

曲げねじりを考慮した連続曲線格子桁の解析と計算

正員 渡辺 昇*

1. まえがき

図-1 のような曲げねじりを考慮した連続曲線格子桁 (25)

次不静定) の影響面を正しく求めるための理論解析法を示し、さらに、次表の断面諸元を用いて、数値計算を行なった結果を示すことにする。

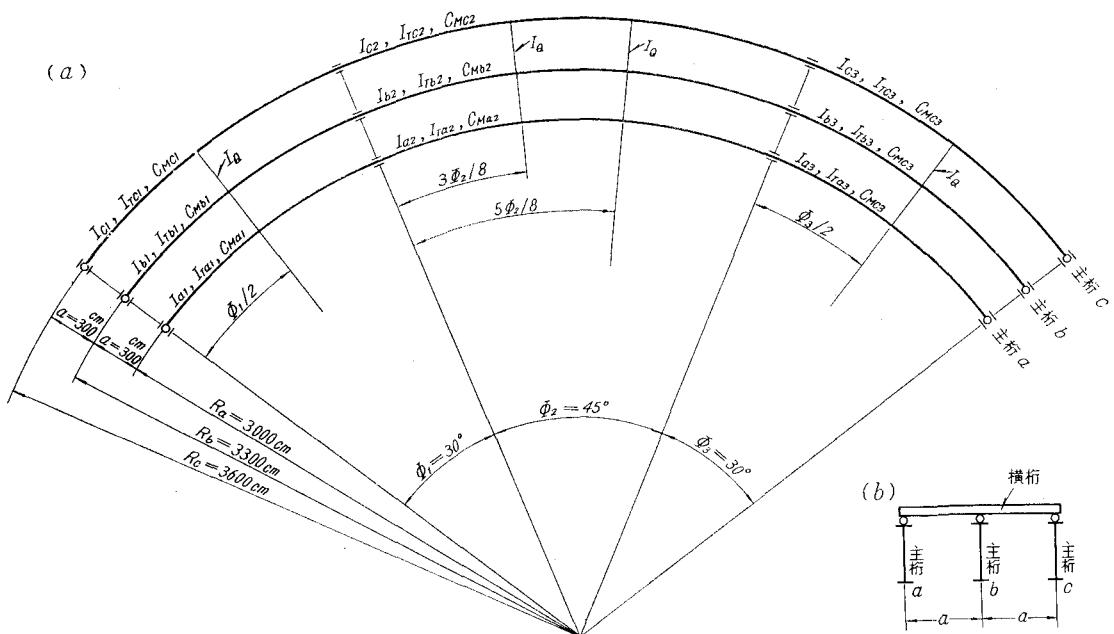


図-1

		第1径間	第2径間	第3径間
主桁 c	断面二次モーメント [cm ⁴] ねじり抵抗 [cm ⁴] 曲げねじり抵抗 [cm ⁶] 半径 [cm] 中心角 [度]	$I_{a1}=1320883$ $I_{Tc1}=188$ $C_{Mc1}=11615$ $R_a=3000$ $\phi_1=30$	$I_{a2}=1845849$ $I_{Tc2}=382$ $C_{Mc2}=286124$ $R_a=3000$ $\phi_2=45$	$I_{a3}=1320883$ $I_{Tc3}=188$ $C_{Mc3}=11615$ $R_a=3000$ $\phi_3=30$
主桁 b	断面二次モーメント [cm ⁴] ねじり抵抗 [cm ⁴] 曲げねじり抵抗 [cm ⁶] 半径 [cm] 中心角 [度]	$I_{b1}=1050625$ $I_{Tb1}=184$ $C_{Mb1}=92597$ $R_b=3300$ $\phi_1=30$	$I_{b2}=1441125$ $I_{Tb2}=377$ $C_{Mb2}=228096$ $R_b=3300$ $\phi_2=45$	$I_{b3}=1050625$ $I_{Tb3}=184$ $C_{Mb3}=92597$ $R_b=3300$ $\phi_3=45$
主桁 a	断面二次モーメント [cm ⁴] ねじり抵抗 [cm ⁴] 曲げねじり抵抗 [cm ⁶] 半径 [cm] 中心角 [度]	$I_{c1}=768398$ $I_{Tc1}=180$ $C_{Mc1}=71707$ $R_c=3600$ $\phi_1=30$	$I_{c2}=1092485$ $I_{Tc2}=373$ $C_{Mc2}=176638$ $R_c=3600$ $\phi_2=45$	$I_{c3}=768398$ $I_{Tc3}=180$ $C_{Mc3}=71707$ $R_c=3600$ $\phi_3=30$

横桁の断面二次モーメント $I_Q=418275$ [cm⁴]

* 北海道大学助教授 工博

2. 理 論

図-1(a)の連続曲線格子桁においては、各連続主桁と各横桁との連結は、図-1(b)のようにヒンジ結合であり、垂直格点力のみを連達するものとして解析する。いま図-2のように、連続主桁 b と各横桁(4本)とのヒンジ結合を解放したものを基本系にえらべば、これは4次不静定の取扱いをすることができ、対称構造であるから、4組の不静定組格点力 $X_{(1)}=1$, $X_{(2)}=1$, $X_{(3)}=1$, $X_{(4)}=1$ を解放格点に

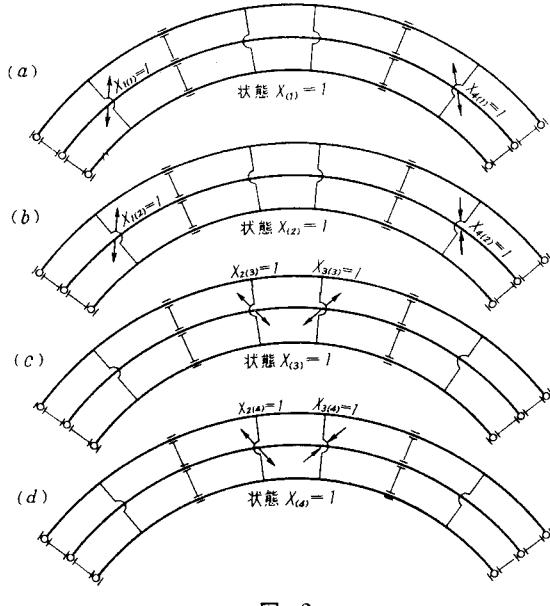


図-2

挿入する。ここで、 $X_{(1)}=1$ とは $X_{1(1)}=1$ と $X_{4(1)}=1$ となり成り、 $X_{(2)}=1$ とは $X_{1(2)}=1$ と $X_{4(2)}=1$ となり成り、 $X_{4(2)}=1$ は $X_{4(1)}=1$ に対しその力の方向を逆向きにする。また、 $X_{(3)}=1$ とは $X_{2(3)}=1$ と $X_{3(3)}=1$ となり成り、 $X_{(4)}=1$ とは $X_{2(4)}=1$ と $X_{3(4)}=1$ となり成り、 $X_{3(4)}=1$ は $X_{3(3)}=1$ に対しその力の方向を逆向きにする。そうすると、いま、図-1(a)の桁の上を垂直力 P が作用すると、次の4元連立仕事方程式をうる。

$$\left. \begin{aligned} & \delta_{(1)(1)}X_{(1)} + \delta_{(1)(2)}X_{(2)} \\ & + \delta_{(1)(3)}X_{(3)} + \delta_{(1)(4)}X_{(4)} = -P \cdot \delta_{(1)(0)}, \\ & \delta_{(2)(1)}X_{(1)} + \delta_{(2)(2)}X_{(2)} \\ & + \delta_{(2)(3)}X_{(3)} + \delta_{(2)(4)}X_{(4)} = -P \cdot \delta_{(2)(0)}, \\ & \delta_{(3)(1)}X_{(1)} + \delta_{(3)(2)}X_{(2)} \\ & + \delta_{(3)(3)}X_{(3)} + \delta_{(3)(4)}X_{(4)} = -P \cdot \delta_{(3)(0)}, \\ & \delta_{(4)(1)}X_{(1)} + \delta_{(4)(2)}X_{(2)} \\ & + \delta_{(4)(3)}X_{(3)} + \delta_{(4)(4)}X_{(4)} = -P \cdot \delta_{(4)(0)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 $\delta_{(m)(n)}$ は状態 $X_{(m)}=1$ の不静定組格点力と状態 $X_{(n)}=1$ の変形との間でなす仕事である。 $\delta_{(m)(0)}$ は、状

態 $X_{(m)}=1$ における P の作用点の垂直変位である。相反法則により

$$\delta_{(m)(n)} = \delta_{(n)(m)}$$

である。

また、組格点力の力学的性質から

$$\delta_{(1)(2)} = \delta_{(2)(1)} = 0, \quad \delta_{(1)(4)} = \delta_{(4)(1)} = 0,$$

$$\delta_{(3)(4)} = \delta_{(4)(3)} = 0, \quad \delta_{(2)(3)} = \delta_{(3)(2)} = 0$$

であるから、式(1)は次のように簡単化される。

$$\left. \begin{aligned} & \delta_{(1)(1)}X_{(1)} + \delta_{(1)(3)}X_{(3)} = -P \cdot \delta_{(1)(0)}, \\ & \delta_{(3)(1)}X_{(1)} + \delta_{(3)(3)}X_{(3)} = -P \cdot \delta_{(3)(0)}; \\ & \delta_{(2)(2)}X_{(2)} + \delta_{(2)(4)}X_{(4)} = -P \cdot \delta_{(2)(0)}, \\ & \delta_{(4)(2)}X_{(2)} + \delta_{(4)(4)}X_{(4)} = -P \cdot \delta_{(4)(0)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

いま、

$$D_1 = \begin{vmatrix} \delta_{(1)(1)} & \delta_{(1)(3)} \\ \delta_{(3)(1)} & \delta_{(3)(3)} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \delta_{(2)(2)} & \delta_{(2)(4)} \\ \delta_{(4)(2)} & \delta_{(4)(4)} \end{vmatrix} \quad (3)$$

とおき、 $P=1$ として動くことを考えれば、 $X_{(1)}$, $X_{(2)}$, $X_{(3)}$, $X_{(4)}$ の影響線 „ $X_{(1)}$ ”, „ $X_{(2)}$ ”, „ $X_{(3)}$ ”, „ $X_{(4)}$ ” は、次式を計算すればよい。

$$\left. \begin{aligned} „X_{(1)}“ &= -\frac{\delta_{(3)(3)}}{D_1} „\delta_{(1)(0)}“ + \frac{\delta_{(1)(3)}}{D_1} „\delta_{(3)(0)}“, \\ „X_{(3)}“ &= +\frac{\delta_{(3)(1)}}{D_1} „\delta_{(1)(0)}“ - \frac{\delta_{(1)(1)}}{D_1} „\delta_{(3)(0)}“, \\ „X_{(2)}“ &= -\frac{\delta_{(4)(4)}}{D_2} „\delta_{(2)(0)}“ + \frac{\delta_{(2)(4)}}{D_2} „\delta_{(4)(0)}“, \\ „X_{(4)}“ &= +\frac{\delta_{(4)(2)}}{D_2} „\delta_{(2)(0)}“ - \frac{\delta_{(2)(2)}}{D_2} „\delta_{(4)(0)}“ \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで、„ $\delta_{(1)(0)}$ ”, „ $\delta_{(2)(0)}$ ”, „ $\delta_{(3)(0)}$ ”, „ $\delta_{(4)(0)}$ ” はそれぞれ状態 $X_{(1)}=1$, $X_{(2)}=1$, $X_{(3)}=1$, $X_{(4)}=1$ における基本系(図-2)の垂直変位曲線である。

式(4)により、„ $X_{(1)}$ ”, „ $X_{(2)}$ ”, „ $X_{(3)}$ ”, „ $X_{(4)}$ ” が求まれば、図-1の連続曲線格子桁の任意点 x における断面力または変形の影響線 „ S_x ” は、次式より求まる。

$$\left. \begin{aligned} „S_x“ &= „S_x^0“ + S_{x(1)} „X_{(1)}“ \\ &+ S_{x(2)} „X_{(2)}“ + S_{x(3)} „X_{(3)}“ + S_{x(4)} „X_{(4)}“ \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで、„ S_x^0 ” は、基本系の点 x における断面力または変形の影響線であり、 $S_{x(m)}$ は状態 $X_{(m)}=1$ における基本系の断面力図または変形図における点 x の値である。

結局、式(5)を計算するためには、式(4)における基本系の変形曲線と、式(5)における基本系の断面力図または変形図が必要となる。

そこで、式(4)の計算であるが、それには、図-2の基本系の変形曲線、すなわち、曲線3径間連続主桁 a 、曲線3径間連続主桁 b 、曲線3径間連続主桁 c などの変形曲線をあらかじめ求めておかなくてはならない。それには、次のようにする。

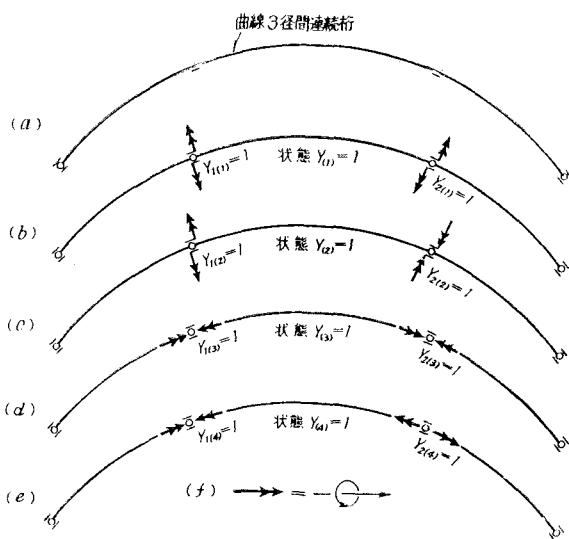


図-3

たとえば、図-3(a)のような曲線3径間連続主桁 a のみをとり出してその解析の方法をのべると次のとおりである。すなわち、2個の中間支点の桁の中にヒンジを挿入した構造を基本系にえらべば、これは4次不静定の取扱いをすることができ、対称構造であるから、図-3(b), (c)のように、2組の不静定組曲げモーメントと、図-3(d), (e)のように、2組の不静定組曲げねじりモーメントとを挿入する。ねじりのベクトルの方向は、図-3(f)のとおりである。ここで、 $Y_{(1)}=1$ とは $Y_{1(1)}=1$ と $Y_{2(1)}=1$ となり成り、 $Y_{(2)}=1$ とは $Y_{1(2)}=1$ と $Y_{2(2)}=1$ となり成り、 $Y_{(3)}=1$ は $Y_{2(1)}=1$ に対し、その力の方向を逆向きにする。また、 $Y_{(4)}=1$ とは $Y_{1(3)}=1$ と $Y_{2(3)}=1$ となり成り、 $Y_{(4)}=1$ とは $Y_{1(4)}=1$ と $Y_{2(4)}=1$ となり成り、 $Y_{2(4)}=1$ は $Y_{2(3)}=1$ に対し、その力の方向を逆向きにする。そうすると、いま、図-3(a)の桁の上を垂直力 P が作用すると、次の4元連立方程式をうる。

$$\left. \begin{aligned} & \gamma_{(1)(1)}Y_{(1)} + \gamma_{(1)(2)}Y_{(2)} \\ & + \gamma_{(1)(3)}Y_{(3)} + \gamma_{(1)(4)}Y_{(4)} = -P \cdot \gamma_{(1)(0)}, \\ & \gamma_{(2)(1)}Y_{(1)} + \gamma_{(2)(2)}Y_{(2)} \\ & + \gamma_{(2)(3)}Y_{(3)} + \gamma_{(2)(4)}Y_{(4)} = -P \cdot \gamma_{(2)(0)}, \\ & \gamma_{(3)(1)}Y_{(1)} + \gamma_{(3)(2)}Y_{(2)} \\ & + \gamma_{(3)(3)}Y_{(3)} + \gamma_{(3)(4)}Y_{(4)} = -P \cdot \gamma_{(3)(0)}, \\ & \gamma_{(4)(1)}Y_{(1)} + \gamma_{(4)(2)}Y_{(2)} \\ & + \gamma_{(4)(3)}Y_{(3)} + \gamma_{(4)(4)}Y_{(4)} = -P \cdot \gamma_{(4)(0)}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで、 $\gamma_{(m)(n)}$ は、状態 $Y_{(m)}=1$ と状態 $Y_{(n)}=1$ の間でなす仕事であり、 $\gamma_{(m)(0)}$ は、状態 $Y_{(m)}=1$ における P の作用点の垂直変位である。相反法則により、 $\gamma_{(m)(n)}=\gamma_{(n)(m)}$ である。

また、組荷重群の力学性質から、

$$\begin{aligned} & \gamma_{(1)(2)} = \gamma_{(2)(1)} = 0, \quad \gamma_{(1)(4)} = \gamma_{(4)(1)} = 0, \\ & \gamma_{(3)(4)} = \gamma_{(4)(3)} = 0, \quad \gamma_{(2)(3)} = \gamma_{(3)(2)} = 0 \end{aligned}$$

であるから、式(6)は次のように簡単化される。

$$\left. \begin{aligned} & \gamma_{(1)(1)}Y_{(1)} + \gamma_{(1)(3)}Y_{(3)} = -P \cdot \gamma_{(1)(0)}, \\ & \gamma_{(3)(1)}Y_{(1)} + \gamma_{(3)(3)}Y_{(3)} = -P \cdot \gamma_{(3)(0)}, \\ & \gamma_{(2)(2)}Y_{(2)} + \gamma_{(2)(4)}Y_{(4)} = -P \cdot \gamma_{(2)(0)}, \\ & \gamma_{(4)(2)}Y_{(2)} + \gamma_{(4)(4)}Y_{(4)} = -P \cdot \gamma_{(4)(0)}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

いま、

$$C_1 = \begin{vmatrix} \gamma_{(1)(1)} & \gamma_{(1)(3)} \\ \gamma_{(3)(1)} & \gamma_{(3)(3)} \end{vmatrix}, \quad C_2 = \begin{vmatrix} \gamma_{(2)(2)} & \gamma_{(2)(4)} \\ \gamma_{(4)(2)} & \gamma_{(4)(4)} \end{vmatrix} \quad (8)$$

とおき、 $P=1$ として動くことを考えれば、 $Y_{(1)}$, $Y_{(2)}$, $Y_{(3)}$, $Y_{(4)}$ の影響線 „ $Y_{(1)}$ ”, „ $Y_{(2)}$ ”, „ $Y_{(3)}$ ”, „ $Y_{(4)}$ ” は、次式で計算される。

$$\left. \begin{aligned} & „Y_{(1)}“ = -\frac{\gamma_{(3)(3)}}{C_1} „\gamma_{(1)(0)}“ + \frac{\gamma_{(1)(3)}}{C_1} „\gamma_{(3)(0)}“, \\ & „Y_{(3)}“ = +\frac{\gamma_{(3)(1)}}{C_1} „\gamma_{(1)(0)}“ - \frac{\gamma_{(1)(1)}}{C_1} „\gamma_{(3)(0)}“, \\ & „Y_{(2)}“ = -\frac{\gamma_{(4)(4)}}{C_2} „\gamma_{(2)(0)}“ + \frac{\gamma_{(2)(4)}}{C_2} „\gamma_{(4)(0)}“, \\ & „Y_{(4)}“ = +\frac{\gamma_{(4)(2)}}{C_2} „\gamma_{(2)(0)}“ - \frac{\gamma_{(2)(2)}}{C_2} „\gamma_{(4)(0)}“. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで、„ $\gamma_{(1)(0)}$ ”, „ $\gamma_{(2)(0)}$ ”, „ $\gamma_{(3)(0)}$ ”, „ $\gamma_{(4)(0)}$ ” は、それぞれ、状態 $Y_{(1)}=1$, $Y_{(2)}=1$, $Y_{(3)}=1$, $Y_{(4)}=1$ における基本系 (図-3(b), (c), (d), (e)) の垂直変位曲線である。式(9)により、„ $Y_{(1)}$ ”, „ $Y_{(2)}$ ”, „ $Y_{(3)}$ ”, „ $Y_{(4)}$ ” が求めれば、図-3(a)の曲線3径間連続桁の任意点 x における断面力または変形の影響線 „ K_x ” は、次式より求まる。

$$\begin{aligned} & „K_x“ = „K_x^0“ + K_{x(1)} „Y_{(1)}“ \\ & + K_{x(2)} „Y_{(2)}“ + K_{x(3)} „Y_{(3)}“ + K_{x(4)} „Y_{(4)}“ \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、„ K_x^0 ” は、基本系 (図-3(b), (c), (d), (e)) の点 x における断面力または変形の影響線であり、 $K_{x(m)}$ は状態 $Y_{(m)}=1$ における基本系 (図-3(b), (c), (d), (e)) の断面力図または変形図における点 x の値である。

以上のような解析を行うには、結局、図-3(b), (c), (d), (e) における断面力または変形を、基本的に解析しておかなければならぬことになるが、それには、次の文献を利用するとよい。

R. Dabrowski: Zur Berechnung von gekrümmten dünnwandigen Trägern mit offenem Profil. Der Stahlbau. (1964).

これには、曲げねじりを考慮した単径間の曲線桁 (両桁端は曲げモーメント零、ねじり角零、曲げねじりモーメント零の境界条件である) の断面力および変形の公式結果表がまとめて示されている。筆者は、この文献の公式を、電子計算のためにプログラム化して、電子計算により、図-3(b), (c), (d), (e) における断面力および変形を、主桁 a , 主

桁 b , 主桁 c 每に, しかも各径間毎にあらかじめ求めておき, これを用いながら, 式(1)から式(10)までの理論により, 図-1の解析を行なったわけである。

3. 計算例および計算結果

計算結果のみを示せば, 次のとおりである。ここで, 記

$a\gamma_{(1)(1)} = 5.9367 \times 10^{-7} [\text{kg}^{-1}\text{cm}^{-1}]$	$b\gamma_{(1)(1)} = 6.4383 \times 10^{-7} [\text{kg}^{-1}\text{cm}^{-1}]$	$c\gamma_{(1)(1)} = 6.9143 \times 10^{-7} [\text{kg}^{-1}\text{cm}^{-1}]$
$a\gamma_{(2)(2)} = 1.6584 \times 10^{-7} [\text{kg}^{-1}\text{cm}^{-1}]$	$b\gamma_{(2)(2)} = 1.7846 \times 10^{-7} [\text{kg}^{-1}\text{cm}^{-1}]$	$c\gamma_{(2)(2)} = 1.9059 \times 10^{-7} [\text{kg}^{-1}\text{cm}^{-1}]$
$a\gamma_{(3)(3)} = 6.0702 \times 10^{-10} [\text{kg}^{-1}\text{cm}^{-3}]$	$b\gamma_{(3)(3)} = 5.2911 \times 10^{-10} [\text{kg}^{-1}\text{cm}^{-3}]$	$c\gamma_{(3)(3)} = 4.6787 \times 10^{-10} [\text{kg}^{-1}\text{cm}^{-3}]$
$a\gamma_{(4)(4)} = 6.0141 \times 10^{-10} [\text{kg}^{-1}\text{cm}^{-3}]$	$b\gamma_{(4)(4)} = 5.2406 \times 10^{-10} [\text{kg}^{-1}\text{cm}^{-3}]$	$c\gamma_{(4)(4)} = 4.6330 \times 10^{-10} [\text{kg}^{-1}\text{cm}^{-3}]$
$a\gamma_{(1)(3)} = -4.9591 \times 10^{-9} [\text{kg}^{-1}\text{cm}^{-2}]$	$b\gamma_{(1)(3)} = -4.8759 \times 10^{-9} [\text{kg}^{-1}\text{cm}^{-2}]$	$c\gamma_{(1)(3)} = -4.7899 \times 10^{-9} [\text{kg}^{-1}\text{cm}^{-2}]$
$a\gamma_{(2)(4)} = -3.0953 \times 10^{-9} [\text{kg}^{-1}\text{cm}^{-2}]$	$b\gamma_{(2)(4)} = -3.0319 \times 10^{-9} [\text{kg}^{-1}\text{cm}^{-2}]$	$c\gamma_{(2)(4)} = -2.9703 \times 10^{-9} [\text{kg}^{-1}\text{cm}^{-2}]$

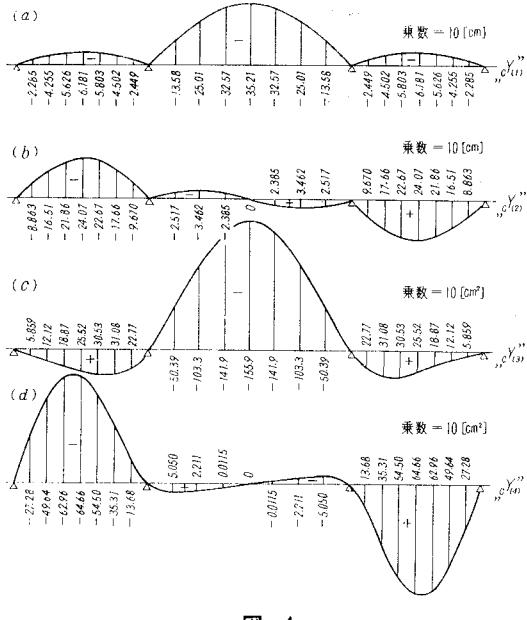


図-4

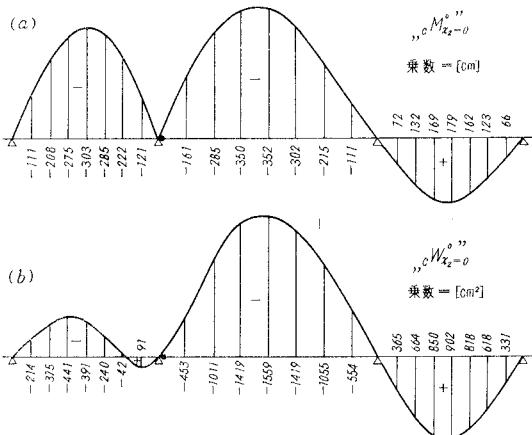


図-5

号の左のサフィックス a, b, c は, それぞれ, 主桁 a , 主桁 b , 主桁 c を示す。

(1) 曲線 3 径間連続主桁について

式(7)の左辺の係数の計算結果は次表のとおりである。

式(9)により連続主桁 c のみの „ $cY_{(1)}$ ”, „ $cY_{(2)}$ ”, „ $cY_{(3)}$ ”, „ $cY_{(4)}$ ”を示せば図-4のとおりである。また, 式(10)によ

り連続主桁 c の第2径間の左端における, 曲げモーメント „ $cM_{x_2=0}^0$ ”, 曲げねじりモーメント „ $cW_{x_2=0}^0$ ”,せん断力 „ $cQ_{x_2=0}^0$ ”, 一次ねじりモーメント „ $cT_{1x_2=0}^0$ ”, 二次ねじりモーメント „ $cT_{2x_2=0}^0$ ”の影響線を示せば, 図-5および図-6のとおりである。

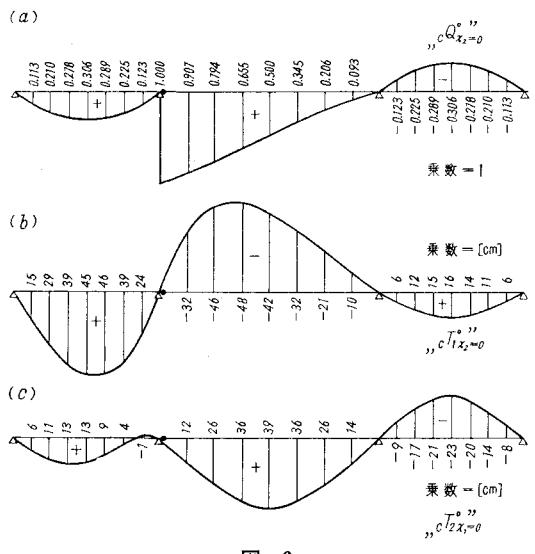


図-6

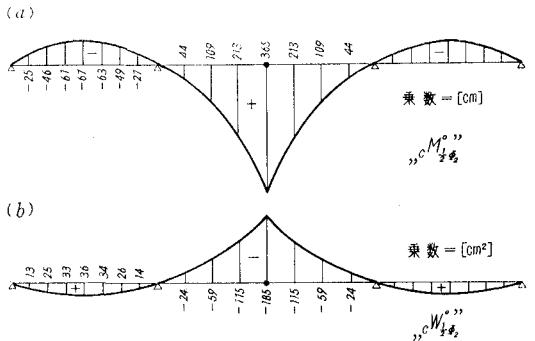


図-7

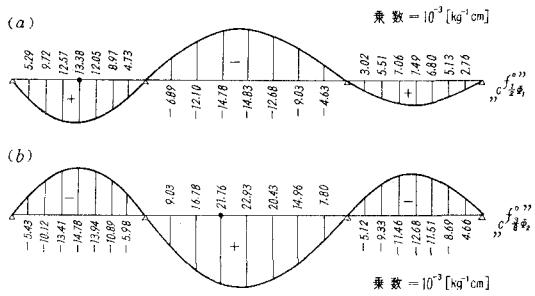


図-8

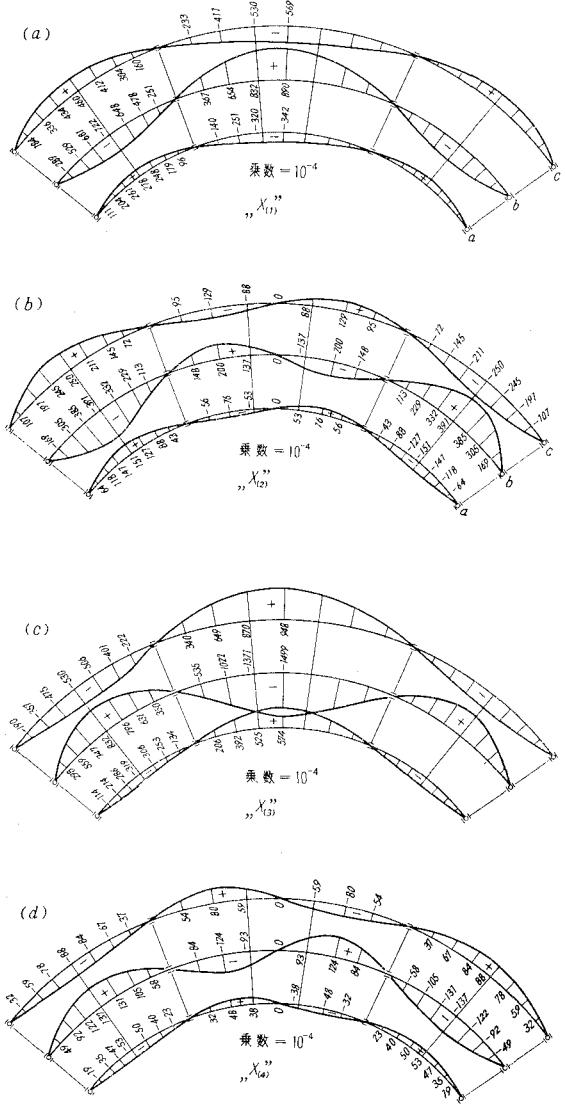


図-9

また、連続主桁 c の第2径間中央における、曲げモーメント „ $cM_{\frac{\phi_2}{2}}^0$ ”，曲げねじりモーメント „ $cW_{\frac{\phi_2}{2}}^0$ ” の影響線を示せば、図-7のとおりである。

また、連続主桁 c の第1径間の点 $\frac{1}{2}\phi_1$ および第2径間の点 $\frac{3}{8}\phi_2$ における垂直変位影響線 „ $cJ_{\frac{1}{2}\phi_1}^0$ ” および „ $cJ_{\frac{3}{8}\phi_2}^0$ ” を示せば、図-8のとおりである。

(連続主桁 a および b については、紙面の都合で省略)

(2) 連続曲線格子桁について

式(2)の左辺の係数の計算結果は次表のとおりである。

$\delta_{(1)(1)} = +152.00 \times 10^{-3} [\text{kg}^{-1} \text{cm}]$
$\delta_{(2)(2)} = +116.43 \times 10^{-3} [\text{kg}^{-1} \text{cm}]$
$\delta_{(3)(3)} = +202.71 \times 10^{-3} [\text{kg}^{-1} \text{cm}]$
$\delta_{(4)(4)} = +105.63 \times 10^{-3} [\text{kg}^{-1} \text{cm}]$
$\delta_{(1)(3)} = -65.17 \times 10^{-3} [\text{kg}^{-1} \text{cm}]$
$\delta_{(2)(4)} = -4.96 \times 10^{-3} [\text{kg}^{-1} \text{cm}]$

式(4)により、連続曲線格子桁の „ $X_{(1)}$ ”，„ $X_{(2)}$ ”，„ $X_{(3)}$ ”，„ $X_{(4)}$ ” を示せば、図-9のとおりである。また、式(5)により、連続曲線格子桁の主桁 c の第2径間左端における、曲げモーメント „ $cM_{x_2=0}$ ”，曲げねじりモーメント „ $cW_{x_2=0}$ ”，せん断力 „ $cQ_{x_2=0}$ ”，一次ねじりモーメント „ $cT_{1x_2=0}$ ”，二次ねじりモーメント „ $cT_{2x_2=0}$ ” の影響面を示せば、図-10および図-11のとおりである。また、連続曲線格子桁の主桁 c の第2径間中央における、曲げモーメント „ $cM_{\frac{1}{2}\phi_2}^0$ ”，曲げねじりモーメント „ $cW_{\frac{1}{2}\phi_2}^0$ ” の影響面を示せば、図-12のとおりである。

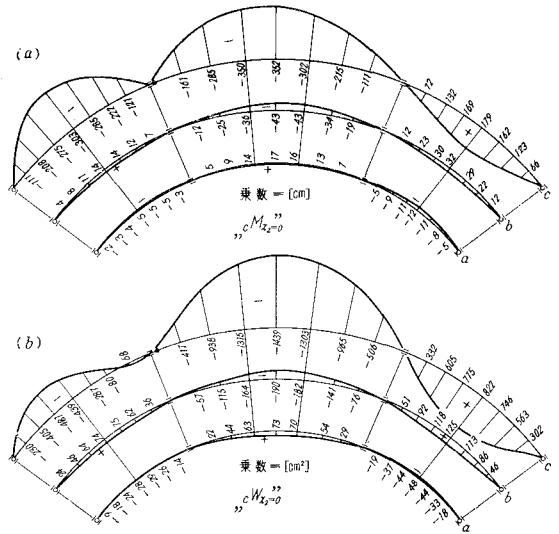


図-10

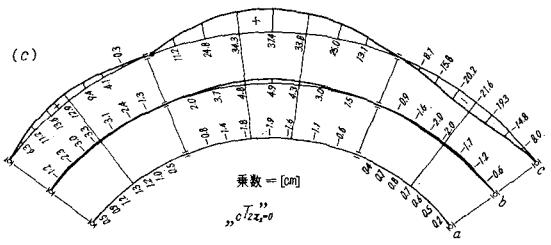
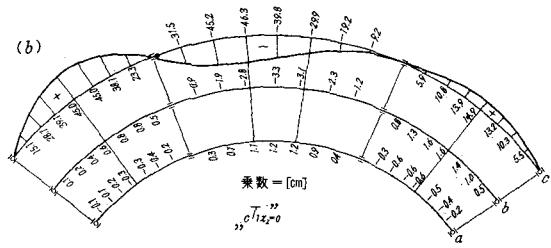
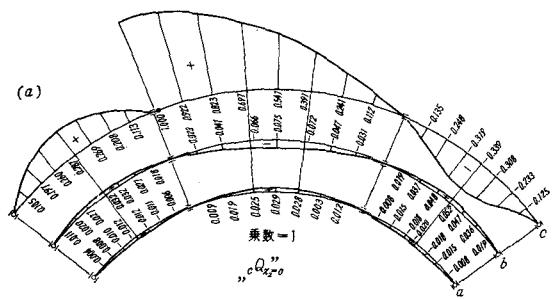


図-11

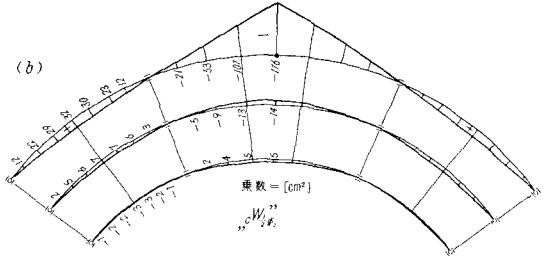
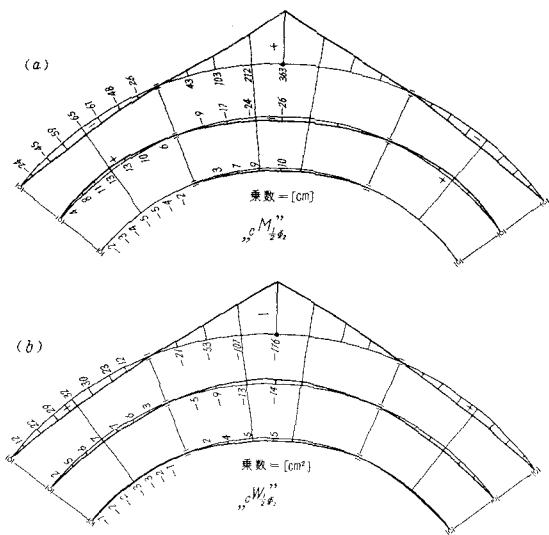


図-12