + \frac{\lambda}{6EI} M_1 = -\frac{\delta_1}{\lambda} \\ M_n \left\{ \frac{l_n}{6EI} (2+f_{7,k+1}) + \frac{2\lambda}{6EI} \right\} + \frac{\lambda}{6EI} M_{n-1} = -\frac{\delta_{n-1}}{\lambda} \end{cases} \quad (18)$$

$$\circledast \quad \begin{cases} M_0 \left\{ \frac{l_0}{6EI} (2+f_{7,k}) + \frac{2\lambda}{6EI} \right\} + \frac{\lambda}{6EI} M_1 = -\frac{\delta_1}{\lambda} \\ M_n \left\{ \frac{l_n}{6EI} (2+f_{7,k+1}) + \frac{2\lambda}{6EI} \right\} + \frac{\lambda}{6EI} M_{n-1} = -\frac{\delta_{n-1}}{\lambda} \end{cases} \quad (19)$$

但し

$$\begin{aligned}f_{7,k} &= \frac{3}{\phi_0} (\coth \phi_0 - \cot \phi_0) - 2 \\ f_{7,k+1} &= \frac{3}{\phi_n} (\coth \phi_n - \cot \phi_n) - 2 \\ \phi_0 &= \frac{W_0}{W} \frac{EI}{EI_0} \frac{l_0^3}{\lambda^3} \beta^2 & \phi_n &= \frac{W_n}{W} \frac{EI}{EI_n} \frac{l_n^3}{\lambda^3} \beta^2 \\ \beta^2 &= \frac{\lambda^3}{EI} \cdot \frac{W}{g} \omega^2\end{aligned}$$

M_0, M_n を考慮すれば (16), (17) 式の次の如くなる。

$$(6-D_\ell) \bar{\nabla}_\ell = \frac{6EI}{\lambda^2} D_\ell \bar{\delta}_\ell + \sin \frac{i\pi}{n} \left\{ (-1)^\ell M_n - M_0 \right\} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}-D_\ell \bar{\nabla}_\ell &= -\left(\frac{W}{g} \omega^2 \bar{\delta}_\ell + H \bar{C}_\ell \right) \lambda \\ &+ \sin \frac{i\pi}{n} \left\{ (-1)^\ell M_n - M_0 \right\}\end{aligned} \quad (21)$$

(20), (21) 式より $\bar{\delta}_\ell$ について求めれば

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_\ell &= -\frac{HC\lambda^3}{6EI} \cdot \frac{\sin \frac{i\pi}{n} \left\{ (-1)^\ell - 1 \right\} (6-D_\ell)}{D_\ell \left(D_\ell^2 + \frac{\beta^2}{6} D_\ell - \beta^2 \right)} \\ &- \frac{\lambda^2 \sin \frac{i\pi}{n} \left\{ (-1)^\ell M_n - M_0 \right\}}{EI \left(D_\ell^2 + \frac{\beta^2}{6} D_\ell - \beta^2 \right)}\end{aligned}$$

よって

$$\circledast \quad \delta_r = -\frac{HC\lambda^3}{6EI} L_1(\beta, r) + M_0 \frac{\lambda^2}{EI} \phi(\beta, n-r)$$

$$+ M_n \frac{\lambda^2}{EI} \phi(\beta, r) \quad (22)$$

上式に於いて

$$\begin{cases} L_1(\beta, r) = \frac{2}{n} \sum_{\ell=1}^n \frac{\sin \frac{i\pi r}{n} \cdot \sin \frac{i\pi}{n} \left\{ (-1)^\ell - 1 \right\} (6-D_\ell)}{D_\ell \left(D_\ell^2 + \frac{\beta^2}{6} D_\ell - \beta^2 \right)} \\ \left. \begin{aligned} -\phi(\beta, r) \\ \phi(\beta, n-r) \end{aligned} \right\} = \frac{2}{n} \sum_{\ell=1}^n \frac{\sin \frac{i\pi r}{n} \cdot \sin \frac{i\pi}{n} \left\{ (-1)^\ell \right\}}{\left(D_\ell^2 + \frac{\beta^2}{6} D_\ell - \beta^2 \right)} \left\{ \begin{aligned} 1 \\ 1 \end{aligned} \right\}\end{cases}$$

又,

$$\begin{cases} F_1(\beta, D_\ell) = \frac{2}{n} \sum_{\ell=1}^n \frac{(4-D_\ell)(6-D_\ell) \left\{ (-1)^\ell - 1 \right\}^2}{4D_\ell \left(D_\ell^2 + \frac{\beta^2}{6} D_\ell - \beta^2 \right)} \\ \left. \begin{aligned} -F_2(\beta, D_\ell) \\ F_3(\beta, D_\ell) \end{aligned} \right\} = \frac{2}{n} \sum_{\ell=1}^n \frac{(4-D_\ell) \left\{ (-1)^\ell - 1 \right\}}{4 \left(D_\ell^2 + \frac{\beta^2}{6} D_\ell - \beta^2 \right)} \left\{ \begin{aligned} 1 \\ (-1)^\ell \end{aligned} \right\}\end{cases}$$

とおいて, δ_r を各格点について集めれば

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^n \delta_r &= \frac{HC\lambda^3}{6EI} F_1(\beta, D_\ell) + M_0 \frac{\lambda^2}{EI} F_2(\beta, D_\ell) \\ &+ M_n \frac{\lambda^2}{EI} F_3(\beta, D_\ell)\end{aligned} \quad (23)$$

同様にして

$$\begin{cases} L_2(\beta, r) = \frac{2}{n} \sum_{\ell=1}^n \frac{\sin \frac{i\pi r}{n} \cdot \sin \frac{i\pi}{n} \left\{ (-1)^\ell - 1 \right\} D_\ell}{\left(D_\ell^2 + \frac{\beta^2}{6} D_\ell - \beta^2 \right)} \\ \left. \begin{aligned} -\Psi(\beta, r) \\ \Psi(\beta, n-r) \end{aligned} \right\} = \frac{2}{n} \sum_{\ell=1}^n \frac{\sin \frac{i\pi r}{n} \cdot \sin \frac{i\pi}{n} \left(D_\ell + \frac{\beta^2}{6} \right)}{\left(D_\ell^2 + \frac{\beta^2}{6} D_\ell - \beta^2 \right)} \left\{ \begin{aligned} (-1)^\ell \\ 1 \end{aligned} \right\}\end{cases}$$

とおけば

$$\circledast \quad M_r = -HC\lambda L_2(\beta, r) + M_0 \Psi(\beta, n-r) + M_n \Psi(\beta, r) \quad (24)$$

又 (9) 式の第 3 項を部分分法により変形すれば

$$\begin{aligned}\sum (\delta_r - \delta_{r-1}) \tan \alpha_r &= \delta_{r-1} \tan \alpha_r \Big|_{r=1}^{r=n} \\ &- \sum_{r=1}^n (\tan \alpha_{r+1} - \tan \alpha_r) \delta_r \\ &= + \sum_{r=1}^n \delta_r \cdot C\end{aligned} \quad (25)$$

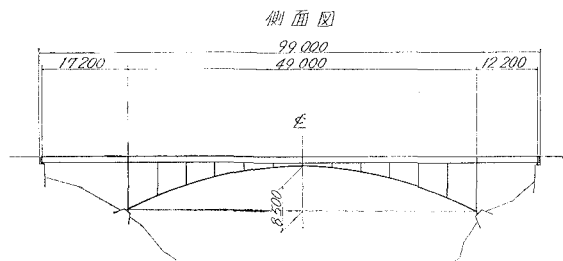
よって (9), (23), (25) 式より釣合方程式は

$$\begin{aligned}\circledast \quad \sum_{r=1}^n \frac{H\lambda \sec^3 \alpha_r}{EA r^3} + \sum_{r=1}^n \frac{HC}{E} \left(\frac{h_r}{A r^2} - \frac{h_{r-1}}{A r^2} \right) \tan \alpha_r \\ + \frac{HC^2 \lambda^3}{6EI} F_1(\beta, D_\ell) + M_0 \frac{C\lambda^2}{EI} F_2(\beta, D_\ell) \\ + M_n \frac{C\lambda^2}{EI} F_3(\beta, D_\ell) = 0\end{aligned} \quad (26)$$

§3. 数 値 計 算

諸 元

橋 長	99.000 m
支 間 長	17.200 m + 69.000 m + 12.200 m
幅 員	5.500 m
活 荷 重	TL-14



図—5

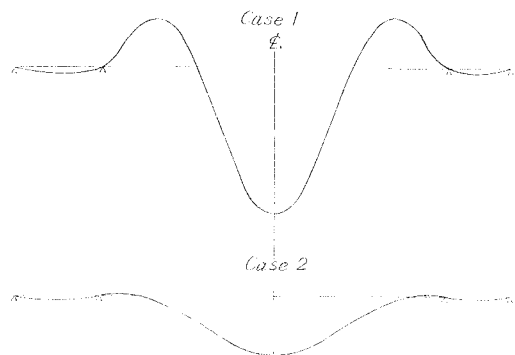
補剛桁の断面2次モーメントを鋼桁のみ (Case 1) と、床版との合成効果を考慮した場合 (Case 2) について、 ω を順次仮定して $\delta_1 \cdot \delta_{n-1}$, $M_1 \cdot M_{n-1}$, $M_0 \cdot M_n$ を求めて釣合方程式 (26) を満足する ω を電算によって求めた。

結果を表-1に示す。

表—1

		Case 1	Case 2
断 面 2 次 モーメント	I_0 (cm ⁴)	531.000	1534.000
	I (cm ⁴)	416.900	1288.600
	I_n (cm ⁴)	341.600	907.000
固有振動周期 T' (sec)		0.58	0.46
測 定 値 T (sec)		0.43	

このときの振動のモードは図-6に示す如くである。



図—6 振動のモード

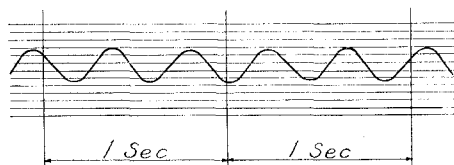
§4. 振 動 測 定

中央径間の中央に加速度計 (2 G の容量) を取付け、こ

の位置で人間2人が同時に1回ジャンプして起振し、これを共和無線動的歪計を通し、オシログラフによって記録した。

固有振動数としては、初期に現われる強制振動がおさまったあとの、初・中・後期の自由振動を平均して $N=2.35$ cycle/sec を得た。即ち $T=0.43$ sec である。

図-7は中期の自由振動のものである。



図—7

§5. 結 言

側径間を有するランガーの振動を、ランガー部に於いては格点慣性力として定和分変換を用い、側径間と振動3連モーメント式によって結合する解析法によって理論計算を行なった結果、固有振動周期は補剛桁の断面2次モーメントとして、床版との合成効果を考慮した場合 $T=0.46$ sec、合成効果のない場合 $T=0.58$ sec であるが、測定値は $T=0.43$ sec であった。

このことから振動の様な微小変形に対してスラブクランプはジベルの様に作用することが分る。

両者の誤差はランガー部慣性力を格点に等分配したことによるものと考えられる。

しかし理論値と実測値との差は8%以下であり、上記解析法は側径間を有するランガー構造の動的解析に有効であることが分る。

尚、ここでは逆ランガーについて示したが、この解析法を用いれば (9) 式に於いて右辺を $-Hl/EAg$ とおけば、側径間を有する下路型式のランガーの場合の振動解析もできる。

最後に、この論文を作成するに当たり、室蘭工業大学、能町教授の御指導を、又振動測定に当っては構造研究室の皆様御協力を戴いた。ここに深く感謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) 猪瀬：ランガー橋設計法，森北出版 (昭30.11)。
- 2) 吉村・平井：ランガー桁の動的解析，土木学会論文集第101号 (昭39.1)。
- 3) S. G. Nomachi: "On Finite Sine Series with Respect to Finite Differences", 室蘭工業大学紀要, Vol. 5, No. 1, July, 1965.
- 4) 岡本：地震力を考えた構造物設計法，オーム社 (昭39.6)。