

斜支承を有する連続格子桁について

正員 ○青木 弘*
正員 能町 純雄**

1. 緒言

径間長が断面の各寸法に比べて充分長く、振りによる二次せん断トルクが一次せん断トルクに比べて無視できるような梁が、軸線と斜交する支承を有する場合、従来大部分の研究は斜支持部を剛性の大きな斜交ラーメンに置き換えることによって行なわれているが^{1),2)}、Kollbrunner/Basler³⁾はこれと見方をかえて直支承が斜支承になった場合、いかなる拘束が生ずるかを幾何学的に検討し、実用的理論を展開して斜支承を有する連続梁の解析を試みている。

ここでは支承部の振り変位を考慮した斜支承梁の公式を求め、これによって斜二主箱桁が直交横桁で剛結された連続格子構造の応力解析を行なおうとするものである。

2. 斜支承を有する梁の特性

図-1に示すような梁を考える。その両支承を $i-1, i$ 番目としそれぞれの斜角は梁軸直角方向にそれぞれ図のように δ_{i-1}, δ_i とし、たわみ角を α_i, β_i とすれば支承間の梁軸射影長 e_{i-1}, e_i の間でたわみの差は近似的に $\alpha_i \times e_{i-1}, \beta_i \times e_i$ とおくことができる。これだけのたわみ差が斜支承によって水平に引きもどされるため φ_{i0} の強性回転が梁に内蔵されることになる。

$$\varphi_{i0} = \frac{\alpha_i \cdot e_{i-1}}{d} + \frac{\beta_i \cdot e_i}{d} = \alpha_i \tan \delta_{i-1} + \beta_i \tan \delta_i \quad (1)$$

いま、両端のみかけの回転角を φ_{i-1}, φ_i とすれば、これによるトルクは強制回転も含めて次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \gamma_i \cdot T_{i,i-1} &= \varphi_i - \varphi_{i-1} + \varphi_{i0} = \varphi_i - \varphi_{i-1} + \alpha_i \tan \delta_{i-1} + \beta_i \tan \delta_i \\ \gamma_i \cdot T_{i-1,i} &= -\gamma_i T_{i,i-1} = \varphi_{i-1} - \varphi_i - \alpha_i \tan \delta_{i-1} - \beta_i \tan \delta_i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

但し

$$\gamma_i = \frac{l_i}{GJ_i}$$

なお、 T (トルク)はすべて時計回りと仮定する。上記のトルクは斜支承両端の支点に偶反力 X_{i-1}, X_i をそれぞれ生じ、これが梁の両端に付加曲げモーメント $\Delta M_{i-1}, \Delta M_i$ を生ずることとなる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta M_{i-1} &= X_{i-1} \cdot e_{i-1} = T_{i-1,i} \tan \delta_{i-1} \\ \Delta M_i &= X_i \cdot e_i = -T_{i,i-1} \tan \delta_i \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

これらを考慮した両端のたわみ角 α_i, β_i は

$$\alpha_i = \alpha_{i0} + M_{i-1} \alpha_{i,i-1} + M_i \alpha_{ii} + \Delta M_{i-1} \alpha_{i,i-1} + \Delta M_i \alpha_{ii} \quad (4)$$

$$\beta_i = \beta_{i0} + M_{i-1} \beta_{i,i-1} + M_i \beta_{ii} + \Delta M_{i-1} \beta_{i,i-1} + \Delta M_i \beta_{ii} \quad (5)$$

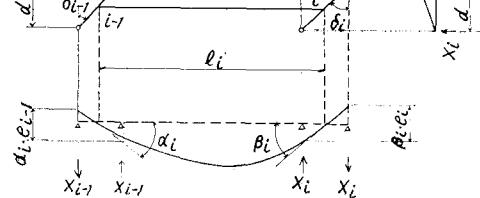


図-1

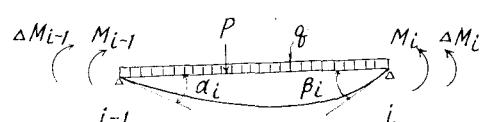


図-2

但し

$$\alpha_{i,i-1} = \beta_{ii} = \frac{l_i}{3EI_i}, \quad \alpha_{ii} = \beta_{i,i-1} = \frac{l_i}{6EI_i}$$

* 北海道開発コンサルタント K.K. 橋梁課 主任技師 技術士

** 室蘭工業大学 教授 工博

$$\alpha_{i0} = \frac{P \cdot l_i^2 f(1-\zeta)}{6EI_i}, \quad \beta_{i0} = \frac{P \cdot l_i^2 f(\zeta)}{6EI_i}, \quad \alpha_{i0} = \beta_{i0} = \frac{q \cdot l_i^2}{24EI_i}$$

$$f(\zeta) = \zeta - \zeta^3 \quad 0 \leq \zeta \leq 1$$

(2), (3) 式を用いて、(4), (5) 式は次のようになる。

$$\alpha_i(1+C_{\alpha,i-1}) + \beta_i C_{\alpha,i} = \alpha_{i0} + M_{i-1} \alpha_{i-1} + M_i \alpha_{ii} - C_{\alpha,i-1} \cot \delta_{i-1} (\varphi_i - \varphi_{i-1}) \quad (6)$$

$$\alpha_i C_{\beta,i-1} + \beta_i (1+C_{\beta,i}) = \beta_{i0} + M_{i-1} \beta_{i-1} + M_i \beta_{ii} - C_{\beta,i-1} \cot \delta_{i-1} (\varphi_i - \varphi_{i-1}) \quad (7)$$

但し

$$C_{\alpha,i-1} = \frac{GJ_i}{EI_i} \cdot \frac{\tan \delta_{i-1}}{6} (2 \tan \delta_{i-1} + \tan \delta_i)$$

$$C_{\alpha,i} = \frac{GJ_i}{EI_i} \cdot \frac{\tan \delta_i}{6} (2 \tan \delta_{i-1} + \tan \delta_i)$$

$$C_{\beta,i-1} = \frac{GJ_i}{EI_i} \cdot \frac{\tan \delta_{i-1}}{6} (\tan \delta_{i-1} + 2 \tan \delta_i)$$

$$C_{\beta,i} = \frac{GJ_i}{EI_i} \cdot \frac{\tan \delta_i}{6} (\tan \delta_{i-1} + 2 \tan \delta_i)$$

上式は Kollbrunner の公式に両端の回転角を加味した公式である。 $\delta_{i-1}, \delta_i = 0$ とおけば、 C の項はすべて零となり、普通の梁の公式と一致する。

3. 橫桁の反力モーメント

主桁が箱形断面の場合、横桁の両端を箱桁の中心に一致させると箱桁に含まれる両端部 f の部分では、主桁断面が変形後も不变であるという仮定のもとでは、横桁の曲げ剛性が無限大ということと一致する。従って a, b 支点間の距離を λ 、主桁部分を f 、主桁の内側距離を λ_0 とすれば、

$$\varphi_a - \frac{y_b - y_a}{\lambda} = \frac{\lambda_0}{6EI_0} (2km_a + k'm_b) \quad (8)$$

$$\varphi_b + \frac{y_b - y_a}{\lambda} = \frac{\lambda_0}{6EI_0} (2km_b + k'm_a) \quad (9)$$

但し

$$k = \frac{\lambda^2 - f \lambda'}{\lambda^2}, \quad k' = \frac{\lambda^2 + 2f \lambda'}{\lambda^2}$$

$$\lambda' = \lambda_0 + f, \quad y_i = i \text{ 点のたわみ}$$

となる。 $f=0, \lambda_0=\lambda$ で普通の梁と一致する。

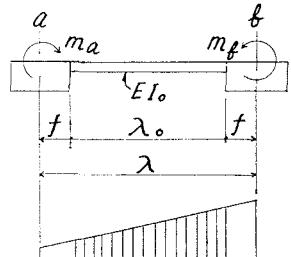


図-3

4. 斜二箱桁、直交横桁の解

いま図-4に示されるような平面形の構造を例にとって考えることとする。図中下側主桁は格子点を左から 0, 1, ..., 5、また上側主桁では右から 0', 1', ..., 5' とし座標の増加方向をそれぞれ逆にする。点対称構造であるから格点 1 と 1' では各つりあい式は相似な形となる。この場合斜支承を有するのは I, V, V', I' の四部材のみで、それぞれ一端だけに斜支承を有しており斜角はすべて等しい δ である。

まず最初にこの構造を解く基本的な考え方を述べる。

1) 格点 1~4, 4'~1' の右、左における主桁のたわみ角が等しい即ち、 $\beta_i + \alpha_{i+1} = 0$ から格点の数 8 ケの方程式

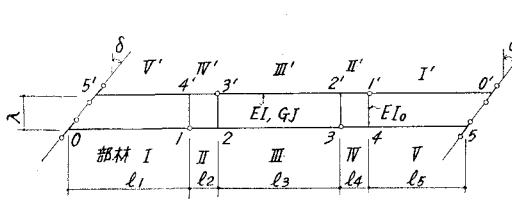


図-4

が求められる。 α_i, β_i は (6), (7) 式より求められ、 M_i, φ_i の未知量を含む。 φ_i を (8), (9) 式を用いて消去し、最終的には M_i, m_i, y_i の未知量を含む 8 ケの方程式が求められる。

2) 同上格点におけるトルクの平衡から $T_{i,i-1} + T_{i,i+1} + m_i = 0$ を求める。 T は (2) 式より求められ、前項と同様に式中の φ_i を (8), (9) 式を用いて消去すると M_i, m_i, y_i の未知量を含む方程式が格点の数だけ 8 ケ求められる。

3) 自由格子点 2, 4 点における鉛直力のつりあいを考えると次のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} \frac{M_1 - M_2}{l_2} + \frac{M_3 - M_2}{l_3} + \frac{m_2 - m'_3}{\lambda} = -Q_{21} - Q_{23} \\ \frac{M_3 - M_4}{l_4} - \frac{M_4}{l_5} + \frac{m_4 - m'_1}{\lambda} = -Q_{45} - Q_{43} \end{array} \right\} \quad (10)$$

但し、 Q_{21} は部材 II を単純梁とした時の 2 点の中間荷重による反力である。上式中 M を M' に m を m' に置きかえて 2', 4' 点の平衡条件式が求められ、合計 4 ケの M_i, m_i を含む方程式が求められる。

4) 以上の 20 方程式に対し、これに含まれる未知量は主桁の支点モーメント $M_1 \sim M'_4$ の 8 ケ、横桁端部の曲げモーメント $m_1 \sim m'_4$ の 8 ケ、自由格子点のたわみ y_2, y_4, y'_2, y'_4 の 4 ケの合計 20 ケであり、主桁の不静定モーメントを直ちに求めよう。

以上の考え方から例題を解析してみる。まず主桁の格点におけるたわみ角のつり合いより β_1, α_2 (1 点), β_2, α_3 (2 点), β_3, α_4 (3 点), β_4, α_5 (4 点)……を求める。この場合、自由格子点 2, 4 点の沈下即ち、部材回転角がこれらに加味される。

部材 I に(6), (7)式を適用すると、

$$\alpha_1(1+C_{\alpha 0}) = \alpha_{10} + \alpha_{11}M_1 - \varphi_1 C_{\alpha 0} \cot \delta \quad (11)$$

$$\alpha_1 C_{\beta 0} + \beta_1 = \beta_{10} + \beta_{11}M_1 - \varphi_1 C_{\beta 0} \cot \delta \quad (12)$$

(11) 式から

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_{10} + \alpha_{11}M_1 - \varphi_1 C_{\alpha 0} \cot \delta}{1 + C_{\alpha 0}} \quad (13)$$

(12) 式から(13)式を用いて α_1 を消去すると、

$$\beta_1 = \beta_{10} - \mu \alpha_{10} + \beta_{11}M_1 \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) - \varphi_1 C \cdot \cot \delta \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \quad (14)$$

但し

$$\mu = \frac{C}{2(1+C)}, \quad C = \frac{GJ}{EI} \cdot \frac{\tan^2 \delta}{3} = C_{\alpha 0} = 2C_{\beta 0}$$

上式から φ_1 を消去するために(8)式を用いる。

$$\varphi_1 = \frac{\lambda_0}{6EI_0} (2km_1 + k'm'_4) + \frac{y'_4}{\lambda} \quad (15)$$

$$\beta_1 = \beta_{10} - \mu \alpha_{10} + \beta_{11}M_1 \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) - C \cot \delta \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \left\{ \frac{\lambda_0}{6EI_0} (2km_1 + k'm'_4) + \frac{y'_4}{\lambda} \right\} \quad (16)$$

部材 II, III, IV については普通の梁であるから

$$\alpha_2 = \alpha_{20} + \alpha_{21}M_1 + \alpha_{22}M_2 + y_2/l_2 \quad (17)$$

$$\beta_2 = \beta_{20} + \beta_{21}M_1 + \beta_{22}M_2 - y_2/l_2 \quad (18)$$

$$\alpha_3 = \alpha_{30} + \alpha_{32}M_2 + \alpha_{33}M_3 - y_2/l_3 \quad (19)$$

$$\beta_3 = \beta_{30} + \beta_{32}M_2 + \beta_{33}M_3 + y_2/l_3 \quad (20)$$

$$\alpha_4 = \alpha_{40} + \alpha_{43}M_3 + \alpha_{44}M_4 + y_4/l_4 \quad (21)$$

$$\beta_4 = \beta_{40} + \beta_{43}M_3 + \beta_{44}M_4 - y_4/l_4 \quad (22)$$

部材 V は部材 I と同様に

$$\alpha_5 + \beta_5 C_{\alpha 5} = \alpha_{50} + \alpha_{54}M_4 + \varphi_4 C_{\alpha 4} \cot \delta \quad (23)$$

$$\beta_5(1 + C_{\beta 5}) = \beta_{50} + \beta_{54}M_4 + \varphi_4 C_{\beta 4} \cdot \cot \delta \quad (24)$$

(24) 式から

$$\beta_5 = \frac{\beta_{50} + \beta_{54}M_4 + \varphi_4 C_{\beta 4} \cot \delta}{1 + C_{\beta 5}} \quad (25)$$

(23) 式から(25)式を用いて β_5 を消去し、部材回転角を考え合わせると、

$$\alpha_5 = \alpha_{50} - \mu \beta_{50} + \alpha_{54}M_4 \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) + \varphi_4 C \cdot \cot \delta \left(\frac{1}{2} - \mu\right) - \frac{y_4}{l_5}$$

となり、 $\varphi_4 = \frac{\lambda_0}{6EI_0} (2km_4 + k'm'_1) - \frac{y_4}{\lambda}$ を用いて φ_4 を消去すると

$$\alpha_5 = \alpha_{50} - \mu\beta_{50} + \alpha_{54}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)M_4 + C \cdot \cot \delta \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \left\{ \frac{\lambda_0}{6EI_0} (2km_4 + k'm'_4) - \frac{y_4}{\lambda} \right\} - \frac{y_4}{l_5} \quad (26)$$

但し

$$C = \frac{GJ}{EI} \cdot \frac{\tan^2 \delta}{3} = C_{\beta 5} = 2C_{\alpha 5}$$

次に格点のトルクを求める。まず部材 I, 格点 1 におけるトルクは(2)及び(13)式より

$$\gamma_1 T_{10} = \frac{\varphi_1}{1+C} + \frac{\tan \delta}{1+C} \alpha_{10} + \frac{\tan \delta}{1+C} \alpha_{11} M_1 \quad (27)$$

上式から(15)式を用いて φ_1 を消去する。

$$T_{10} = \frac{1}{1+C} \cdot \left\{ \frac{\lambda_0}{6EI_0} (2km_1 + k'm'_1) + \frac{y'_4}{\lambda} \right\} \times \frac{1}{\gamma_1} + \frac{\tan \delta}{1+C} \cdot \frac{\alpha_{10}}{\gamma_1} + \frac{\tan \delta}{1+C} \cdot \frac{\alpha_{11} M_1}{\gamma_1} \quad (28)$$

部材 II は普通の梁であるから

$$T_{12} = -T_{21} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\gamma_2}$$

上式から(8), (9)式を用い φ_1, φ_2 を消去すると,

$$T_{12} = -T_{21} = \frac{\lambda_0}{6EI_0 \gamma_2} (2km_1 + k'm'_1 - 2km_2 - k'm'_2) + \frac{y'_4}{\lambda \gamma_2} + \frac{y_2}{\lambda \gamma_2} \quad (29)$$

部材 III, IV も同様に

$$T_{23} = -T_{32} = \frac{\lambda_0}{6EI_0 \gamma_3} (2km_2 + k'm'_2 - 2km_3 - k'm'_3) - \frac{y_2}{\lambda \gamma_3} - \frac{y'_2}{\lambda \gamma_3} \quad (30)$$

$$T_{34} = -T_{43} = \frac{\lambda_0}{6EI_0 \gamma_4} (2km_3 + k'm'_3 - 2km_4 - k'm'_4) + \frac{y'_2}{\lambda \gamma_4} + \frac{y_4}{\lambda \gamma_4} \quad (31)$$

部材 V は部材 I と同様に(2), (25)式から

$$\gamma_5 T_{45} = \frac{\varphi_4}{1+C} - \frac{\tan \delta}{1+C} \beta_{50} - \frac{\tan \delta}{1+C} \beta_{54} M_4$$

横桁 4, 1' では

$$\varphi_4 = \frac{\lambda_0}{6EI_0} (2km_4 + k'm'_4) - \frac{y_4}{\lambda}$$

であるから

$$T_{45} = \frac{1}{1+C} \left\{ \frac{\lambda_0}{6EI_0} (2km_4 + k'm'_4) - \frac{y_4}{\lambda} \right\} \cdot \frac{1}{\gamma_5} - \frac{\tan \delta}{1+C} \cdot \frac{\beta_{50}}{\gamma_5} - \frac{\tan \delta}{1+C} \cdot \frac{\beta_{54}}{\gamma_5} M_4 \quad (32)$$

次に適合の条件即ち、前述の格点におけるたわみ角の相等より、 $\beta_1 + \alpha_2 = 0, \beta_2 + \alpha_3 = 0, \beta_3 + \alpha_4 = 0, \beta_4 + \alpha_5 = 0$, 並びに格点におけるトルクのつりあいより,

$$T_{10} + T_{12} + m_1 = 0, \quad T_{21} + T_{23} + m_2 = 0, \quad T_{32} + T_{34} + m_3 = 0, \quad T_{43} + T_{45} + m_4 = 0$$

を求める。

$$\beta_1 + \alpha_2 = 0 \text{ から}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \beta_{11} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) + \alpha_{21} \right\} M_1 + \alpha_{22} M_2 + \frac{y_2}{l_2} \\ & - C \cot \delta \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \left\{ \frac{\lambda_0}{6EI_0} (2km_1 + k'm'_1) + \frac{y'_4}{\lambda} \right\} = \mu \alpha_{10} - \alpha_{20} - \beta_{10} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\beta_2 + \alpha_3 = 0 \text{ から}$$

$$\beta_{21} M_1 + (\beta_{22} + \alpha_{32}) M_2 + \alpha_{33} M_3 - y_2/l_2 - y_2/l_3 = -\beta_{20} - \alpha_{30} \quad (34)$$

$$\beta_3 + \alpha_4 = 0 \text{ から}$$

$$\beta_{32} M_2 + (\beta_{33} + \alpha_{43}) M_3 + \alpha_{44} M_4 + y_2/l_3 + y_4/l_4 = -\beta_{30} - \alpha_{40} \quad (35)$$

$$\beta_4 + \alpha_5 = 0 \text{ から}$$

$$\begin{aligned} & \beta_{43} M_3 + \left\{ \beta_{44} + \alpha_{54} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \right\} M_4 - \frac{y_4}{l_4} - \frac{y_4}{l_5} \\ & + C \cot \delta \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \left\{ \frac{\lambda_0}{6EI_0} (2km_4 + k'm'_4) - \frac{y_4}{\lambda} \right\} = \mu \beta_{50} - \beta_{40} - \alpha_{50} \end{aligned} \quad (36)$$

$T_{10} + T_{12} + m_1 = 0$ から

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_{11} \tan \delta}{\gamma_1(1+C)} \cdot M_1 + \left\{ 1 + \frac{k\lambda_0}{3EI_0(1+C)\gamma_1} + \frac{k\lambda_0}{3EI_0\gamma_2} \right\} m_1 - \frac{k\lambda_0}{3EI_0\gamma_2} \cdot m_2 - \frac{k'\lambda_0}{6EI_0\gamma_2} m'_3 \\ & + \left\{ \frac{k'\lambda_0}{6EI_0(1+C)\gamma_1} + \frac{k'\lambda_0}{6EI_0\gamma_2} \right\} m'_4 + \frac{y_2}{\lambda\gamma_2} + \left\{ \frac{1}{\lambda\gamma_2} + \frac{1}{\lambda(1+C)\gamma_1} \right\} y'_4 = -\frac{\tan \delta}{1+C} \cdot \frac{\alpha_{10}}{\gamma_1} \end{aligned} \quad (37)$$

$T_{21} + T_{23} + m_2 = 0$ から

$$\begin{aligned} & -\frac{k\lambda_0}{3EI_0\gamma_2} m_1 + \left(1 + \frac{k\lambda_0}{3EI_0\gamma_2} + \frac{k\lambda_0}{3EI_0\gamma_3} \right) m_2 - \frac{k\lambda_0}{3EI_0\gamma_3} m_3 - \frac{k'\lambda_0}{6EI_0\gamma_3} m'_2 \\ & + \left(\frac{k'\lambda_0}{6EI_0\gamma_2} + \frac{k'\lambda_0}{6EI_0\gamma_3} \right) m'_3 - \frac{k'\lambda_0}{6EI_0\gamma_2} m'_4 - \left(\frac{1}{\lambda\gamma_2} + \frac{1}{\lambda\gamma_3} \right) y_2 - \frac{y'_2}{\lambda\gamma_3} - \frac{y'_4}{\lambda\gamma_2} = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

$T_{32} + T_{34} + m_3 = 0$ から

$$\begin{aligned} & -\frac{k\lambda_0}{3EI_0\gamma_3} m_2 + \left(1 + \frac{k\lambda_0}{3EI_0\gamma_3} + \frac{k\lambda_0}{3EI_0\gamma_4} \right) m_3 - \frac{k\lambda_0}{3EI_0\gamma_4} m_4 - \frac{k'\lambda_0}{6EI_0\gamma_4} m'_1 \\ & + \left(\frac{k'\lambda_0}{6EI_0\gamma_3} + \frac{k'\lambda_0}{6EI_0\gamma_4} \right) m'_2 - \frac{k'\lambda_0}{6EI_0\gamma_3} m'_3 + \frac{y_2}{\lambda\gamma_3} + \frac{y_4}{\lambda\gamma_4} + \left(\frac{1}{\lambda\gamma_3} + \frac{1}{\lambda\gamma_4} \right) y'_2 = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

$T_{43} + T_{45} + m_4 = 0$ から

$$\begin{aligned} & -\frac{\beta_{54} \cdot \tan \delta}{(1+C)\gamma_5} M_4 - \frac{k\lambda_0}{3EI_0\gamma_4} m_3 + \left\{ 1 + \frac{k\lambda_0}{3EI_0\gamma_4} + \frac{k\lambda_0}{3EI_0(1+C)\gamma_5} \right\} m_4 + \left\{ \frac{k'\lambda_0}{6EI_0\gamma_4} + \frac{k'\lambda_0}{6EI_0(1+C)\gamma_5} \right\} m'_1 \\ & - \frac{k'\lambda_0}{6EI_0\gamma_4} m'_2 - \left\{ \frac{1}{\lambda\gamma_4} + \frac{1}{\lambda(1+C)\gamma_5} \right\} y_4 - \frac{y'_4}{\lambda\gamma_4} = \frac{\tan \delta}{(1+C)\gamma_5} \cdot \beta_{50} \end{aligned} \quad (40)$$

下側の桁の格点において、たわみ角の相等のつりあい条件より (33)～(36) 式、トルクのつりあいより (37)～(40) 式、並びに自由格子点の鉛直力のつりあいから (10) 式の合計 10 個の連立方程式が求められた。さらに相対する上側の主桁の各点について M を M' に M' を M に、 m を m' に m' を m に、 y を y' に y' を y に置き換えることにより上式と全く相似な関係が得られる。

以上格点主桁モーメント 8 個、横桁モーメント 8 個、自由格子点のたわみ 4 個に対し、それぞれたわみ角の相等の式 8 個、トルクのつりあい式 8 個、鉛直力のつりあいの式 4 個が与えられ、各未知量が求められる。

5. 参考文献

- 1) F. Wansleben : "Beitrag zur Berechnung schiefer drillsteifer Brücken" DER STAHLBAU Heft 10, Okto, 1955, S. 224.
- 2) H. Homberg/W. R. Marx : "SCHIFFE STÄBE UND PLATTEN", DÜSSELDORF, 1958.
- 3) Kollbrunner/Basler : "Torsion" Springer-Verlag, 1966, S. 59-96.