土木学会北海道支部　技術資料　第23号

基礎杭の水平振動について

正員 ○井 藤 昭 夫*

I. 概 説

本文は直杭の長さを有限と考えた場合の強制水平振動について，その振動数と振動タワミを仮想仕事の原理により求めたものである。

ここでは粘性減衰力を無視したものと考慮したものの二種類につき，それぞれ振動形状を杭端の支持条件に適応した正規函数と時間の函数の積の無限級数とした。

理論計算上の仮定は次ぎのとうりである。

(1) 杭は直で曲げ剛性，単位重量は一定である。

(2) 側方向地盤反力係数は杭全長にわたり一定である。

(3) 杭は剛体変位を起こさず，振動変位は微小である。

(4) 減衰力は杭全長にわたり一定に働くものとする。

(5) 起振力は時間 t を変数とする sin 函数および不連続函数とする。

以上の仮定をおき振動形状を杭の両端の支持条件を考慮して算出した。

その結果，支持条件と杭頭の載荷重の有無により，又杭長や側方向地盤反力係数の変化により正規函数における固有値が変化する。従って，おのおのの支持条件について振動数方程式を載荷重の函数と円函数および双曲線函数を含んだものとに分け，これを図表に表わし，その交点として解を求めた。

II. 非減衰強制水平振動

振動形状を y とすると

$$y=\sum_{i=1,2,3,\cdots}^{\infty}\varphi_i X_i \tag{1}$$

ここで　X_i　i 次の規準振動に対する正規函数

　　　　φ_i　時間の函数

今杭の仮想変位を δ_y とすると

$$\delta_y=\delta\varphi_i\cdot X_i$$

とすれば正規函数の直交性により

$$\int_0^l X_i\cdot X_j\,dx=0,\quad \int_0^l X_i^2=l$$

となる。ここで l は杭長である。

又杭の慣性力による仮想仕事は

$$-\frac{A\gamma}{g}\int_0^l\Big(\sum_i\varphi_i''\cdot X_i\Big)\delta\varphi_i\cdot X_i\,dx=-\frac{A\gamma l}{g}\sum_i\varphi_i''\cdot\delta\varphi_i \tag{2}$$

ここで　$\dfrac{A\gamma}{g}$　は杭の単位重量である。

一方弾性力によるヒズミエネルギー（杭の曲げヒズミエネルギー＋基礎地盤のヒズミエネルギー）は杭の曲げ剛性を EI, 土の反力係数を K とすると，

$$V=\frac{EI}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2dx+\frac{K}{2}\int_0^l y^2\,dx=\frac{EI}{2}\sum_i k_i^4\varphi_i^2\int_0^l X_i^2\,dx+\frac{K}{2}\sum_i\int_0^l(\varphi_i\cdot X_i)^2\,dx \tag{3}$$

*　北海道開発局土木試験所

なお正規函数を次ぎのように仮定した。

$$X_i = C_1(\cos k_ix+\cosh k_ix)+C_2(\cos k_ix-\cosh k_ix)+C_3(\sin k_ix+\sinh k_ix)+C_4(\sin k_ix-\sinh k_ix) \quad (4)$$

従って (3) 式は次ぎのようになる。

$$V = \frac{EI}{2l^3}\sum_i (k_il)^4\varphi_i^2+\frac{Kl}{2}\sum_i \varphi_i^2 \quad (5)$$

(5) 式からヒズミエネルギーによる仮想仕事は

$$-\frac{\partial V}{\partial\varphi_i}\delta\varphi_i = -\frac{EI}{l^3}(k_il)^4\varphi_i\delta\varphi_i-Kl\varphi_i\delta\varphi_i \quad (6)$$

又外力 (起振力) による仮想仕事は，強度を P_0 とすれば

$$F(t) = P_0\sin\omega t\cdot\delta\varphi_i\cdot(X_i)_{x=c_0} \quad (7)$$

ここで ω は起振力の振動数，c_0 は起振力の作用点である。

従って運動方程式は (2), (6), (7) 式より

$$\frac{A\gamma l}{g}\varphi_i''+\left\{\frac{EI}{l^3}(k_il)^4+Kl\right\}\varphi_i = P_0\sin\omega t\cdot(X_i)_{x=c_0} \quad (8)$$

いま $a^2=\dfrac{EIg}{A\gamma}\left\{1+\dfrac{Kl^4}{EI(k_il)^4}\right\}$ とすると (8) 式は

$$\varphi_i''+\frac{a^2(k_il)^4}{l^4}\varphi_i = \frac{P_0g}{A\gamma l}(X_i)_{x=c_0}\cdot\sin\omega t \quad (9)$$

(9) 式の一般解は自由振動の項を除くと次のようになる。

$$\varphi_i = \frac{l^2}{a(k_il)^2}\cdot\frac{P_0g}{A\gamma l}(X_i)_{x=c_0}\int_0^t\sin\omega t\cdot\sin\left\{\frac{a(k_il)^2(t-t_1)}{l^2}\right\}dt_1 \quad (10)$$

(10) 式の t_1 に関する積分は

$$\int_0^t\sin\omega t\cdot\sin\left\{\frac{a(k_il)^2(t-t_1)}{l^2}\right\}dt_1 = \frac{1}{p^2-\omega^2}(p\sin\omega t-\omega\sin pt)$$

となる。ただし $p=\dfrac{a(k_il)^2}{l^2}$ である。

従って (10) 式は

$$\varphi_i = \frac{P_0g(X_i)_{x=c_0}}{A\gamma}\left\{\frac{l^3}{(k_il)^4a^2-\omega^2l^4}\sin\omega t-\frac{\omega l^5}{(k_il)^4a^2-\omega^2l^4}\sin pt\right\} \quad (11)$$

故に y は次のようになる。

$$\boxed{y = \sum_i\varphi_i\cdot X_i = \frac{P_0gl^3}{A\gamma}\left\{\sum_i\frac{X_i(X_i)_{x=c_0}}{(k_il)^4a^2-\omega^2l^4}\sin\omega t-\sum_i\frac{\omega l^2X_i(X_i)_{x=c_0}}{(k_il)^4a^2-\omega^2l^4}\sin pt\right\}} \quad (12)$$

III. 減衰強制水平振動

減衰に関する定数を c とすれば，Rayleigh の散逸函数 F は

$$F = \frac{1}{2}y'^2 \quad (13)$$

従って F による仮想仕事は

$$-\frac{\partial F}{\partial\varphi_i}\delta\varphi_i = -c\int_0^l(\sum\varphi_i'X_i^2)\delta\varphi_i dx = -c\varphi_i'l\delta\varphi_i \quad (14)$$

(14) に表わされた仕事が II の (8) 式の運動方程式に加わる。

$$\frac{A\gamma l}{g}\varphi_i''+cl\varphi_i'+\left\{\frac{EI(k_il)^4}{l^3}+Kl\right\}\varphi_i = P_0(X_i)_{x=c_0}\cdot\sin\omega t \quad (15)$$

ここで $gc/A\gamma=2n$ とおくと (15) 式は

$$\varphi_i'' + 2n\varphi_i' + p^2\varphi_i = \frac{P_0 g}{A\gamma l}\cdot(X_i)_{x=c_0}\cdot\sin\omega t \tag{16}$$

II の場合と同様に自由振動の項を除くと (16) 式の解は次のようになる。

$$\varphi_i = \frac{P_0 g\,(X_i)_{x=c_0}}{p_1 A\gamma l}\int_0^t e^{-n(t-t_1)}\cdot\sin p_1(t-t_1)\,dt_1 \tag{17}$$

ここで $p_1 = \sqrt{p^2-n^2}$ である。

従って φ_i は

$$\varphi_i = \frac{P_0 g\,(X_i)_{x=c_0}}{2p_1 A\gamma l}\cdot e^{-nt}\left[\int_0^t e^{nt_1}\cdot\cos\left\{(\omega+p_1)t_1 - p_1 t\right\}dt_1 - \int_0^t e^{nt_1}\cdot\cos\left\{(\omega-p_1)t_1 + p_1 t\right\}dt_1\right] \tag{18}$$

(18) 式を整理すると

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi_i = \frac{P_0 g l^3}{EI}\sum_i\Biggl[&\frac{(X_i)_{x=c_0}}{\left\{1+\dfrac{Kl^4}{EI(k_i l)^4}\right\}}\Biggl\{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega^2}{p^2}\right)^2+\dfrac{4n^2\omega^2}{p^4}}}\cdot\sin(\omega t+\varepsilon)\\ &+e^{-nt}\frac{\sqrt{\omega^2\left(1-\dfrac{\omega^2}{p^2}+\dfrac{2n^2}{p^2}\right)^2+n^2\left(1+\dfrac{\omega^2}{p^2}\right)^2}}{p^3\sqrt{1-\dfrac{n^2}{p^2}}\left(1-\dfrac{\omega^2}{p^2}+\dfrac{n^2}{p^2}\right)^2}\cdot\sin\left(p\sqrt{1-\frac{n^2}{p^2}}\,t+\bar{\varepsilon}\right)\Biggr\}\Biggr]\end{aligned}} \tag{19}$$

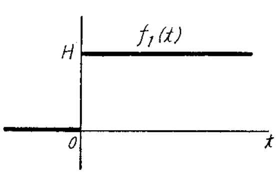
(19) 式で ε, $\bar{\varepsilon}$ はそれぞれ位相を表わす。

従って y は (19) 式より φ_i と X_i の積として求められる。

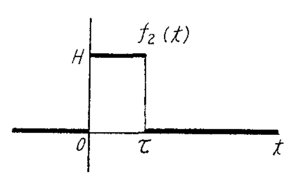
(19) 式で pt を含んだ項は時間と共に減少し結局 ωt の項のみになる。

IV. 不連続外力による応答

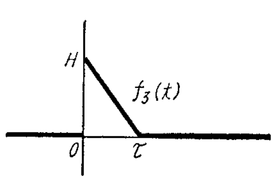
下図のインパルス $f(t)$ が杭に地震その他外力として加わった場合の杭の振動を解析しておく必要があるので，その応答を計算する。この他種々のインパルスがあると思われるが代表的と考えられるもののみをあつかう。



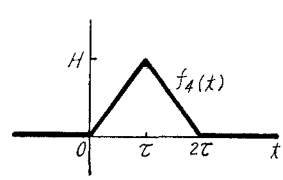
図—1



図—2



図—3



図—4

原函数 $f_1(t)\sim f_4(t)$ の像函数を求める。ただし $\tau>0$。

$$f_1(t) = H\cdot E(t) \tag{20}$$

$$f_2(t) = H\cdot E(t) - H\cdot E(t-\tau) \tag{21}$$

$$f_3(t) = H\cdot E(t) - H/\tau\cdot t + H/\tau\cdot E(t-\tau) \tag{22}$$

$$f_4(t) = H/\tau\cdot t - H/\tau\cdot(t-\tau) - HE(t-\tau) + f_3(t-\tau) \tag{23}$$

そこで $f_1(t)\sim f_4(t)$ に Laplace 変換を行なう。

$$f_1(t) \supset H/S \tag{20'}$$

$$f_2(t) \supset H/S\,(1-e^{-\tau S}) \tag{21'}$$

$$f_3(t) \supset H/S - H/\tau \cdot 1/S^2 + H/\tau \cdot 1/S^2 \cdot e^{-\tau S} \tag{22'}$$

$$f_4(t) \supset H/\tau S^2\,[1-e^{-\tau S}(1+\tau S)] + H/\tau S^2 \cdot (\tau S - 1 + e^{-\tau S})\,e^{-\tau S}$$

$$\supset H/\tau S_2 \cdot (1-e^{-\tau S})^2 \tag{23'}$$

§1. $f_1(t)$ による応答

まず運動方程式に Laplace 変換を行なう。$\mathcal{L}^{-1}[\varphi_i]=F(S)$ とすれば

$$\mathcal{L}^{-1}[\varphi_i''+2n\varphi_i'+p^2\varphi_i] = F(S)\,(S^2+2nS+p^2) \tag{24}$$

従って

$$F(S)\,(S^2+2nS+p^2) = H/S \tag{25}$$

(25) 式より

$$F(S) = \frac{H}{S\,(S^2+2nS+p^2)} \tag{25'}$$

(25′) 式を部分分数に展開すると

$$F(S) = \frac{H}{p^2}\left\{\frac{1}{S} - \frac{S}{S^2+2nS+p^2} + \frac{2n}{S^2+2nS+p^2}\right\} \tag{26}$$

(26) 式を S について Laplace 逆変換すると

$$\mathcal{L}^{-1}[F(S)] = \frac{H}{p^2}\left[1-\left\{\frac{Se^{St}}{S+n+ip_1}\right\}_{S=-n+ip_1} - \left\{\frac{Se^{St}}{S+n-ip_1}\right\}_{S=-n-ip_1} + 2n\left\{\frac{e^{St}}{S+n+ip_1}\right\}_{S=-n+ip_1} + 2n\left\{\frac{e^{St}}{S+n-ip_1}\right\}_{S=-n-ip_1}\right]$$

従って

$$\boxed{f_1(t) = \frac{H}{p^2}\left\{1+e^{-nt}\left(\frac{3n}{p_1}\cdot\sin p_1t - \cos p_1t\right)\right\}} \tag{27}$$

ここに　$p_1=\sqrt{p^2-n^2}$

§2. $f_2(t)$ による応答

$$F(S) = \frac{1}{S\,(S^2+2nS+p^2)}\cdot\frac{H(1-e^{-\tau S})}{S} \tag{28}$$

(28) 式は

$$F(S) = \frac{H}{S\,(S^2+2nS+p^2)} - \frac{He^{-\tau S}}{S\,(S^2+2nS+p^2)} \tag{28'}$$

(28′) 式の第1項を $F_1(S)$ とすれば

$$F(S) = F_1(S) - e^{-\tau S}\cdot F_1(S) \tag{29}$$

従って (29) 式を Laplace 逆変換すると，「変時定理」により $f_2(t)=f_{21}(t)-f_{21}(t-\tau)$ となる。従って

$$f_{21}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{H}{S\,(S^2+2nS+p^2)}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{He^{-\tau S}}{S^2\,(S^2+2nS+p^2)}\right] \tag{30}$$

ここで (30) 式の第1項は (27) 式と同じであるから結局

$$\boxed{f_2(t) = \frac{H}{p^2}\left[\frac{3n}{p_1^2}e^{-nt}\left\{\sin p_1t - e^{n\tau}\cdot\sin p_1(t-\tau)\right\} - e^{-nt}\left\{\cos p_1t - e^{n\tau}\cdot\cos p_1(t-\tau)\right\}\right]} \tag{31}$$

§3. $f_3(t)$ による応答

$$F(S) = \frac{1}{S^2+2nS+p^2}\cdot\frac{H}{\tau S^2}(\tau S-1+e^{-\tau S}) = \frac{H}{S\,(S^2+2nS+p^2)} - \frac{H}{\tau S^2\,(S^2+2nS+p^2)} + \frac{He^{-\tau S}}{\tau S^2\,(S^2+2nS+p^2)} \tag{32}$$

(32) 式で第2項を $F_2(S)$ とすれば，第3項は $F_3(S)=-e^{-\tau S}\cdot F_2(S)$ となるから §2 と同様に「変時定理」により

Laplace 逆変換する。

$$\mathcal{L}^{-1}[F_2(S)] = -\frac{H}{\tau}\left\{\frac{e^{-nt}}{p^4}\left(\frac{2n^2-p^2}{p_1}\sin p_1t+2n\cos p_1t\right)+\frac{t}{p^2}-\frac{2n}{p^4}\right\} \tag{33}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F_3(S)] = \frac{H}{\tau}\left[\frac{e^{-n(t-\tau)}}{p^4}\left\{\left(\frac{2n^2-p^2}{p_1}\right)\sin p_1(t-\tau)+2n\cos p_1(t-\tau)\right\}+\frac{t-\tau}{p^2}-\frac{2n}{p^4}\right] \tag{34}$$

結局 (32) 式の Laplace 逆変換は (27), (33), (34) 式より

$$\boxed{f_3(t) = \frac{H}{p^2}\left(\left(e^{-nt}\left(\frac{3n}{p_1}\sin p_1t-\cos p_1t\right)+\frac{e^{-nt}}{\tau p^2}\left[\left(\frac{2n^2-p^2}{p_1}\right)\left\{e^{n\tau}\cdot\sin p_1(t-\tau)-\sin p_1t\right\}+2n\left\{e^{n\tau}\cdot\cos p_1(t-\tau)-\cos p_1t\right\}\right]\right)\right)} \tag{35}$$

§4. $f_4(t)$ による応答

$$F(S) = \frac{1}{S^2+2nS+p^2}\cdot\frac{H(1-e^{-\tau S})^2}{\tau S^2} \tag{36}$$

(36) 式で τS の高次の項を無視すると

$$F(S) = \frac{1}{S^2+2nS+p^2}\cdot\frac{H(\tau^2S^2-1)}{\tau S^2}$$

$$= \frac{H\tau}{S^2+2nS+p^2}-\frac{H}{\tau S^2(S^2+2nS+p^2)} \tag{36'}$$

(36′) 式で第1, 2項を $F_1(S)$, $F_2(S)$ とすれば

$$f_{41}(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(S)] = \frac{H\tau}{p_1}e^{-nt}\cdot\sin p_1t \tag{37}$$

又 $F_2(S)$ は部分分数に展開すると

$$F_2(S) = -\frac{H}{\tau p^2}\left\{\frac{1}{S}-\frac{2n}{p^2S}+\frac{2nS}{p^2(S^2+2nS+p^2)}+\frac{4n^2-p^2}{p^2(S^2+2nS+p^2)}\right\} \tag{38}$$

従って $F_2(S)$ の Laplace 逆変換は

$$f_{42}(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_2(S)] = \frac{H}{\tau p^2}\left\{\frac{2n}{p^2}-t+\frac{2n}{p^2}e^{-nt}\left(\frac{n}{p_1}\sin p_1t-\cos p_1t\right)+\frac{p^2-4n^2}{p^2p_1}e^{-nt}\cdot\sin p_1t\right\} \tag{39}$$

故に $f_4(t)=\mathcal{L}^{-1}[F_1(S)]+\mathcal{L}^{-1}[F_2(S)]$ であるから

$$\boxed{f_4(t) = \frac{He^{-nt}}{p^2}\left\{\frac{\tau p^2}{p_1}-\frac{2n^2}{p^2p_1\tau}\left(1-\frac{p^2}{2n^2}\right)\sin p_1t+\left(\frac{\tau p^2}{p_1}-\frac{2n}{\tau p^2}\right)\cos p_1t\right\}-\frac{H}{p^2\tau}\left(t-\frac{2n}{p^2}\right)} \tag{40}$$

V. 杭の種々な支持条件における規準振動の正規函数と振動数方程式

杭を一本の棒と見なせば弾性振動における規準振動の正規函数は次式で与えられる。即ち

$$X_i = C_1\sin k_ix+C_2\cos k_ix+C_3\sinh k_ix+C_4\cosh k_ix \tag{41}$$

(41) 式を次ぎのように書き換える。

$$X_i = C_1(\cos k_ix+\cosh k_ix)+C_2(\cos k_ix-\cosh k_ix)+C_3(\sin k_ix+\sinh k_ix)+C_4(\sin k_ix-\sinh k_ix) \tag{42}$$

§1. 杭頭が自由他端単純支持 (杭頭での質量 $M=0$) 杭の支持条件 (杭頭で $x=l$ とする)

$$① \ EI\,X_{i\,x=0} = 0,\quad ② \ EI\,X''_{i\,x=0} = 0,\quad ③ \ EI\,X''_{i\,x=l} = 0,\quad ④ \ EI\,X'''_{i\,x=l} = 0 \tag{43}$$

(42) 式に (43) 式の条件を代入する。

$$① \ C_1 = 0 \tag{43-1}$$

$$② \ C_2 = 0 \tag{43-2}$$

$$③ \ C_3(\sin k_il-\sinh k_il)+C_4(\sin k_il+\sinh k_il) = 0 \tag{43-3}$$

$$④ \ C_3(-\cos k_il+\cosh k_il)-C_4(\cos k_il+\cosh k_il) = 0 \tag{43-4}$$

従って振動数方程式は (43–3), (43–4) より

$$(\sin k_i l+\sinh k_i l)(\cos k_i l+\cosh k_i l)-(\sin k_i l+\sinh k_i l)(\cosh k_i l-\cos k_i l)=0 \tag{44}$$

従って (44) 式は

$$\boxed{\tan k_i l=\tanh k_i l} \tag{45}$$

故に正規函数は

$$\boxed{X_i=\sin k_i x\cdot\sinh k_i l+\sin k_i l\cdot\sinh k_i x} \tag{46}$$

§2. 杭頭が自由，他端単純支持（杭で質量 M 載荷）杭の支持条件（M による圧縮力の影響は無視する）

$$① \ EI\underset{x=0}{X_i}=0,\quad ② \ EI\underset{x=0}{X_i''}=0,\quad ③ \ EI\underset{x=l}{X_i''}=0,\quad ④ \ EI\underset{x=l}{X_i'''}=-M\omega\underset{x=l}{X_i} \tag{47}$$

ここに ω は起振力の振動数

$$① \ C_1=0 \tag{47–1}$$

$$② \ C_2=0 \tag{47–2}$$

$$③ \ C_3(\sinh k_i l-\sin k_i l)-C_4(\sin k_i l+\sinh k_i l)=0 \tag{47–3}$$

$$④ \ C_3(\cosh k_i l-\cos k_i l+\mu\sin k_i l+\mu\sinh k_i x)-C_4(\cos k_i l+\cosh k_i l-\mu\sin k_i l+\mu\sinh k_i l)=0$$

ここに $\mu=\dfrac{M\omega^2}{k_i^3 EI}$ (47–4)

振動数方程式は (47–3), (47–4) より

$$(\sinh k_i l-\sin k_i l)(\mu\sin k_i l-\mu\sin k_i l+\cos k_i l+\cosh k_i l)$$
$$-(\sinh k_i l+\sin k_i l)(\mu\sin k_i l+\mu\sinh k_i l-\cos k_i l+\cosh k_i l)=0 \tag{48}$$

(48) 式を μ について整理すると

$$\boxed{\mu=\frac{\cos k_i l\cdot\sinh k_i l-\sin k_i l\cdot\cosh k_i l}{2\sin k_i l\cdot\sinh k_i l}} \tag{49}$$

(49) 式で $\mu\to 0$ 即ち $M\to 0$ のときは

$$\sin k_i l\cdot\cosh k_i l-\cos k_i l\cdot\sinh k_i l=0 \quad 即ち \quad \tan k_i l=\tanh k_i l$$

となり，§1 で求めたものと一致する。

又 $\mu\to\infty$ とすると，即ち $\sin k_i l=0$ となり，これは両端単純支持の場合の振動数方程式になる。

故に正規函数は

$$\boxed{X_i=(\cosh k_i l+\mu\sinh k_i l)\sin k_i x+(\cos k_i l-\mu\sin k_i l)\sinh k_i x} \tag{50}$$

なお $\omega=p$ のとき即ち共振の場合は

$$\omega^2=p^2=\frac{EIg}{A\gamma}\left\{1+\frac{Kl^4}{EI(k_i l)^4}\right\}\frac{(k_i l)^4}{l^4} \tag{51}$$

であるから

$$\mu=\frac{M\omega^2}{k_i^3 EI}=\frac{Mg}{A\gamma l}\left\{1+\frac{Kl^4}{EI(k_i l)^4}\right\}(k_i l) \tag{52}$$

従って (49) 式と (52) 式より固有値 $(k_i l)$ が求まるので (51) 式より振動数が算出される。

§3. 杭頭が自由，他端固定支持（杭頭に質量 M 載荷）杭の支持条件

$$① \ EI\underset{x=0}{X_i}=0,\quad ② \ EI\underset{x=0}{X_i'}=0,\quad ③ \ EI\underset{x=l}{X_i''}=0,\quad ④ \ EI\underset{x=l}{X_i'''}=-M\omega^2\underset{x=l}{X_i} \tag{53}$$

$$① \ C_1=0 \tag{53–1}$$

$$② \ C_3=0 \tag{53–2}$$

$$③ \ C_2(\cos k_i l+\cosh k_i l)+C_4(\sin k_i l+\sinh k_i l)=0 \tag{53–3}$$

④ $C_2(\sin k_il-\sinh k_il+\mu\cos k_il-\mu\cosh k_il)-C_4(\cos k_il+\cosh k_il-\mu\sin k_il+\mu\sinh k_il)=0$ (53-4)

振動数方程式は (53-3), (53-4) より

$$(\cos k_il+\cosh k_il)(\cos k_il+\cosh k_il-\mu\sinh k_il+\mu\sinh k_il)$$
$$+(\sin k_il+\sinh k_il)(\sin k_il-\sinh k_il-\mu\cosh k_il+\mu\cos k_il)=0 \tag{54}$$

(54) 式を μ について整理すると

$$\boxed{\mu=\frac{1+\cos k_il\cdot\cosh k_il}{\sin k_il\cdot\cosh k_il-\cos k_il\cdot\sinh k_il}} \tag{55}$$

(55) 式で $\mu\to0$ で一端固定，他端自由，又 $\mu\to\infty$ で一端固定，他端支持の振動数方程式となる。
又正規函数は

$$\boxed{\begin{aligned}X_i=&(\sin k_il-\sinh k_il+\mu\cos k_il-\mu\cosh k_il)(\sin k_ix-\sinh k_ix)\\&+(\cos k_il+\cosh k_il-\mu\sin k_il+\mu\sinh k_il)(\cos k_ix-\cosh k_ix)\end{aligned}} \tag{56}$$

§4. 杭頭で撓角 0，他端単純支持（杭頭に質量 M 載荷）杭の支持条件

① $EI\underset{x=0}{X_i}=0$，② $EI\underset{x=0}{X_i''}=0$，③ $EI\underset{x=l}{X_i'}=0$，④ $EI\underset{x=l}{X_i'''}=-M\omega\underset{x=l}{X_i}$ (57)

① $C_1=0$ (57-1)

② $C_3=0$ (57-2)

③ $C_3(\cos k_il+\cosh k_il)+C_4(\cos k_il-\cosh k_il)=0$ (57-3)

④ $C_4(\cosh k_il-\cos k_il+\mu\sin k_il+\mu\sinh k_il)-C_4(\cosh k_il+\cos k_il-\mu\sin k_il+\mu\sinh k_il)=0$ (57-4)

振動数方程式は (57-3), (57-4) より

$$(\cos k_il+\cosh k_il)(\cos k_il+\cosh k_il-\mu\sin k_il+\mu\sinh k_il)$$
$$+(\cos k_il-\cosh k_il)(\cosh k_il-\cos k_il+\mu\sin k_il+\mu\sinh k_il)=0 \tag{58}$$

(58) 式を μ について整理すると

$$\boxed{\mu=\frac{2\cos k_il\cdot\cosh k_il}{\sin k_il\cdot\cosh k_il-\cos k_il\cdot\sinh k_il}} \tag{59}$$

又正規函数は

$$\boxed{X_i=(\cosh k_il+\mu\sinh k_il)\sin k_ix+(\cos k_il-\mu\sin k_il)\sinh k_ix} \tag{60}$$

§5. 杭頭で撓角 0，他端固定支持（杭頭に質量 M 載荷）杭の支持条件

① $EI\underset{x=0}{X_i}=0$，② $EI\underset{x=0}{X_i'}=0$，③ $EI\underset{x=l}{X_i'}=0$，④ $EI\underset{x=l}{X_i'''}=-M\omega^2\underset{x=l}{X_i}$ (61)

① $C_1=0$ (61-1)

② $C_2(\sin k_il+\sinh k_il)-C_4(\cos k_il-\cosh k_il)=0$ (61-2)

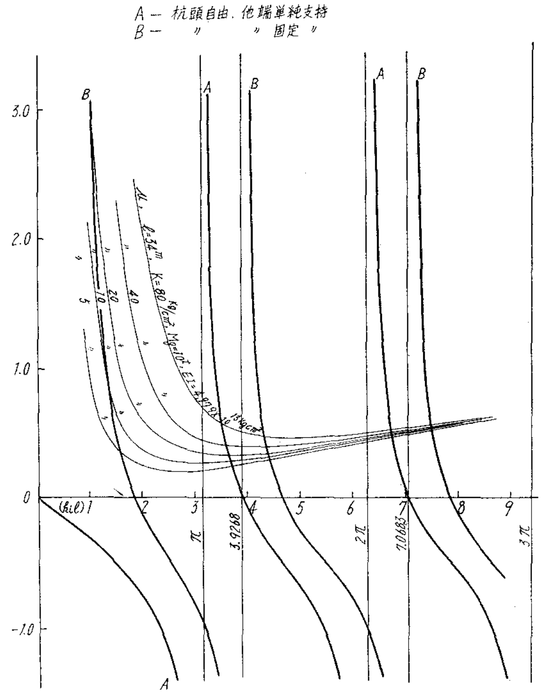
③ $C_3=0$ (61-3)

④ $C_2(\sin k_il-\sinh k_il+\mu\cos k_il-\mu\cosh k_il)-C_4(\cos k_il+\cosh k_il-\mu\sin k_il+\mu\sinh k_il)=0$ (61-4)

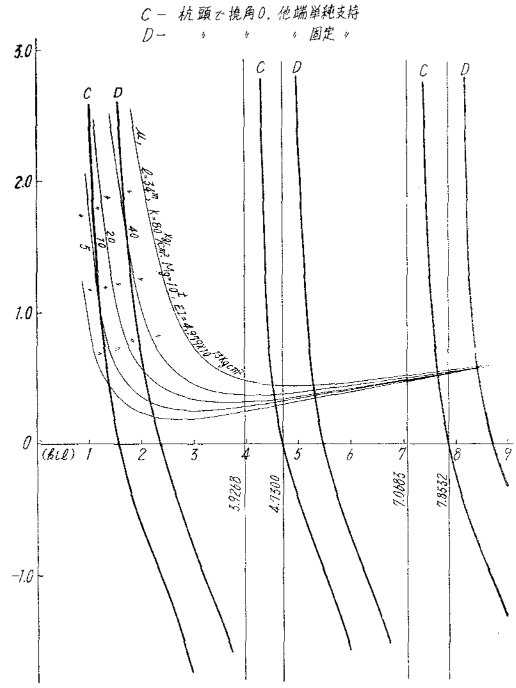
振動数方程式は (61-2), (61-4) より

$$(\cos k_il-\cosh k_il)(\sin kl-\sinh k_il+\mu\cos k_il-\mu\cosh k_il)$$
$$-(\sin k_il+\sin k_il)(\cos k_il+\cosh k_il-\mu\sin k_il+\mu\sinh k_il)=0 \tag{62}$$

(62) 式を μ について整理すると



図—5 振動数方程式の解 (1)



図—6 振動数方程式の解 (2)

$$\mu=\frac{\cos k_il\cdot\sinh k_il+\sin k_il\cdot\cosh k_il}{1-\cos k_il\cdot\cosh k_il} \tag{63}$$

又正規函数は

$$\begin{aligned} X_i=&(\cos k_il+\cosh k_il-\mu\sin k_il+\mu\sinh k_il)(\cos k_ix-\cosh k_il)\\ &+(\sin k_il-\sinh k_il+\mu\cos k_il-\mu\cosh k_il)(\sin k_ix-\sinh k_ix)\end{aligned} \tag{64}$$

VI. あ と が き

直杭が何らかの外力により振動を起こす場合，特に重要なのは，その固有振動数および振動タワミであると思われる。従って杭の設計時にこれらのものを計算する場合，側方向地盤反力係数，減衰係数を試験杭の段階で求めておく必要がある。

ここでは杭上に載荷重のある場合には振動数方程式を解くのは多少困難となるので，この方程式を載荷重 M について整理し，これを図解する方法によれば比較的容易に固有値 (k_il) を求めることが出来る。

従って本文はこの固有値 (k_il) を用い，杭の種々な支持条件における振動数および振動タワミを算出し，又不連続外力に対する振動性状を求めることが出来ることを示したものである。

なお側方向地盤反力係数と減衰係数を杭全長にわたって一定とした事に対する精度の問題，あるいは組杭の場合は本文のような考え方が妥当かどうか，又ロッキング現象等剛体運動を加えた場合の研究が待たれる。

参 考 文 献

1) チモシェンコ著： 工業振動学
2) 谷口 修著： 振動工学
3) 山口・国枝共著： ラプラス変換，演算子法
4) 近藤次郎著： 演算子法
5) デッチェ・フェルカ共著： 二次元ラプラス変換の理論と応用