

曲線材を含む立体ラーメンの振動について

正員 芳村 仁*
正員 ○外 崎 忍**

序

高さの高いフレキシブルな橋脚を持つ曲線桁の振動を考えると、支承の方向が夫々異なっているため、この条件まで入れて解くことは極めて難解と思われる。しかし、この場合でも橋全体の固有振動数は、桁と橋脚を鉸結合とした系と、剛結合とした系との間にあるはずである。従って現段階でこのような構造の耐震安定計算を行なうときは、両方の系について安全を確かめれば良いと思う。

桁と橋脚が鉸結合の場合については、酒井忠明博士等の論文にその計算方法がのせられているので、本稿においては、剛結合の場合、即ち従方向にも横方向にも、ラーメン構造となるものについて扱うものであるが、計算は連成振動(精密計算)と単一方向の振動(簡略計算)と比較した。又模型実験を行なったのでその模型についての計算例と実験結果について報告する。

1. 模 型

模型は図-1および写真-1に示すように、剛度の等し

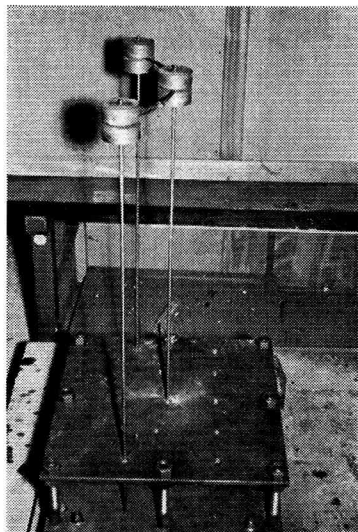


写真-1

い3本の橋脚を有する曲線材を含む立体ラーメンで、橋脚高66cm、半径25cm、橋長40cmである。又橋脚の直径は0.6cm、桁の断面は0.3×0.6cmとなっている。断面定

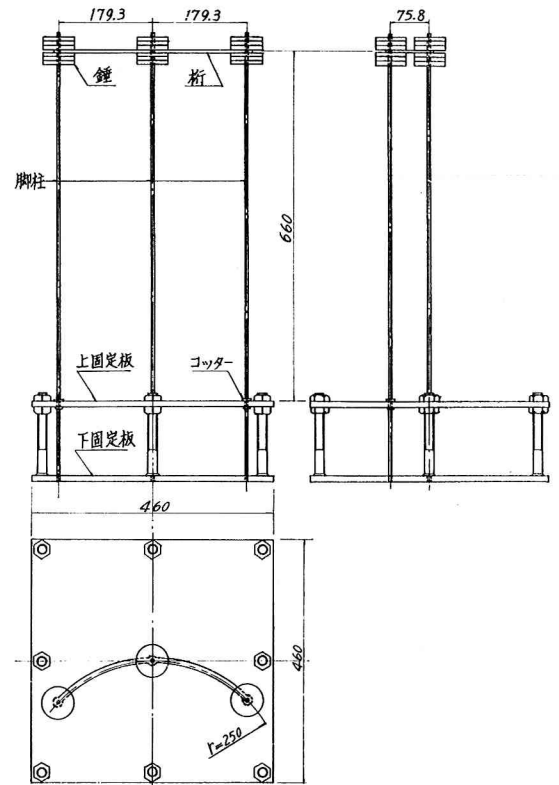


図-1

表-1

	桁	橋 脚
断 面 形 (cm)	$h=0.6 \quad b=0.3$	$r=0.3$
断 面 積 (cm ²)	0.18	0.2826
断面 2 次モーメント (cm ⁴)	水平軸 0.0054 垂直軸 0.00135	0.00635
振り抵抗モーメント (cm ⁴)	0.00369	0.01276

* 北海道大学工学部 助教授 工博

** 北海道開発局土木試験所

数は表-1に示す。

2. 計 算

i) 単位荷重を受けるときの構造系の解法

横方向に単位荷重を受けるとき(車進行方向に直角)

構造系の不静定力は図-2に示めすように12箇となる。この場合は対称荷重であるから $X_1=X'_1$, $X_2=X'_2$, …… $X_6=X'_6$ となる。この内 X_6 は橋脚の振りに関するものでダンパーを用いて橋桁の地震力を各橋脚に分散させるような場合に必要である。

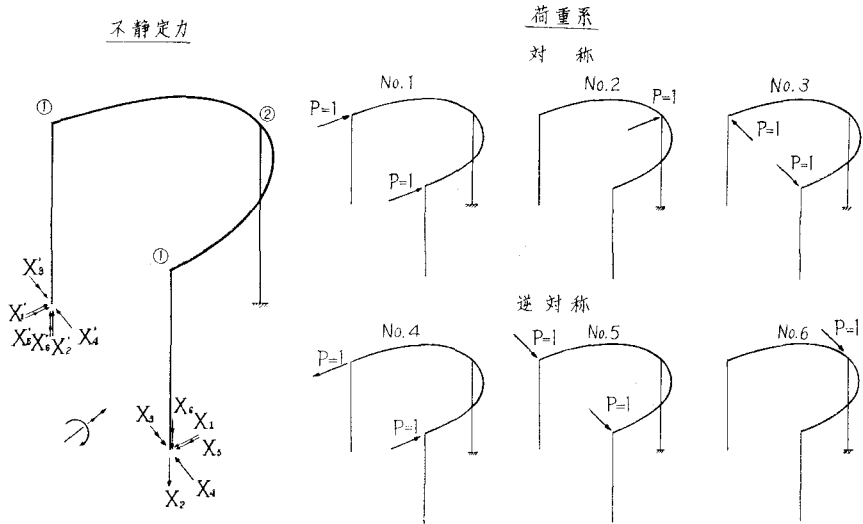


図-2

解は次の弾性方程式により求められる。

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} & \delta_{15} & \delta_{16} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} & \delta_{25} & \delta_{26} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \delta_{34} & \delta_{35} & \delta_{36} \\ \delta_{41} & \delta_{42} & \delta_{43} & \delta_{44} & \delta_{45} & \delta_{46} \\ \delta_{51} & \delta_{52} & \delta_{53} & \delta_{54} & \delta_{55} & \delta_{56} \\ \delta_{61} & \delta_{62} & \delta_{63} & \delta_{64} & \delta_{65} & \delta_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \delta_{30} \\ \delta_{40} \\ \delta_{50} \\ \delta_{60} \end{pmatrix} \quad (1)$$

ここで $\delta_{10}, \delta_{20}, \dots, \delta_{60}$ は静定系に単位荷重の作用したときの $X_1, X_2, \dots, X_6$ 方向の変位, $\delta_{11}, \delta_{12}, \dots, \delta_{16}$ は, 夫々 $X_1, X_2, \dots, X_6$ が作用したときの X_1 方向の変位である。これらはいづれも曲線桁の曲げと振りの影響が入ってくるので計算がやや複雑になってくる。

例えば δ_{11} について考えると 図-3を参考にして

$$\delta_{11}^1 = \frac{1}{3} \frac{l^3}{EI_p} \dots\dots\dots \text{自由脚の変位}$$
$$\delta_{11}^2 = \frac{2}{3} \frac{l^3}{EI_p} \dots\dots\dots \text{固定脚の変位}$$

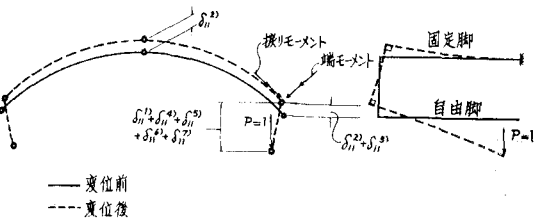


図-3

$$\delta_{11}^3 = \frac{r^3}{EI_{gv}} \left[\varphi \sin^2 \varphi + \frac{3}{2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} \varphi - 2 \sin \varphi \right] \dots\dots\dots \text{桁面内の変位}$$
$$\delta_{11}^4 = \frac{l^2 r \sin^2 \varphi}{EI_{gh}} \left[\left(\frac{1+C}{2} \right) (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi) - C \sin \varphi \cos \varphi \right] \dots\dots\dots \text{曲線桁の端モーメントによる接線方向変位の } X_1 \text{ 方向成分}$$
$$\delta_{11}^5 = \frac{l^2 r \sin \varphi \cos \varphi}{EI_{gh}} \frac{(C-1)}{2} \sin^2 \varphi \dots\dots\dots \text{曲線桁の端モーメントによる接線直角方向変位の } X_1 \text{ 方向成分}$$
$$\delta_{11}^6 = \frac{l^2 r \cos^2 \varphi}{EI_{gh}} \left[\frac{1+C}{2} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) + C \sin \varphi \cos \varphi \right] \dots\dots\dots \text{曲線桁の振りモーメントによる接線直角方向変位の } X_1 \text{ 方向成分}$$
$$\delta_{11}^7 = \frac{l^2 r \sin \varphi \cos \varphi}{EI_{gh}} \frac{(C-1)}{2} \sin^2 \varphi \dots\dots\dots \text{曲線桁の振りモーメントによる接線方向変位の } X_1 \text{ 方向成分}$$

$$\delta_{11} = \delta_{11}^1 + \delta_{11}^2 + \delta_{11}^3 + \delta_{11}^4 + \delta_{11}^5 + \delta_{11}^6 + \delta_{11}^7$$

ここで $C = \frac{EI_{gh}}{GJ_T}$

I_p = 橋脚の断面2次モーメント
 I_{gv} = 桁の縦軸に関する断面2次モーメント
 I_{gh} = " 横軸 " "

J_T = 桁の振り抵抗モーメント

l = 橋脚高

r = 半径

2φ = 中心角

縦方向に単位荷重を受けるとき(車進行方向)

この場合は逆対称荷重となるので、 $X_1 = -X'_1$, $X_2 = -X'_2$ …… $X_6 = -X'_6$ となり、弾性方程式は(1)と同様になる。又係数は中央橋脚まわりの回転による変位を考慮しなければならない。

以上は連成振動を扱うとき用いるが、単一方向の振動を扱うときは、荷重方向の不静定力のみ考えることにする。

このようにすると弾性方程式は横方向については。

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \delta_{30} \end{pmatrix} \quad (2)$$

となり、縦方向については

$$\begin{pmatrix} \delta_{22} & \delta_{24} & \delta_{25} \\ \delta_{42} & \delta_{44} & \delta_{45} \\ \delta_{52} & \delta_{54} & \delta_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{20} \\ \delta_{40} \\ \delta_{50} \end{pmatrix} \quad (3)$$

となる。

以上の弾性方程式より求められた解は表-2に示す。

表-2 (荷重系は図-2 参照)

荷 重 系	不 静 定 力					
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
No. 1	0.68500	2.68292	31.29047	0.28927	5.66909	2.10877
No. 2	0.32407	1.38401	14.61321	-0.17525	-4.17025	-1.0040
No. 3	0.01987	-0.04721	1.11995	0.03410	1.48451	2.29332
No. 4	-0.25980	-0.13467	-12.89091	0.04810	-3.67337	-7.91356
No. 5	0.10142	1.59704	0.39703	0.61713	24.18225	-3.01156
No. 6	0.10548	0.82714	2.52183	0.29765	11.28506	0.31440

又単一方向の振動(簡略計算)を行なう場合は、横方向振動には X_1 , X_2 , X_3 のみ、縦方向振動には X_2 , X_4 , X_5 の

みとなり解は表-3に示す。

表 - 3

荷 重 系	不 静 定 力					
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
No. 1	0.65120	2.0454	33.84591			
No. 2	0.29260	1.03905	15.44905			
No. 3		0.72425		0.25176	11.05407	
No. 4		1.40665		0.61336	26.73296	

ii) 固有振動週期の計算

本稿のような構造系の振動は多質点系の振動として取扱うことになる。固有振動週期の計算において、理論的には水平変位、回転変位、捩れ変位による慣性力を考えることになるが、水平変位以外は影響が少ないと見て省略する。

固有振動数の計算は、連成振動の場合は次式により求められる。

横方向振動の場合

$$\begin{vmatrix} (\alpha_{11}W_1 - g/n^2) & \alpha_{21}W_2 & \alpha_{31}W_1 \\ \alpha_{12}W_1 & (\alpha_{22}W_2 - g/n^2) & \alpha_{32}W_1 \\ \alpha_{13}W_1 & \alpha_{23}W_2 & (\alpha_{33}W_1 - g/n^2) \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

式中の係数は図-2を参考にして

α_{11} 荷重系 No. 1 のときの ① 点の No. 1 方向の

単位荷重変位

α_{21} " No. 2 " "

α_{31} " No. 3 " "

α_{12} " No. 1 のときの ② 点の No. 2 方向の

単位荷重変位

α_{22} " No. 2 " "

α_{32} " No. 3 " "

α_{13} " No. 1 のときの ③ 点の No. 3 方向の

単位荷重変位

α_{23} " No. 2 " "

α_{33} " No. 3 " "

W_1, W_2, W_3 は夫々点 ①, ②, ③ の載荷重の大きさ

n は固有振動数, g は重力の加速度

数値計算の結果を示めすと次のようになる。

$$\begin{vmatrix} (2.63596 \times 1.1735 - X) & 1.21627 \times 1.1735 & 0.11112 \times 1.1735 \\ 2.43284 \times 1.1735 & (1.31537 \times 1.1735 - X) & -0.10612 \times 1.1735 \\ 0.11112 \times 1.1735 & -0.05306 \times 1.1735 & (0.12049 \times 1.1735 - X) \end{vmatrix} = 0$$

但し $X = g/n^2$

同様に縦方向振動の場合は

$$\begin{vmatrix} (1.74123 \times 1.1735 - X) & 0.77757 \times 1.1735 & 0.42847 \times 1.1735 \\ 1.55513 \times 1.1735 & (0.79484 \times 1.1735 - X) & -0.06545 \times 1.1735 \\ 0.42847 \times 1.1735 & -0.03273 \times 1.1735 & (1.171515 \times 1.1735 - X) \end{vmatrix} = 0$$

又単一方向の振動の場合は

横方向振動について

$$\begin{vmatrix} (3.020205 \times 1.1735 - X) & 1.47819 \times 1.1735 \\ 2.93307 \times 1.1735 & (1.67028 \times 1.1735 - X) \end{vmatrix} = 0$$

縦方向振動について

$$\begin{vmatrix} (2.81084 \times 1.1735) & 0.904236 \times 1.1735 \\ 1.809567 \times 1.1735 & (1.142706 \times 1.1735 - X) \end{vmatrix} = 0$$

以上の条件式より n を求め、これより固有振動週期が得られる。固有振動週期の計算結果を表-4に示めす(但し、1次振動について)。

表-4

単 位 (Sec/Cycle)	連 成 振 動	単 一 方 向 振 動
横 方 向	0.4249	0.4630
縦 方 向	0.3465	0.3750

iii) 強制振動の計算

振動台を用いて強制振動を行なう場合、振動台の振幅に関する式を $y = a_0 \cos pt$ とすると減衰がないものとして、質点の振幅に関する式は $y_r = u_r a_0 \cos pt$ で表わされる。これより u_r は振動台と質点との振動の倍率を表わすことになる。各質点の u_r を求める式は次のように表わされる。

連成振動(横方向)の場合

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_{11}W_1 - 1/p^2)u_1 + \alpha_{21}W_2u_2 + \alpha_{31}W_1u_3 &= -1/p^2 \\ \alpha_{12}W_1u_1 + (\alpha_{22}W_2 - 1/p^2)u_2 + \alpha_{32}W_1u_3 &= -1/p^2 \\ \alpha_{13}W_1u_1 + \alpha_{23}W_2u_2 + (\alpha_{33}W_1 - 1/p^2)u_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

単一方向振動(横方向)の場合

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_{11}W_1 - 1/p^2)u_1 + \alpha_{21}W_2u_2 &= -1/p^2 \\ \alpha_{12}W_1u_1 + (\alpha_{22}W_2 - 1/p^2)u_2 &= -1/p^2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中 a_0 は振動台の振幅

p は角速度で週期を T とせば、 $p = 2\pi/T$

これより種々の p に対する各質点の振動倍率の応答が求められる。

3. 実験結果の考察

i) 固有振動週期

実測値と計算値の比較は表-5に示めすが、連成振動と

表-5 固有振動周期 (Sec/Cycle)

	計算値	実験値	備 考
	0.6234	—	質量 M は回転できる
	0.3117	—	質量 M は回転できない
	0.5830	—	橋桁と橋脚がヒンジ結合 (橋横方向第1次振動) 周期
	0.4249 0.4630	0.435	橋桁と橋脚が剛結 (橋横方向第1次振動) 周期
	0.3465 0.3750	0.350	同 上 (橋軸方向第1次振動周期)

注 橋桁と橋脚が剛結の計算値は、上段が連成振動、下段が単一方向振動。

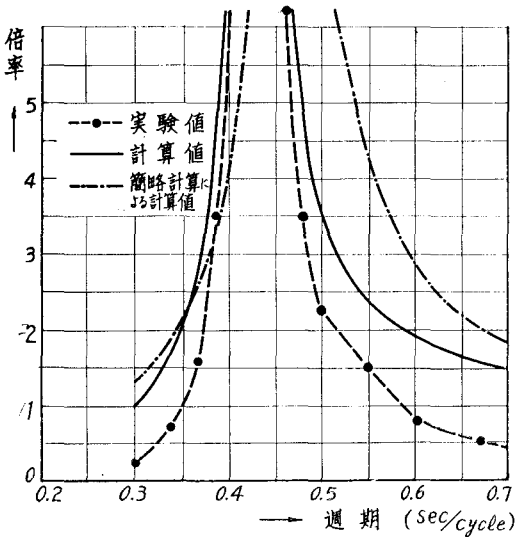


図-4

して計算した場合の計算値はよい精度で一致する。又単一方向の振動とした場合は約7%の誤差になってをり、構造系の不静定次数を減らした影響が現われている。

尚表-5には参考のため橋脚頭部重量が同じ場合の、単一柱の週期、上下端の撓角を固定した柱の週期、橋脚と桁が鉸結合の場合の週期も示した。

ii) 強制振動

強制振動における振動数と動的倍率との関係を図-4に夫々計算値と実測値とを示す。倍率については、計算では減衰を考えていないので実測値よりずれている。

む す び

本稿のように3本の橋脚をもつラーメンでも連成振動を計算するときは、相当計算が複雑となる。これより多経間になる場合は、橋脚1本につき不静定力が6箇増加するので非常に構造計算が複雑となる。しかし、序文でも述べたように実際の橋梁では振動に対する応答は桁と橋脚が鉸結合とした場合と剛結合とした場合の中間にくることになるので、一つの構造系に対してあまり高い精度で計算を行なう必要はないものとする。従って本実験で用いた模型に近いような構造では、単一方向のみの振動の計算でよいものと思われる。尚半径、橋長、桁と橋脚の剛度の関係がどのように影響するか今後検討して見たいと思っている。

参 考 文 献

酒井忠明：構造物の振動論。

酒井忠明：定山溪国道中山4号橋の動的解析。

William Griffel：Handbook of Formulas for Stress and Strain.

(参考)

曲線片持梁のたわみ、たわみ角、ねじり角の公式

図-5参照。

y = たわみ, S = たわみ角,

ϕ = ねじり角

集中荷重の場合

$$y = \frac{PR^3}{EI} K_1$$

$$S = \frac{PR^2}{EI} K_2$$

$$\phi = \frac{PR^2}{EI} K_3$$

等分布荷重の場合

$$y = \frac{WR^3}{EI} K_4$$

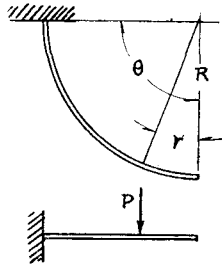


図-5

$$S = \frac{WR^2}{EI} K_5$$

$$\phi = \frac{WR^2}{EI} K_6$$

端モーメントの場合

$$y = \frac{MR^2}{EI} K_7$$

$$S = \frac{MR}{EI} K_8$$

$$\phi = \frac{MR}{EI} K_9$$

端振りモーメントの場合

$$y = \frac{T_0 R^2}{EI} K_3$$

$$S = \frac{T_0 R}{EI} K_9$$

$$\phi = \frac{T_0 R}{EI} K_{10}$$

$$K_1 = \frac{1-C}{2} \left[\cos r(\theta - r - \sin \theta \cos \theta) + \sin r \cos^2 \theta \right]$$

$$+ C \left[(\theta - r)(1 + \cos r) - \sin(\theta - r) - \sin \theta + \sin r \right]$$

$$K_2 = \frac{1-C}{2} \left[\cos r \sin^2 \theta - \sin r(\theta - r + \sin \theta \cos \theta) \right]$$

$$+ C \left[\cos r - \cos \theta - (\theta - r) \sin r \right]$$

$$K_3 = \frac{1-C}{2} \left[\cos r(\theta - r - \sin \theta \cos \theta) + \sin r \cos^2 \theta \right]$$

$$+ C \left[(\theta - r) \cos r - \sin \theta + \sin r \right]$$

$$K_4 = \frac{1}{2\theta} \left[(1 - \cos \theta)^2 + C(\theta - \sin \theta)^2 \right]$$

$$K_5 = \frac{1}{2\theta} \left[(1+C) \left\{ \sin \theta (2 - \cos \theta) - \theta \right\} - 2C \left\{ \cos \theta (\theta - \sin \theta) \right\} \right]$$

$$K_6 = \frac{1}{2\theta} \left[(1+C) (1 - \cos \theta)^2 - 2C \sin \theta (\theta - \sin \theta) \right]$$

$$K_7 = \frac{1-C}{2} \sin^2 \theta + C(1 - \cos \theta)$$

$$K_8 = \frac{1+C}{2} (\theta + \sin \theta \cos \theta) - C \sin \theta \cos \theta$$

$$K_9 = \frac{1-C}{2} \sin^2 \theta$$

$$K_{10} = \frac{1+C}{2} (\theta - \sin \theta \cos \theta) + C \theta \sin \theta \cos \theta$$