

ダムコンクリート内部温度の平面分布に及ぼす 外気温度の影響について

学生員 ○藤 田 睦 博*
正 員 山 岡 勲**

ま え が き

マスコンクリートの初期ひび割れ発生の諸原因のうちで最も重要なものは、熱応力によるものである。

マスコンクリートは、硬化熱のために温度が上昇し、最高温度に達すると降下しやがて一定温度に近づく。この間外部の気象条件によってコンクリート内部に温度勾配が生じて熱応力発生の原因となる。

本論文は、矩形水平断面の周辺境界が非定常の外気温度にさらされている場合について Fourier 級数と du Hamel の定理を用いて、コンクリート内部温度の平面分布の時間的变化を解析的に求め、この計算値と、北海道大学(土木)防災研究室で行なった実験結果とを比較考察したものである(この境界条件に対する平板熱伝導方程式の解析計算は、従来余り例をみない)。更に金山ダムの昭和38年度21 BL (EL. 333.750)における内部温度の実測結果とも比較したが本計算法は内部発生熱応力の解析に必要な温度分布資料を十分正確に与えるものと認められた。

1. 仮定及び境界条件

解析にあたって、まず上下方向の熱の移動はないものとする。ダムコンクリートのように上方に積み上げられるマスコンクリートでは、熱の発散は主として側壁より行なわれると考えられるからである。次に外気とコンクリート側表面との境界においては、ニュートンの冷却¹⁾の法則が成立するものとする。ニュートンの冷却の法則によれば、図-1において、熱伝導により単位時間 dt に物体内部から物体の表面(面素 ds)に出て来る熱量 q は、次式で表わされる。

$$q = -\lambda \left[\frac{\partial \theta}{\partial n} \right]_s \cdot ds \cdot dt \quad (1.1)$$

ただし、 λ は熱伝導率では、 n 表面部分に垂直で原体内部から外界へ向く座標である。又 $[\partial \theta / \partial n]_s$ は、その方向の温

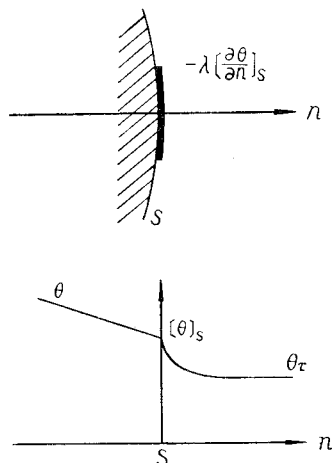


図-1

度勾配の表面における値を示す。

表面で単位時間、単位面積における発熱量を Q とすると、表面部分の発生する熱量は、 $Q \cdot ds \cdot dt$ である。表面は体積を有しないから、これら2種の熱は蓄積されることなくそのまま熱伝達によって外界媒質へ流れ去らなければならない。今表面部分の温度を $[\theta]_s$ 、これに接する外界温度を θ_a 、熱伝達率を η とすれば、外界媒質へ去る熱量は、 $\eta ([\theta]_s - \theta_a) \cdot ds \cdot dt$ である。よって

$$-\lambda \left[\frac{\partial \theta}{\partial n} \right]_s \cdot ds \cdot dt + Q \cdot ds \cdot dt = \eta ([\theta]_s - \theta_a) \cdot ds \cdot dt \quad (1.2)$$

ここで

$$h = \eta / \lambda \quad (\text{相対熱伝導率}) \quad (1.3)$$

とおいて上式を書き直すと¹⁾

$$\left[\frac{\partial \theta}{\partial n} + h (\theta - \theta_a) - \frac{Q}{\lambda} \right]_s = 0 \quad (1.4)$$

コンクリートの水和熱は、各部分において均等に発生するが、表面分における発熱量 Q は、他の2項に比して無視してさしつかえないので、(1.4)式は次のようになる。

* 北海道大学大学院 工学研究科

** 北海道大学工学部 教授 工博

$$\left[\frac{\partial \theta}{\partial n} + h(\theta - \theta_a) \right]_s = 0 \quad (1.5)$$

熱伝達率 η [kcal/m² hr °C] は、次のような値をとる。

静止している空気 1~20 kcal/m² hr °C
 流れている空気 10~250 kcal/m² hr °C

コンクリートブロック水平断面形は、境界条件が入れやすく、実際上にも例の多い矩形断面を採った。したがって外周4面の境界において上の条件が成立していると考えれば、図-2の斜線部の温度分布がわかると、断面及び境界条件の対称性から全断面の温度分布がわかる。又 x 軸、 y 軸上において、温度分布が対称であるため熱の移動はなく、断熱状態と同じ状態を満足しているので、 x 軸、 y 軸上では、温度勾配は0である。故に

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \quad (1.6)$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \quad (1.7)$$

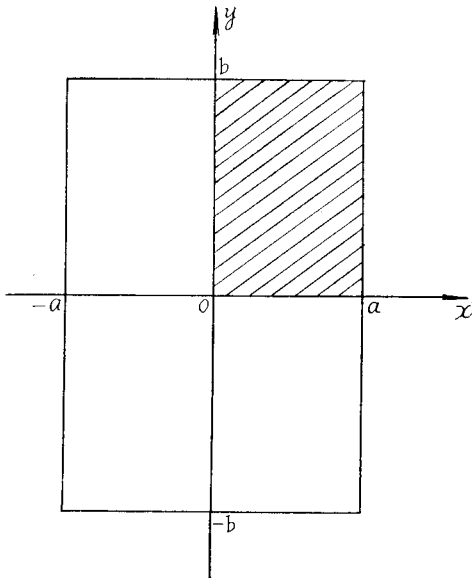


図-2

2. 熱伝導の基礎方程式

内部に熱源がある場合の、2次元温度分布に関する基礎方程式は¹⁾

$$-\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + Q(x, y, t) \quad (2.1)$$

θ : 平面部温度

t : 打設時を0とするコンクリート材齢

$\kappa = \lambda / c\rho$ [m²/hr]

λ [kcal/m hr °C] 熱伝導率

c [kcal/kg °C] 比熱

ρ [kg/m³] 密度

$$Q(x, y, t) = q(x, y, t) / c \cdot \rho$$

Q : 発熱量

コンクリートの場合の熱源は、コンクリート自身の水和熱であって時間に関係し、 x, y には無関係である。従って(2.1)式は、次の如く書ける。

$$-\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + Q(t) \quad (2.2)$$

初期条件、境界条件は次のとおりである。

$$\left\{ \begin{array}{l} (\theta)_{t=0} = \theta_0 \end{array} \right. \quad (2.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=\pm a} = \pm \eta \{ (\theta)_{x=\pm a} - \theta_a(t) \} \end{array} \right. \quad (2.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=\pm b} = \pm \eta \{ (\theta)_{y=\pm b} - \theta_a(t) \} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \end{array} \right. \quad (2.6) \cdot (2.6)$$

θ_0 : コンクリート打設時の温度

$\theta_a(t)$: 外気温

η : 熱伝達率 [kcal/m² hr °C]

今 $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ とおけば

$$-\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \kappa \nabla^2 \theta_1 \quad (2.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\theta_1)_{t=0} = 0 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right)_{x=\pm a} = \pm \eta \{ (\theta_1)_{x=\pm a} - \theta_a(t) \} \end{array} \right. \quad (2.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right)_{y=\pm b} = \pm \eta \{ (\theta_1)_{y=\pm b} - \theta_a(t) \} \end{array} \right. \quad (2.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \end{array} \right. \quad (2.12) \cdot (2.13)$$

$$-\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = \kappa \nabla^2 \theta_2 + Q(t) \quad (2.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\theta_2)_{t=0} = 0 \end{array} \right. \quad (2.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right)_{x=\pm a} = \pm \eta \{ (\theta_2)_{x=\pm a} - \theta_a(t) \} \end{array} \right. \quad (2.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right)_{y=\pm b} = \pm \eta \{ (\theta_2)_{y=\pm b} - \theta_a(t) \} \end{array} \right. \quad (2.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \end{array} \right. \quad (2.18) \cdot (2.19)$$

$$-\frac{\partial \theta_3}{\partial t} = \kappa \nabla^2 \theta_3 \quad (2.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\theta_3)_{t=0} = 0 \end{array} \right. \quad (2.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial x} \right)_{x=\pm a} = \pm \eta \{ (\theta_3)_{x=\pm a} - \theta_a(t) \} \end{array} \right. \quad (2.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial y} \right)_{y=\pm b} = \pm \eta \{ (\theta_3)_{y=\pm b} - \theta_a(t) \} \end{array} \right. \quad (2.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial x} \right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \end{array} \right. \quad (2.24) \cdot (2.25)$$

ただし

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

この境界値問題を Fourier 級数でとくことにして²⁾,

各々 θ_1 , θ_2 , θ_3 を求めその和をとると

$$\begin{aligned} \theta = & \frac{4}{a \cdot b} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \exp \left(-\frac{t}{T_{xl,ym}} \right) \cdot \frac{1}{S_{xl,ym}} \cdot \cos \\ & \left(\frac{\mu_{xl}}{a} x \right) \cdot \cos \frac{\mu_{ym}}{b} y \times \int_0^t \theta_a(\tau) \exp \left(-\frac{t-\tau}{T_{xl,ym}} \right) \cdot \\ & d\tau + \frac{4}{ab} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{S_{xl,ym}} \cos \frac{\mu_{xl}}{a} x \cos \frac{\mu_{ym}}{b} y \\ & \times \int_0^t \int_0^a \int_0^b Q(\tau) \cdot \cos \frac{\mu_{xl}}{a} \lambda \cdot \cos \frac{\mu_{ym}}{b} \mu \cdot d\lambda \cdot d\mu \\ & \times \exp \left(-\frac{t-\tau}{T_{xl,ym}} \right) \cdot d\tau + \frac{4}{ab} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \exp \\ & \left(-\frac{t}{T_{xl,ym}} \right) \frac{1}{S_{xl} \cdot S_{ym}} \times \cos \frac{\mu_{xl}}{a} x \cdot \cos \frac{\mu_{ym}}{b} y \\ & \times \int_0^a \int_0^b \cos \frac{\mu_{xl}}{a} \lambda \cdot \cos \frac{\mu_{ym}}{b} \mu \cdot d\lambda \cdot d\mu \quad (2.26) \end{aligned}$$

ただし

$$\frac{1}{T_{xl,ym}} = \frac{1}{T_{xl}} + \frac{1}{T_{ym}} \quad (2.27)$$

$$\frac{1}{T_{xl}} = \frac{H}{\mu_{xl}^2}, \quad H_x = \frac{a^2}{\kappa}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{c\rho} \quad (2.28)$$

$$\frac{1}{T_{ym}} = \frac{H_y}{\mu_{ym}^2}, \quad H_y = \frac{b^2}{\kappa} \quad (2.29)$$

$$S_{xl} = 1 + \frac{G_x}{G_x^2 + \mu_{xl}^2} \quad (2.30)$$

$$S_{ym} = 1 + \frac{G_y}{G_y^2 + \mu_{ym}^2} \quad (2.31)$$

$$\mu_{xl} \cdot \tan \mu_{xl} = \frac{\eta a}{\lambda} = G_x \quad (2.32)$$

$$\mu_{ym} \cdot \tan \mu_{ym} = \frac{\eta b}{\lambda} = G_y \quad (2.33)$$

3. 外気温及び発熱量

(2.26) 式において、解析解が求まったが、これにはまだ2つの未知関係数が含まれている。1つは、外界温度 $\theta_a(t)$ 、他の1つは発熱量 $Q(t)$ である。ここでは、実測気温を Fourier 級数で近似して計算式に入れた。これらの近似式は

(北大実験)

$$\begin{aligned} \theta_a(t) = & 4.2500 + 2.0134 \cos t - 5.2 \cos 2t + 3.45 \cos 3t \\ & + 4.20 \cos 4t + 2.1866 \cos 5t + 1.425 \cos 6t \\ & - 0.6741 \sin t - 1.4145 \sin 2t - 0.1667 \sin 3t \\ & - 0.433 \sin 4t + 0.3074 \sin 5t \quad (2.40) \end{aligned}$$

(金山ダム 昭和38年)

$$\begin{aligned} \theta_a(t) = & 2.75 - 0.9804 \cos t + 2.175 \cos 2t - 1.4 \cos 3t \\ & - 0.275 \cos 4t + 0.7804 \cos 5t + 0.75 \cos 6t \\ & - 2.056 \sin t - 0.2742 \sin 2t + 0.8 \sin 3t \\ & - 0.332 \sin 4t - 0.0935 \sin 5t \quad (2.50) \end{aligned}$$

実測気温と、近似式を比較したのが図-3、図-4である。図によると近似式で外気温をかなり正確に表わされていることがわかる。

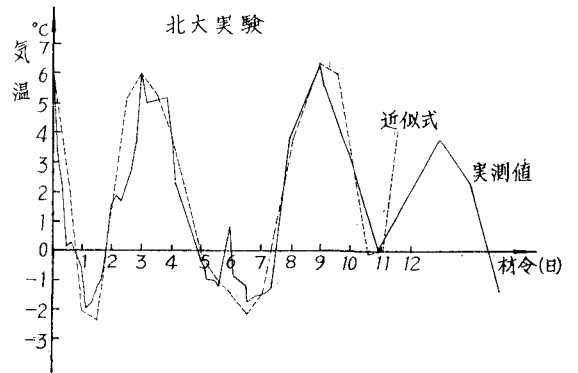


図-3

又発熱量 $Q(t)$ は、断熱温度上昇試験結果より求めた。この試験装置は、図-5に示してある。表-1にこの試験装置により測定した断熱温度上昇を示す。断熱温度上昇試験は、いずれも北海道開発局土木試験所コンクリート研究室で行なわれた。

表-1の結果から温度上昇度を求めて、曲線で近似させた

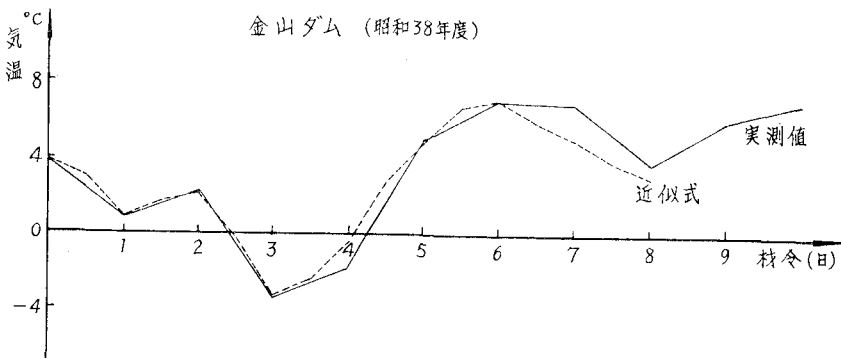


図-4

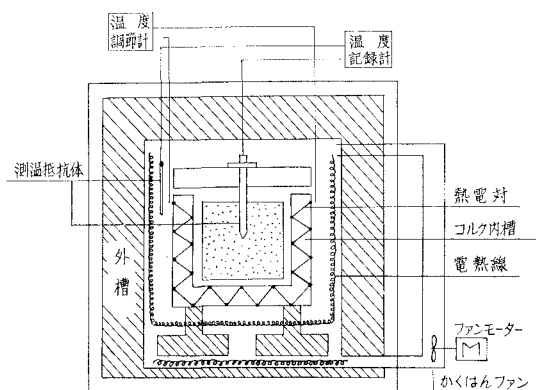


図-5 断熱温度上昇試験装置

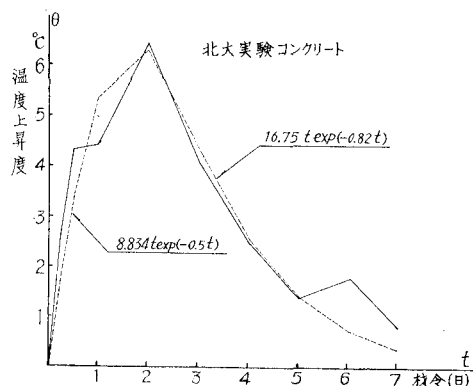


図-7

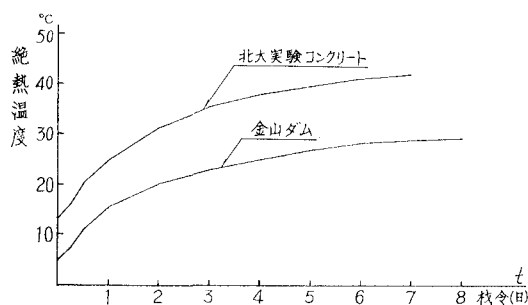


図-6

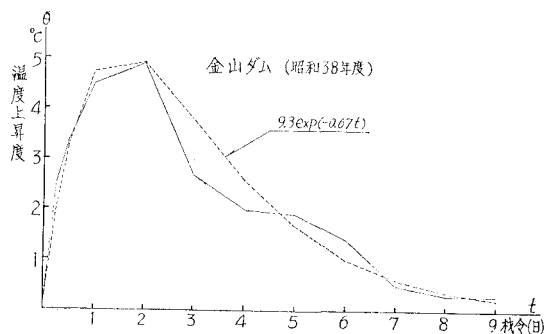


図-8

表 - 1

材 齢 (日)	金山ダム 昭和 38 年度			北大実験コンクリート		
	絶熱温度 上 (°C)	温度上昇 (°C)	温度上昇度 (°C)	絶熱温度 上 (°C)	温度上昇 (°C)	温度上昇度 (°C)
0	5.0	0	0	13.4	0	0
1/4	7.5	2.5	2.5	16.0	2.6	2.6
1/2	10.9	5.9	3.4	20.3	6.9	4.3
1	15.4	10.4	4.5	24.7	11.3	4.4
2	20.3	15.3	4.9	31.2	17.8	6.5
3	23.0	18.0	2.7	35.3	21.9	4.1
4	25.0	12.0	2.0	37.8	24.4	2.5
5	26.9	21.9	1.9	39.2	25.8	1.4
6	28.3	23.3	1.4	41.0	27.6	1.8
7	28.8	23.8	0.5	41.8	28.4	0.8
8	29.1	24.1	0.3			
9	29.4	24.4	0.3			

結果が、図-7、図-8である。

4. 北大における実験³⁾

屋外に 3×3×0.5 m の模型マスコンクリートを打設し、内部に抵抗温度計、歪計等を埋設した。図-9参照。又なるべく仮定及び実際のマスコンクリートと同じ条件にする

ために、コンクリート打設前に基礎コンクリートを厚さ 10 cm に打った。更に上下方向の熱の移動を防ぐため上部表面を SP 板で被った。打設したコンクリートは、ダムコンクリートに最も近い配合とした。表-2にその示方配合を示す。又表-3は金山ダム昭和 38 年の示方配合である。

又表-5に金山ダムの熱的性質を示す。

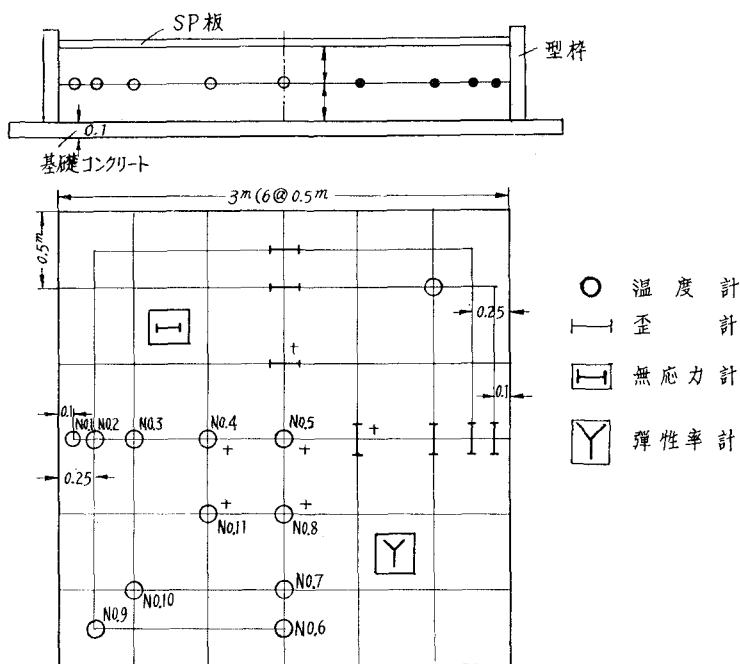


図-9

表-2 実験コンクリート示方配合

最大寸法 (mm)	スランブ (cm)	空気量 (%)	S/A	W/C	W	V			W		
						C	S	G	C	S	G
40	5±1.5	4±1	38	55	121	72	295	482	220	812	1,300

セメント：富士高炉 B 種

G の割合 { 40~20 48% 20~10 32%
 10~5 20%

表-3 金山ダム (昭和 38 年) コンクリート示方配合 (B 配合)

粗骨材 最大寸法 (mm)	スランブ の範囲 (cm)	空気量 の範囲 (%)	単位セ メント量 W (kg/cm³)	単位水量 W/C (%)	水セメ ント比 s/a (%)	絶対細 骨材率 S (kg/cm³)	単位粗骨材量 (kg)				AE 剤ウ ィンゾル 20%液 (cc)
							29% mm 5-20	26% mm 20-40	29% mm 40-80	16% mm 80-150	
150	4±1	4±1	180	101	56.1	26.4	433	418	466	257	200

表-4 金山ダムの熱的性質

単位容積 (kg/m³)	比 熱 (kcal/kg°C)	熱伝導率 (kcal/mh°C)	熱拡散率 (m²/h)	
			間 接 法	直 接 法
2.404 (10)	0.239 (13)	1.67 (11)	0.00291	0.00275(13)
2.400 (27)	0.246 (27)	1.68 (30)	0.00285	0.00279(14)
2.397 (10)	0.254 (13)	1.65 (12)	0.00281	0.00299(8)

() 内は材齢を示す

5. 計算及び計算結果

(2.26) 式は、2重の無限級数であり、しかも (2.32) 式

$\mu \tan \mu = G$ (G : 常数) という超越方程式の根を無限個まで求めねばならない。実用的には、10 個程度で充分である。 G の値を変化させて μ を求めたのが表-5 である (使用電子計算機は北大 HIPAC 103)。

計算結果は、図-10 及び図-11 に示さる。図-10 は、測点 No. 5, No. 9, No. 10, No. 11 (図-9 参照) における内部温度の時間的変化を示し、図-11 A, B は、それぞれ材齢 3 日, 7 日における平面温度分布を図示したものである。

図-12 は、金山ダム昭和 38 年度の実測値と計算値による温度分布を図示したものである。

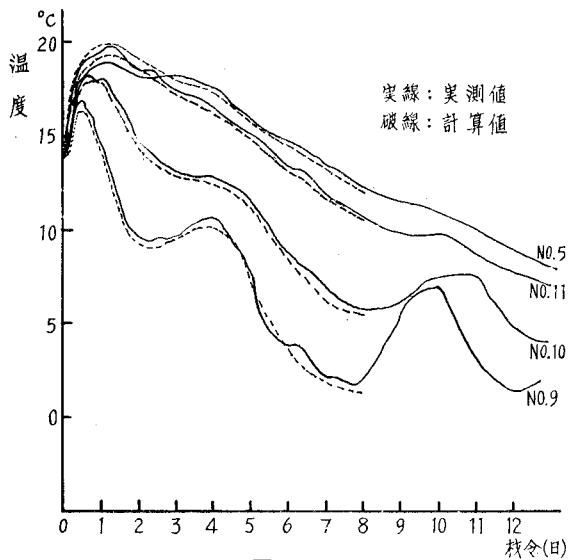
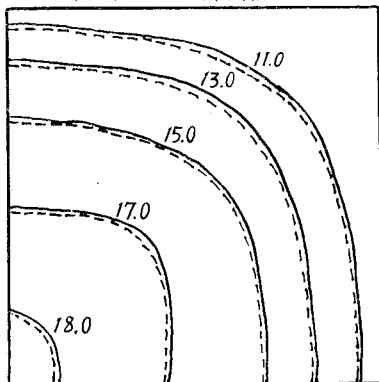


図-10

北大実験

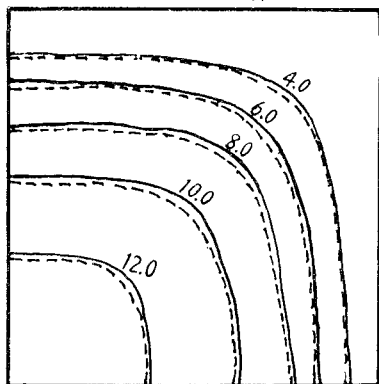
栈令3日 外気温12.0°C



実線: 実測値使用
破線: 計算値使用

図-11-A

栈令7日 外気温-3.0°C



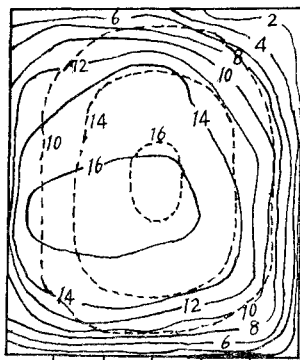
実線: 実測値使用
破線: 計算値使用

図-11-B

表-5

G	l	μl	$\sin \mu l$	$\cos \mu l$	ρ_l
0.01	1	0.100	0.0998	0.995	1.990
	2	3.145	-0.003	-1.000	1.001
	3	6.285	0.002	1.000	1.000
	4	9.426	-0.001	1.000	1.000
0.02	1	0.141	0.141	0.990	1.986
	2	3.148	-0.006	-1.000	1.002
	3	6.286	0.003	1.000	1.000
	4	9.427	-0.002	-1.000	1.001
0.05	1	0.222	0.220	0.976	1.966
	2	3.157	-0.015	-1.000	1.005
	3	6.291	0.008	1.000	1.001
	4	9.430	-0.005	-1.000	1.001
0.1	1	0.311	0.306	0.952	1.937
	2	3.173	-0.031	-1.000	1.010
	3	6.299	0.016	1.000	1.003
	4	9.435	-0.010	-1.000	1.001
0.2	1	0.433	0.420	0.908	1.879
	2	3.204	-0.062	-0.998	1.019
	3	6.315	0.032	0.999	1.005
	4	9.446	-0.021	-1.000	1.002
0.5	1	0.653	0.608	0.794	1.739
	2	3.292	-0.149	-0.989	1.045
	3	6.362	0.079	0.997	1.012
	4	9.477	-0.052	-0.999	1.006
1.0	1	0.861	0.759	0.652	1.575
	2	3.426	-0.280	-0.960	1.079
	3	6.437	0.153	0.988	1.024
	4	9.529	-0.104	-0.995	1.011
	5	12.645	0.0789	0.997	1.006
	6	15.771	-0.063	-0.998	1.004
	7	18.902	0.0528	0.999	1.003
	8	22.036	-0.0452	-0.999	1.002
	9	25.172	0.0396	0.999	1.002
	10	28.310	-0.0352	-0.999	1.001
	11	31.448	0.0317	1.000	1.001
	12	34.586	-0.0288	-1.000	1.001
2.0	1	1.079	0.882	0.472	1.387
	2	3.644	-0.481	-0.877	1.116
	3	6.578	0.291	0.957	1.042
	4	9.630	-0.204	-0.979	1.021
	5	12.722	0.155	0.988	1.012
	6	15.834	-0.126	-0.992	1.008
2.5	1	1.142	0.910	0.416	1.331
	2	3.732	-0.557	-0.831	1.124
	3	6.643	0.352	0.936	1.050
	4	9.678	-0.250	-0.968	1.025
	5	12.760	0.192	0.981	1.015
	6	15.864	-0.156	-0.988	1.010
3.0	1	1.314	0.967	0.254	1.187
	2	3.936	-0.713	-0.701	1.124
	3	6.814	0.506	0.862	1.070
	4	9.811	-0.377	-0.926	1.041
	5	12.935	0.361	0.933	1.026
	6	16.011	-0.298	-0.954	1.018

金山ダム 昭和38年 杓令4日



実線：実測値使用
破線：計算値使用

図-12

6. 結 論

実験例では、実測値と計算値が非常に良く一致しているが、金山ダムの例では、必ずしも計算値と一致していない。又金山ダムの例では、実測値による温度分布も対称ではない。これは、次のような理由によると思われる。金山ダムの内部温度測定断面は、図-13における斜線部であって2面の境界は、外気に露出しており、他の2面は、監査廊の側壁となっており、監査廊内の気温と、外気は、前者の方が常に高い。このため温度分布は、対称ではなくなる。一方計算では、4面の境界条件を全て等しいとして計算値を求めたので、実測値と、計算値が一致しないものと思われる。

実験例から、4面の境界条件が、等しいとみなせる場合には、コンクリートの熱的性質(熱伝導率、比熱、密度)及び発熱量、外気温度がわかると、解析的に内部温度分布が求められる。

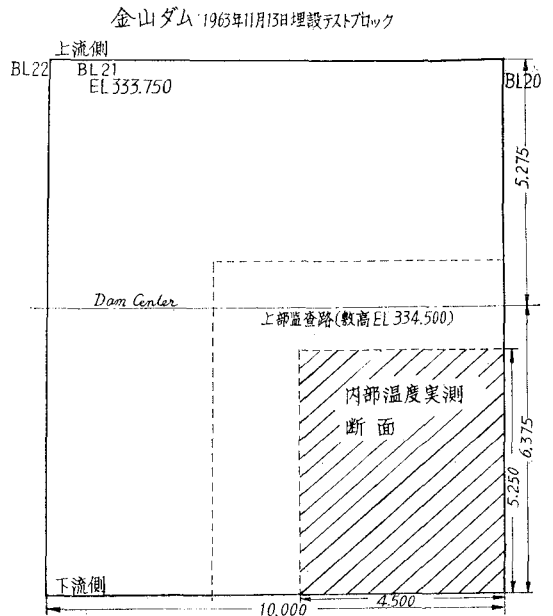


図-13

参 考 文 献

- 1) 橘 藤雄・甲藤好郎：熱伝達論・熱伝導論。共立出版社。
甲藤好郎：伝熱概論。養賢堂。
- 2) Puel V. Churchill: Fourier series and Boundary Value Problems. McGraw-Hill Inc., 1963.
小平吉男：三角級数の応用 上巻。岩波書店，昭24。
- 3) 山岡 勲・藤田睦博・田村義治：マスコンクリートの初期ひずみに及ぼす外気温度の影響に関する実験的研究。土木学会第21回年次学術講演会講演概要，昭41，5。