

アフィン荷重法による直および曲線連続桁の解析

正員 椽 農 知 徳*

1. 序 論

不静定構造物の解法は応力法と、変形法とに大別出来る。応力法は不静定力の概念から出発した不静定構造物特有のものであって、不静定力を未知量にとり解析を進める方法である。又変形法は自由度の概念から出発したあらゆる構造の解析に用いられる。ここで構造物の自由度とは、構造物が外力の作用を受けて変形する際に、その変形を表わすために最小限に必要な量の数である。即ち変形法は自由度の数で与えられる変形量を未知量にとり解析を進める方法といえる。不静定構造物の中の連続桁の解法には代表的な3連モーメント法をはじめ、弾性方程式法 (Maxwell-Mohr の方法), 最小仕事の原理による法などの応力法, 又撓み角法, Kani の法, 定点法などの変形法および還元法ともいわれるレダクション法などがある。これらの解法はすでに知られている。ここで応力法の一つであるが多少おもむきの変ったアフィン荷重法 (相似荷重群法) による直および曲線連続桁の解析方法を示したい。アフィン荷重法は三角級数を利用する Ferraz の方法¹⁾を根拠にし格子桁の解析^{2),4)}に適用されているが、曲線連続桁および曲線格子桁に対する解析には未だ示されていないようである。この解法の特徴は多次不静定量を求める際に多元連立方程式を解かず一つ又は2個の未知量を有する方程式を解けば不静定量が求められることにある。

2. 理 論

(1) 直線連続桁

図-1のような $(n+1)$ 径間連続桁を考える。これは n 個の中間支点を有するから、 n 次不静定構造である。

今、垂直支点反力群を不静定荷重群 $X_{(m)}$ ($m=1, 2, \dots, n$) としてとると、 n 個の未知数と n 個の方程式をもつ弾性方程式群が得られる。まずこの連続桁の n 個の中間支点を取りはずし、両端点2点支持の単純桁としこれを静定基本系に選ぶ。次に、点1から点 n までの中間支点位置に不静定荷重群 $X_{(m)}=1$, ($m=1, 2, \dots, n$) なる不静定垂直反力を作用させる。従って n 次の不静定連続桁では n 個の異なったアフィン荷重群 $\alpha_{j(m)}$ ($j, m=1, 2, \dots, n$) を作用させることになる。この場合1個の荷重群は n 個の集中荷重

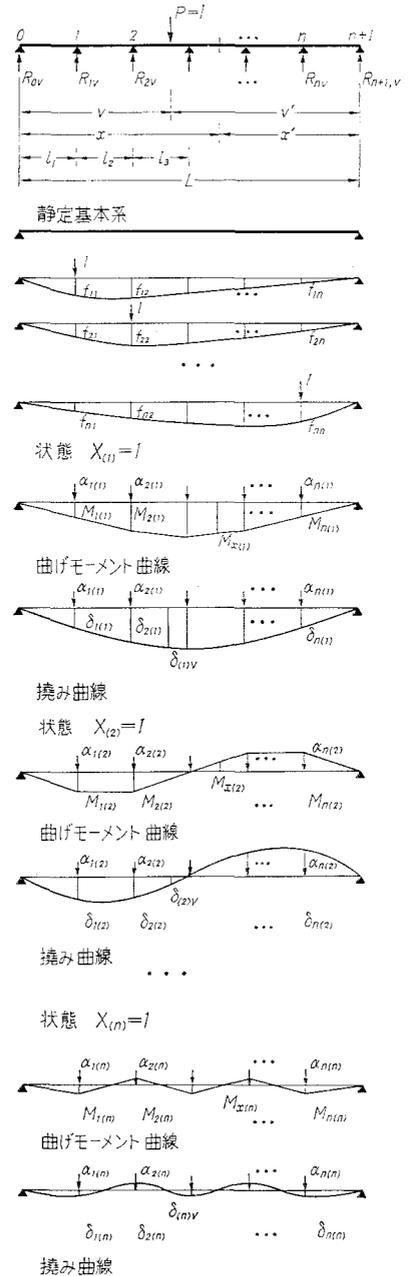


図-1

* 北海道大学工学部 助教授 工修

よりなるから全体で n^2 個の集中荷重が存在する。

さて、状態 $X_{(1)}=1$ における垂直変位 $\delta_{j(1)}$ ($j=1, 2, \dots, n$) は図-1から明らかのように、

$$\begin{aligned} \delta_{1(1)} &= f_{11} \cdot \alpha_{1(1)} + f_{12} \cdot \alpha_{2(1)} + \dots + f_{1n} \cdot \alpha_{n(1)} \\ &\quad + \dots + f_{2n} \cdot \alpha_{n(1)} \\ \delta_{2(1)} &= f_{21} \cdot \alpha_{1(1)} + f_{22} \cdot \alpha_{2(1)} + \dots + f_{2n} \cdot \alpha_{n(1)} \\ &\quad + \dots + f_{2n} \cdot \alpha_{n(1)} \\ &\quad \dots \dots \dots \\ \delta_{n(1)} &= f_{n1} \cdot \alpha_{1(1)} + f_{n2} \cdot \alpha_{2(1)} + \dots + f_{nn} \cdot \alpha_{n(1)} \\ &\quad + \dots + f_{nn} \cdot \alpha_{n(1)} \end{aligned}$$

一般に、 $\delta_{j(1)} = \sum_{h=1}^n f_{jh} \cdot \alpha_{h(1)}$, $j=1, 2, \dots, n$

同様にして状態 $X_{(2)}=1, \dots$, 状態 $X_{(n)}=1$ における変位が得られ、一般に状態 $X_{(m)}=1$ における垂直変位 $\delta_{j(m)}$ は

$$\delta_{j(m)} = \sum_{h=1}^n f_{jh} \cdot \alpha_{h(m)}, \quad j=1, 2, \dots, n \quad (1)$$

となる。

今、垂直外力 $P=1$ が連続桁上を動くとき、連立仕事方程式 (弾性方程式群) は式(2)となる。

$$\begin{bmatrix} \delta_{(1)(1)} & \delta_{(1)(2)} & \dots & \delta_{(1)(n)} \\ \delta_{(2)(1)} & \delta_{(2)(2)} & \dots & \delta_{(2)(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{(n)(1)} & \delta_{(n)(2)} & \dots & \delta_{(n)(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{(1)} \\ X_{(2)} \\ \vdots \\ X_{(n)} \end{bmatrix} = -P \begin{bmatrix} \delta_{(1)v} \\ \delta_{(2)v} \\ \vdots \\ \delta_{(n)v} \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \delta_{(1)(1)} \cdot X_{(1)} &= \delta_{1(1)} \cdot \alpha_{1(1)} + \delta_{2(1)} \cdot \alpha_{2(1)} \\ &\quad + \dots + \delta_{n(1)} \cdot \alpha_{n(1)} \\ &\quad \dots \dots \dots \\ \delta_{(1)(n)} \cdot X_{(n)} &= \delta_{1(n)} \cdot \alpha_{1(n)} + \delta_{2(n)} \cdot \alpha_{2(n)} \\ &\quad + \dots + \delta_{n(n)} \cdot \alpha_{n(n)} \\ &\quad \dots \dots \dots \\ \delta_{(n)(n)} \cdot X_{(n)} &= \delta_{1(n)} \cdot \alpha_{1(n)} + \delta_{2(n)} \cdot \alpha_{2(n)} \\ &\quad + \dots + \delta_{m(n)} \cdot \alpha_{n(n)} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$\delta_{(m)v}$ ($m=1, 2, \dots, n$) は基本系の状態 $X_{(m)}=1$ におけるアフィン荷重群による垂直変位図に相当するから式(1)に従って式(4)となる。

$$\delta_{(m)v} = \sum_{j=1}^n f_{jv} \cdot \alpha_{j(m)} \quad m=1, 2, \dots, n \quad (4)$$

$$0 \leq v \leq L$$

不静定量 $X_{(m)}$ は式(2)により計算されるが、アフィン荷重群 $\alpha_{j(m)}$ は求めねばならない。「荷重群の構成条件」すなわち、桁に相似の曲げモーメント或いは撓み曲線を与える桁上の荷重群とするアフィン荷重群の定義により、

$$\begin{aligned} \delta_{1(1)} &= \alpha_{1(1)} \cdot w_{(1)}, \quad \delta_{2(1)} = \alpha_{2(1)} \cdot w_{(1)}, \quad \dots, \\ \delta_{n(1)} &= \alpha_{n(1)} \cdot w_{(1)} \\ &\quad \dots \dots \dots \end{aligned}$$

一般に、

$$\delta_{j(m)} = \alpha_{j(m)} \cdot w_{(m)}, \quad j, m=1, 2, \dots, n \quad (5)$$

とおく。ここで $w_{(m)}$: バネ常数 [cm/kg]

然るに、式(1)より $\delta_{j(m)} = \sum_{h=1}^n f_{jh} \cdot \alpha_{h(m)}$ ($j=1, 2, \dots, n$) であるから、記述の簡素化のためサフィックス (m) を除いてかけば、

$$w \cdot \alpha_j = f_{j1} \cdot \alpha_1 + f_{j2} \cdot \alpha_2 + \dots + f_{jj} \cdot \alpha_j + \dots + f_{jn} \cdot \alpha_n$$

すなわち、

$$f_{j1} \cdot \alpha_1 + f_{j2} \cdot \alpha_2 + \dots + (f_{jj} - w) \alpha_j + \dots + f_{jn} \cdot \alpha_n = 0$$

このようにして n 個の未知数をもつ、 n 個の方程式が得られ式(6)となる。

$$\left. \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \hline (f_{11} - w) & f_{12} & \dots & f_{1n} = 0 \\ f_{21} & (f_{22} - w) & \dots & f_{2n} = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & (f_{nn} - w) = 0 \end{array} \right\} \quad (6)$$

式(6)を満足する α は一般には0である。今、 α が同時に0でないための条件として α の係数の行列式を0とおくと、 w の n 次方程式を得る。

$$w^n + A_{n-1} \cdot w^{n-1} + \dots + A_1 \cdot w + A_0 = 0 \quad (7)$$

これから n 個の根、 $w_{(1)}, w_{(2)}, \dots, w_{(n)}$ を得る。この時 α の係数が作る行列式を0とする α の特定値に対しては、 α は不定となる。即ち、 α の値は定まらないが、 $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \dots$ が決るから n 次方程式の n 個の根、 $w_{(1)}, w_{(2)}, \dots, w_{(n)}$ を式(6)に代入するとき、 $\alpha_{j(m)}=1$ とおいて解けばよい。このようにして得られるアフィン荷重群 $\alpha_{j(m)}$ の間には、次の直交条件を満足する性質がある。

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{j(l)} \cdot \alpha_{j(m)} = 0 \quad l, m=1, 2, \dots, n \quad (l \neq m) \quad (8)$$

ここで、式(5)を式(3)に代入すれば、式(9)となる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_{(1)(1)} \cdot X_{(1)} &= w_{(1)} \cdot \{ \alpha_{1(1)} \cdot \alpha_{1(1)} \\ &\quad + \alpha_{2(1)} \cdot \alpha_{n(1)} + \dots + \alpha_{n(1)} \cdot \alpha_{n(1)} \} \\ &\quad \dots \dots \dots \\ \delta_{(1)(n)} \cdot X_{(n)} &= w_{(n)} \cdot \{ \alpha_{1(1)} \cdot \alpha_{1(n)} \\ &\quad + \alpha_{2(1)} \cdot \alpha_{2(n)} + \dots + \alpha_{n(1)} \cdot \alpha_{n(n)} \} \\ &\quad \dots \dots \dots \\ \delta_{(n)(n)} \cdot X_{(n)} &= w_{(n)} \cdot \{ \alpha_{1(n)} \cdot \alpha_{1(n)} \\ &\quad + \alpha_{2(n)} \cdot \alpha_{1(n)} + \dots + \alpha_{n(n)} \cdot \alpha_{n(n)} \} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

直交条件 $\sum_{j=1}^n \alpha_{j(l)} \cdot \alpha_{j(m)} = 0$ ($l, m=1, 2, \dots, n, l \neq m$) より、

$$\delta_{(l)(m)} \cdot X_{(m)} = 0 \quad l, m=1, 2, \dots, n \quad (l \neq m) \quad (10)$$

然るに、弾性方程式のマトリックスにおいて2個の異なったサフィックスをもつ係数はすべて0である。すなわち、式(2)はただ一つの未知数をもつ弾性方程式の簡単な形になる。

$$\delta_{(m)(m)} \cdot X_{(m)} = -P \cdot \delta_{(m)v}, \quad m=1, 2, \dots, n \quad (11)$$

$$0 \leq v \leq L$$

モーメント反力群 $X_{T(m)}$ をとると、 $2n$ 個の未知数をもつ $2n$ 個の弾性方程式が得られる。基本系は両端2点支持の単純曲線桁を選ぶ。この場合のアフィン荷重群は垂直アフィン荷重群 $\alpha_{j(m)}$ とねじりアフィン群重群 $\gamma_{j(m)}$ ($j, m=1, 2, \dots, n$) とを作用させることになる。

解析に先立ち次の記号を用いることにする。

f_{hj}^{\downarrow} = 集中垂直荷重 $P=1$ による垂直変位 (下向きが \oplus)

θ_{hj}^{\downarrow} = 集中垂直荷重 $P=1$ によるねじり角変位 (支点0から支点 $n+1$ をみたときの時計回りを \oplus)

f_{hj}° = 集中ねじりモーメント荷重 $T=1$ による垂直変位

θ_{hj}° = 集中ねじりモーメント荷重 $T=1$ によるねじり角変位

$$\begin{pmatrix} \delta_{(1)(1)} & \cdots & \delta_{(1)(n)} & \delta_{(1)(n+1)} & \cdots & \delta_{(1)(2n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{(n)(1)} & \cdots & \delta_{(n)(n)} & \delta_{(n)(n+1)} & \cdots & \delta_{(n)(2n)} \\ \delta_{(n+1)(1)} & \cdots & \delta_{(n+1)(n)} & \delta_{(n+1)(n+1)} & \cdots & \delta_{(n+1)(2n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{(2n)(1)} & \cdots & \delta_{(2n)(n)} & \delta_{(2n)(n+1)} & \cdots & \delta_{(2n)(2n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{P(1)} \\ \vdots \\ X_{P(n)} \\ X_{T(1)} \\ \vdots \\ X_{T(n)} \end{pmatrix} = -P \begin{pmatrix} \delta_{(1)v}^{\downarrow} \\ \vdots \\ \delta_{(n)v}^{\downarrow} \\ \delta_{(1)v}^{\circ} \\ \vdots \\ \delta_{(n)v}^{\circ} \end{pmatrix} \quad (16)$$

ここで

$$\delta_{(1)(1)} \cdot X_{P(1)} = \delta_{1(1)}^{\downarrow} \cdot \alpha_{1(1)} + \delta_{2(1)}^{\downarrow} \cdot \alpha_{2(1)} + \cdots + \delta_{n(1)}^{\downarrow} \cdot \alpha_{n(1)}$$

$$\delta_{(1)(n+1)} \cdot X_{T(1)} = \delta_{1(n+1)}^{\circ} \cdot \gamma_{1(1)} + \delta_{2(n+1)}^{\circ} \cdot \gamma_{2(1)} + \cdots + \delta_{n(n+1)}^{\circ} \cdot \gamma_{n(1)}$$

$$\delta_{(n+1)(1)} \cdot X_{P(1)} = \tau_{1(1)}^{\downarrow} \cdot \alpha_{1(1)} + \tau_{2(1)}^{\downarrow} \cdot \alpha_{2(1)} + \cdots + \tau_{n(1)}^{\downarrow} \cdot \alpha_{n(1)}$$

$$\delta_{(n+1)(n+1)} \cdot X_{T(1)} = \tau_{1(n+1)}^{\circ} \cdot \gamma_{1(1)} + \tau_{2(n+1)}^{\circ} \cdot \gamma_{2(1)} + \cdots + \tau_{n(n+1)}^{\circ} \cdot \gamma_{n(1)}$$

となる。又、 $\delta_{(m)v}^{\downarrow}$ および $\delta_{(m)v}^{\circ}$ ($m=1, 2, \dots, 0n \leq v \leq L$) は基本系の状態 $X_{P(m)}=1$ および $X_{T(m)}=1$ におけるアフィン荷重群による垂直変位図に相当するから式(17)となる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_{(m)v}^{\downarrow} &= \sum_{j=1}^n f_{jv}^{\downarrow} \cdot \alpha_{j(m)} \\ \delta_{(m)v}^{\circ} &= \sum_{j=1}^n f_{jv}^{\circ} \cdot \gamma_{j(m)} \end{aligned} \right\} \quad \begin{matrix} m=1, 2, \dots, n \\ 0 \leq v \leq L \end{matrix} \quad (17)$$

ねじりモーメント荷重 $T=1$ が曲線連続桁の上を動くときは、式(16)において右辺のマトリックスを式(18)のねじり角変位におきかえるとよい。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{(m)v}^{\downarrow} &= \sum_{j=1}^n \theta_{jv}^{\downarrow} \cdot \alpha_{j(m)} \\ \tau_{(m)v}^{\circ} &= \sum_{j=1}^n \theta_{jv}^{\circ} \cdot \gamma_{j(m)} \end{aligned} \right\} \quad \begin{matrix} m=1, 2, \dots, n \\ 0 \leq v \leq L \end{matrix} \quad (18)$$

さて、前述のように「荷重群の構成条件」により式(19)

さて、状態 $X_{P(m)}=1$ および状態 $X_{T(m)}=1$, ($m=1, 2, \dots, n$) における変位量は図-3 より明らかのように、式(15)となる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_{j(m)}^{\downarrow} &= \sum_{h=1}^n f_{hj}^{\downarrow} \cdot \alpha_{j(m)} \\ \delta_{j(m)}^{\circ} &= \sum_{h=1}^n f_{hj}^{\circ} \cdot \gamma_{j(m)} \\ \tau_{j(m)}^{\downarrow} &= \sum_{h=1}^n \theta_{hj}^{\downarrow} \cdot \alpha_{j(m)} \\ \tau_{j(m)}^{\circ} &= \sum_{h=1}^n \theta_{hj}^{\circ} \cdot \gamma_{j(m)} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$j, m=1, 2, \dots, n$

垂直荷重 $P=1$ が曲線連続桁の上を動くときの連立仕事方程式はマトリックス表示であらわすと式(16)となる。

のようにおくことが出来る。

$$\left. \begin{aligned} \delta_{j(m)}^{\downarrow} &= w_{(m)}^{\downarrow} \cdot \alpha_{j(m)} \\ \delta_{j(m)}^{\circ} &= w_{(m)}^{\circ} \cdot \gamma_{j(m)} \\ \tau_{j(m)}^{\downarrow} &= w_{(m)}^{\downarrow} \cdot \alpha_{j(m)} \\ \tau_{j(m)}^{\circ} &= w_{(m)}^{\circ} \cdot \gamma_{j(m)} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここで $w_{(m)}^{\downarrow}$: 垂直バネ係数 [$\text{cm} \cdot \text{kg}^{-1}$]
 $w_{(m)}^{\circ}$: 回転バネ係数 [$\text{cm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$]
 $w_{(m)}^{\downarrow}$: 媒介バネ係数 [kg^{-1}]
 $w_{(m)}^{\circ} = w_{(m)}^{\downarrow}$

式(15)と式(19)により、

$$w^{\downarrow} \alpha_j = f_{1j}^{\downarrow} \cdot \alpha_1 + f_{2j}^{\downarrow} \cdot \alpha_2 + \cdots + f_{jj}^{\downarrow} \cdot \alpha_j + \cdots + f_{nj}^{\downarrow} \cdot \alpha_n$$

故に、

$$f_{1j}^{\downarrow} \cdot \alpha_1 + f_{2j}^{\downarrow} \cdot \alpha_2 + \cdots + (f_{jj}^{\downarrow} - w^{\downarrow}) \cdot \alpha_j + \cdots + f_{nj}^{\downarrow} \cdot \alpha_n = 0$$

このようにして n 個の方程式を得るから式(20)となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha_1}{f_{11}^{\downarrow} - w^{\downarrow}} \quad \frac{\alpha_2}{f_{22}^{\downarrow} - w^{\downarrow}} \quad \cdots \quad \frac{\alpha_n}{f_{nn}^{\downarrow} - w^{\downarrow}} \\ \left(\begin{array}{cccc} f_{11}^{\downarrow} - w^{\downarrow} & f_{12}^{\downarrow} & \cdots & f_{1n}^{\downarrow} \\ f_{21}^{\downarrow} & f_{22}^{\downarrow} - w^{\downarrow} & \cdots & f_{2n}^{\downarrow} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}^{\downarrow} & f_{n2}^{\downarrow} & \cdots & f_{nn}^{\downarrow} - w^{\downarrow} \end{array} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

同様に、式(21)、式(22)、式(23)を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\gamma_1}{(\theta_{11}^{\circ} - w^{\circ})} \quad \frac{\gamma_2}{(\theta_{22}^{\circ} - w^{\circ})} \quad \cdots \quad \frac{\gamma_n}{(\theta_{nn}^{\circ} - w^{\circ})} \\ \left(\begin{array}{cccc} \theta_{11}^{\circ} - w^{\circ} & \theta_{12}^{\circ} & \cdots & \theta_{1n}^{\circ} \\ \theta_{21}^{\circ} & \theta_{22}^{\circ} - w^{\circ} & \cdots & \theta_{2n}^{\circ} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta_{n1}^{\circ} & \theta_{n2}^{\circ} & \cdots & \theta_{nn}^{\circ} - w^{\circ} \end{array} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{f_{11}^{\alpha} - w^{\alpha}} \quad f_{12}^{\alpha} \quad \dots \quad f_{1n}^{\alpha} = 0 \\ f_{21}^{\alpha} \quad (\overline{f_{22}^{\alpha} - w^{\alpha}}) \quad \dots \quad f_{2n}^{\alpha} = 0 \\ \dots \dots \dots \\ f_{n1}^{\alpha} \quad f_{n2}^{\alpha} \quad \dots \quad (\overline{f_{nn}^{\alpha} - w^{\alpha}}) = 0 \end{array} \right\} \quad (22)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{\theta_{11}^{\beta} - w_{\beta}^{\alpha}} \quad \theta_{12}^{\beta} \quad \dots \quad \theta_{1n}^{\beta} = 0 \\ \theta_{21}^{\beta} \quad (\overline{\theta_{22}^{\beta} - w_{\beta}^{\alpha}}) \quad \dots \quad \theta_{2n}^{\beta} = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \theta_{n1}^{\beta} \quad \theta_{n2}^{\beta} \quad \dots \quad (\overline{\theta_{nn}^{\beta} - w_{\beta}^{\alpha}}) = 0 \end{array} \right\} \quad (23)$$

式(20)および式(21)より得られる n 次方程式を解き、アフィン荷重群 $\alpha_{j(m)}$ および $\gamma_{j(m)}$ を決定すればよい。そして式(22)と式(23)の係数マトリックスをみると Maxwell-Betti の相反法則により全く等しい値である。従って $\alpha_{j(m)}$ と $\gamma_{j(m)}$ との間の関係にも直交関係が成立していることになる。

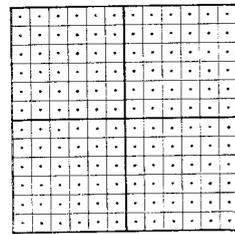
すなわちアフィン荷重群 $\alpha_{j(m)}$ と $\gamma_{j(m)}$ は直交条件式(24)を満足するわけである。

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \alpha_{j(l)} \cdot \alpha_{j(m)} = 0 \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{j(l)} \cdot \gamma_{j(m)} = 0 \\ \sum_{j=1}^n \gamma_{j(l)} \cdot \gamma_{j(m)} = 0 \quad l, m = 1, 2, \dots, n \quad (l \neq m) \end{array} \right\} \quad (24)$$

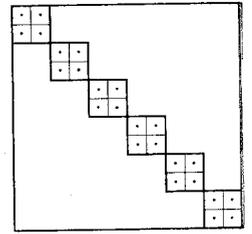
従って式(16)は式(25)となり 2 元連立方程式を解けばよいことになる。

$$\left[\begin{array}{cc} \bar{\delta}_{(m)(m)} & \bar{\delta}_{(m)(n+m)} \\ \bar{\delta}_{(n+m)(m)} & \bar{\delta}_{(n+m)(n+m)} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} X_{P(m)} \\ X_{T(m)} \end{array} \right] = -P \left[\begin{array}{c} \bar{\delta}_{(m)v}^{\alpha} \\ \bar{\delta}_{(m)v}^{\beta} \end{array} \right] \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (25)$$

$$0 \leq v \leq L$$



(a)



(b)

図-4

これらのマトリックスを図示すれば、図-4(a)が図-4(b)となり、非常に簡単な形になることがわかる。

さて、不静定量が求められると、任意の点 x における断面力、変形の影響線は式(26)によって計算出来る。

$$S_{xv} = S_{xv}^0 + \sum_{m=1}^n S_{xv}^{\alpha(m)} \cdot X_{P(m)} + \sum_{m=1}^n S_{xv}^{\beta(m)} \cdot X_{T(m)} \quad 0 \leq v, x \leq L \quad (26)$$

ここで $S_{xv}^{\alpha(m)}$ は基本系において状態 $X_{P(m)}=1$ および $X_{T(m)}=1$ による断面力、変形の点 x における値である。

図-3 よりあきらかなように、

$$S_{xv}^{\alpha(m)} = \sum_{j=1}^n S_{jx}^{\alpha} \cdot \alpha_{j(m)}$$

$$S_{xv}^{\beta(m)} = \sum_{j=1}^n S_{jx}^{\beta} \cdot \gamma_{j(m)} \quad m = 1, 2, \dots, n \quad 0 \leq x \leq L$$

S_{xv}^0 は基本系に $P=1$ が動くときの断面力および変形の影響線である。

今、曲線連続桁の曲げ剛性 (EJ_x)、ねじり剛性 (GJ_a)、曲げねじり剛性 (EJ_w) が全径間一定で各支間 ($r \cdot \varphi$) が等間隔のときは、垂直アフィン荷重およびねじりアフィン荷重群を式(27)のようにとれば式(20)…式(23)の n 次方程式を解く必要はなく直ちに解析することが出来る。

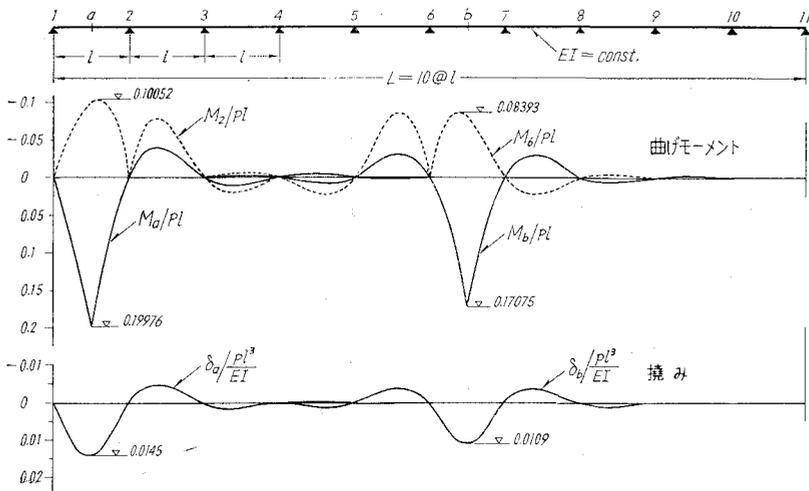


図-5

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{j(m)} &= \sin \frac{m\pi j}{n} \\ \gamma_{j(m)} &= \sin \frac{m\pi j}{n} \end{aligned} \right\} \quad (27) \quad j, m=1, 2, \dots, n,$$

なお、ここに示される断面力および変形量は曲げねじりを考慮した場合や無視した場合のいずれについても適用出来る。単純曲線桁の微分方程式の一般解は文献2)を参照されたい。

3. 計算例

(1) 直線連続桁

等径間 (l)、曲げ剛性 (EI) 一定の10径間連続桁を計算すれば図-5のようになる。又単純桁(支間= l)から12径間連続桁(各径間等間隔= l)までの曲げモーメントとたわみを比較すると、図-6となる。

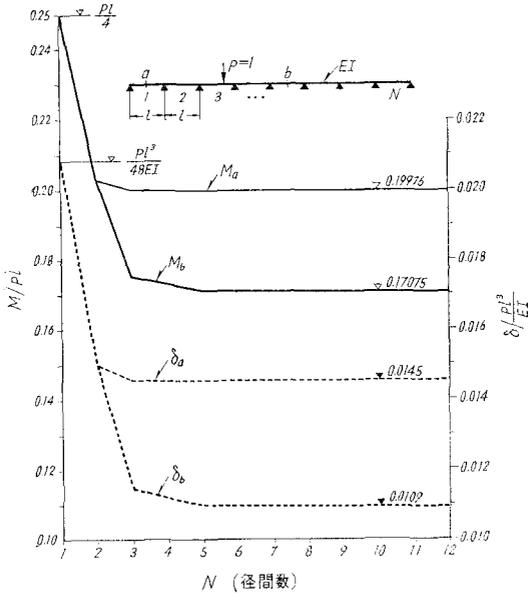


図-6

(2) 曲線連続桁

等径間 ($l=r\varphi$)、曲げ剛性 (EJ_x)、ねじり剛性 (GJ_d)、曲げねじり剛性 (EJ_w) が一定の7径間曲線連続桁を計算すれば図-7となる。ここで、断面は I-Section で $J_x = 4.2 \times 10^{-3} \text{ [m}^4\text{]}$ 、 $J_d = 2.4 \times 10^{-6} \text{ [m}^4\text{]}$ 、 $J_w = 2.5 \times 10^{-5} \text{ [m}^6\text{]}$ 、 $r=50 \text{ [m]}$ 、 $\varphi=0.2 \text{ [rad]}$

又、単純曲線桁 ($l=r\varphi$) から12径間曲線連続桁(各径間等間隔= l)までの曲げモーメントおよび垂直変位を開き断面 (I-Section) と閉じ断面 (Box-Section) について比較すると図-8となる。ここで両断面の曲げ剛性 (EJ_x) は等しくおいてある。

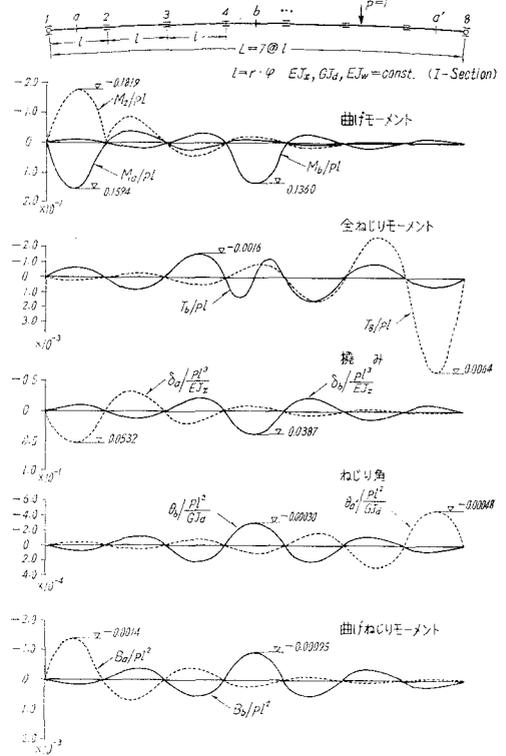


図-7

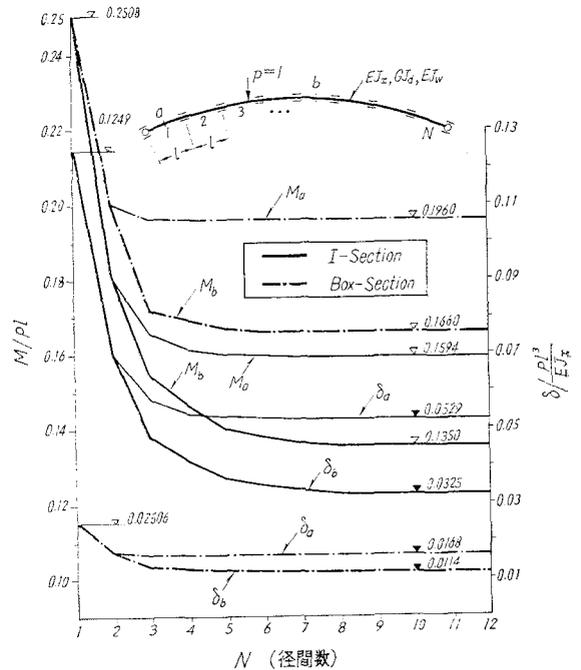


図-8

4. 結 論

アフィン荷重法によれば n 元連立方程式を解く代りに n 次方程式を解けばよいだけでその他の計算は全くないに等しい。しかも等径間連続桁のように規則性のある構造物に対しては正弦曲線を用いると n 次方程式を解く必要がないのであるからアフィン荷重法の特長がここで特別発揮されるわけである。

又、計算例をみると明白のように、直線および曲線連続桁とも 5 径間連続桁以上は特に計算する必要がなく、曲線連続桁の場合、開き断面と閉じ断面の形状によってその断面力および変形に大きな違いがあることに留意すべきこと

を示している。おわりに本論文作成にあたって助言を下された北大工博渡辺教授に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Wolfhard Klemp: 「Ein neues Verfahren der Trägerrostberechnung」 Beton und Stahlbeton bau Heft 1 Januar 1956.
- 2) 稼農知徳: 「曲げねじりを考慮した曲線格子桁の荷重分配性状について」技術資料, 第 23 号, 1967.
- 3) Leonhardt. Andrä: 「Die vereinfachte Trägerrostberechnung」 1950.
- 4) H. Homberg: 「 Kreuzwerke」 1951.