

## 河床粒子の Saltation の機構と流砂量

正員 岸 力\*

学生員 ○福岡 捷 二\*\*

## 1. 要 旨

河床附近の粒子の運動機構を精密に調べ<sup>1)</sup>運動する粒子に働く力を運動方程式に組立て粒子水平平均速度を算出し掃流層 (Saltation Layer) 中の粒子濃度<sup>2)</sup>との積によって流砂量を求める試みをした。

流れは二次元定常流で河床粒子は非粘着性、等径、等形の球である。粒子の運動はすべて Saltation 型式である。

Saltation はランダムであるが厳密に一定様式に従って運動するとし静止の状態から第一の Saltation を解析に用いた。解析にあたって限界掃流力を考慮し又砂澱の影響は考慮していない。

誘導した理論値と実測値の比較検討がされている。

## 2. 序 論

河川の流砂は河床の安定という見地から極めて重要な問題であり、その他多くの河川水理の問題に関係を有している。しかし河床の土砂が水流によって運ばれる機構は極めて複雑であり、特に河床附近での移動は、河床面と水の境界面との間の現象であるから定量的に把握することは今なお困難である。

在来多くの研究者によって流砂量を算定する公式をつくり、実際河川へ応用する努力がはらわれてきたが、その信頼性に不安を残している。この事は流砂機構の複雑性もさることながら式の誘導にあたって流砂の物理現象を無視したり飛躍的な仮定を導入する点にあるものと思われる。

本論文はこれらの反省にもとづいて流砂量を求める試みをした。

著者らは流砂の形式をすべて Saltation<sup>3)</sup>と仮定した。掃流流砂をすべて Saltation と仮定してしまうことは多少問題もあるが Saltation を河床から揚力によりごく僅かに浮き上り、揚力、重力、抵抗力の相互作用のもとに拋物運動を行なうものと広義に解釈すると河床の近傍で流送される粒子群はほとんど含まれるといってもよい。

この様なことよりも運動を Saltation とした場合その機

構を如何に的確に捕え、流砂量と結びつけるかが問題である。

今  $N$  を河床表面の単位面積上を移動する粒子の体積、その時単位面積あたり Saltation Layer の動く重量は

$$W = N \cdot \rho_s \cdot g$$

$C_x$  を Saltation Layer 中の粒子群の移動速度とすると単位幅単位時間の掃流砂量  $q_B$  は

$$q_B = N \cdot \rho_s \cdot g \cdot C_x \quad (1)$$

## 3. 実験装置

水路は長さ 3 m, 幅 20 cm, 高さ 15 cm のアクリル樹脂可変勾配水路である。静止の状態から任意瞬間に始まる粒子運動を撮影するため、電磁石によって粒子運動を調節した。

砂粒子はアスファルトに鉄粉で被覆し比重と磁性を調節した。粒子軌道は蛍光塗料を塗った粒子を高照度ストロボと写真機で撮影した。ストロボは東芝 SS-4B, SX-2B 型で発振周波数  $100 \pm 1$  cycle/sec である。

使用した粒子は粒径 1.87 mm, 比重 1.56 の球である。

河床には 1.2 mm の均一粒径砂をはりつけた。

## 4. 理 論

## 4-1 微分方程式

一般に変量を含む物理的諸問題を数学的に公式化すると微分方程式になることが多い。

物体の運動を力学的に解明しようとする場合はその典型的なものである。しかしながら微分方程式の組立にあたって微視的平衡という概念があるから不均一場に於てはその場の特性として平均量を取り得る場合のみ微分方程式による理論展開が可能になる。

河床上の流れの乱流機構は粒子の上に作用する力の解析に非常に重要な役割を果し、乱流流水の基本的知識は物理的に正しい方法で問題を解く鍵を握っている。

一般に粒子に作用する力は流れの乱れの為刻々変化し平均値のまわりを変動する。

\* 北海道大学工学部 教授 工博

\*\* 北海道大学工学部 土木工学科 大学院

従って水中での粒子運動も空中と同様に微分方程式による展開が可能である。

#### 4-2 砂粒の移動開始

河床粒子の移動開始は、揚圧力が粒子重量にうちかった時に始まると仮定する。

高さ方向の揚圧力の分布を次式で示す。

$$\frac{L}{G} = \frac{Y}{Y_{cr}} e^{-a\left(\frac{y}{D}\right)} \quad (2)$$

ここに

$$G = \alpha_f \gamma_s D^3 \quad (3)$$

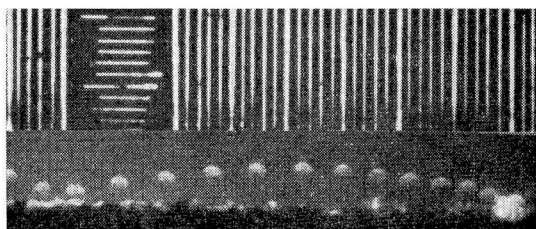
$$\gamma_s = (\rho_s - \rho) g \quad (4)$$

$$Y = \rho V_*^2 / \gamma_s D \quad (5)$$

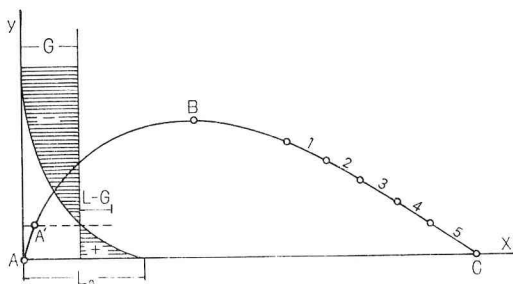
$\alpha$  は実験から求まる定数である。

### 4-3 Saltation の運動の式

写真は実測粒子軌道の一例である。図-1 は Saltation の軌道を模型化したもので河床から A' 点まで揚力が重力に優っており上向きの力が粒子に伝わり A' 点で最大速度に



写真—1



図一1 粒子軌道図

なりそれ以後力関係は逆転し次第に速度を失いB点で速度は零になる。

粒子に作用する力を運動方程式にあらわすと

水平方向について

$$\left(M + \frac{1}{2}m\right) \frac{dC_x}{dt} = R_x \quad (6)$$

垂直方向

$$\left(M + \frac{1}{2}m\right) \frac{dC_y}{dt} = L - G - R_y \quad (7)$$

ここに

$$M = \alpha_f \rho_s D^3 \quad m = \alpha_{fi} \rho D^3 \quad (8)$$

$$R_x = \alpha_{D_x} \rho D^2 (U - C_x)^2 \quad (9)$$

$$R_y = \alpha_{D_{\mathbf{P}}} \rho D^2 C_y^2 \quad (10)$$

$\frac{1}{2}m$  は粒子が加速されることによって生ずる抵抗 (Virtual Mass) である。

(7) 式を変形して

$$\frac{1}{2} \frac{(M+1/2 m)}{G} \frac{dC_y^2}{dy} = \frac{L}{G} - \frac{R_y}{G} - 1 \quad (11)$$

(2) (3) (8) (10) 式より (11) 式は

$$\frac{d[\zeta_y^2]}{d\eta} + \frac{2\alpha z_1}{2+\tilde{s}} \zeta_y^2 = \frac{4z}{2+\tilde{s}} \left( \frac{1}{Y_{av}} e^{-a\eta} - \frac{1}{Y} \right) \quad (12)$$

ここで

$$\eta = \frac{y}{D} \quad (13)$$

$$\zeta_y = \frac{C_y}{V_*} \quad (14)$$

$$z_1 = 2 \frac{\alpha_D}{\alpha \alpha_f} z \quad (15)$$

$$z = \frac{\rho}{\rho_s} \quad (16)$$

(12) 式を上向き方向 ( $\widehat{AB}$ ) に条件

 $\eta=0$  で  $\zeta_y=0$  を用いて解くと

$$\zeta_y^2 = \frac{2z}{\alpha Y} \left[ \left( \frac{1}{z_1} - \frac{Y}{Y_{cr}} \frac{2}{2z_1 - 2 - z} \right) e^{-\frac{2\alpha z_1}{2+z}\eta} - \frac{1}{z} + \frac{Y}{Y_{cr}} \frac{2}{2z_1 - 2 - z} e^{-\alpha\eta} \right] \quad (17)$$

(12) 式を下向き方向 ( $\widehat{BC}$ ) に条件

 $\eta = \eta_{\max}$  で  $\zeta_y = 0$  を用いて解くと

$$\zeta_y^2 = \frac{2z}{\alpha Y} \left[ \left( \frac{1}{z_1} - \frac{Y}{Y_{cr}} \frac{2}{2z_1 - 2 - z} e^{-\alpha \eta_{\max}} \right) e^{\frac{2\alpha z_1}{2+z} (\eta_{\max} - \eta)} - \frac{1}{z} + \frac{Y}{Y_{cr}} \frac{2}{2z - 2 - z} e^{-\alpha \eta} \right] \quad (18)$$

水平方向 (6) 式について (9) (8) 式を用いて変形すると

$$\frac{dC_x}{dt} = \frac{\alpha_D}{\alpha_f} \frac{1}{D} \frac{\rho}{\rho_s + \frac{1}{2}\rho} U^2 \left(1 - \frac{C_x}{U}\right)^2 \quad (19)$$

次の無次元化を行なう

$$\zeta_x = \frac{C_x}{V_*} \quad (20)$$

$$\frac{U}{V_*} = \beta \quad (21)$$

$$\theta = \frac{tV_*}{D} \frac{\alpha_D}{\alpha_f} z \quad (22)$$

従って (19) 式は

$$\frac{d\zeta_x}{d\theta} = \frac{\rho_s}{\rho_s + \frac{1}{2}\rho} \beta^2 \left(1 - \frac{\zeta_x}{\beta}\right)^2$$

$$\theta = \int_0^{\zeta_x} \frac{\rho_s + \frac{1}{2}\rho}{\rho_s} \frac{d\zeta_x}{\beta^2 \left(1 - \frac{\zeta_x}{\beta}\right)^2} \quad (23)$$

(23) 式の  $\theta$  は  $\zeta_x$  の関数である。しかし  $\zeta_x$  を決めるには  $\beta$  が  $y/k_s$  の関数で  $y/k_s = \eta$  と共に変化するのでこのままでは解けない。そこで Saltation Layer が河床のごく近傍に限られ水深に比して極端に小さいものとする、速度勾配の影響は無視される。

$$\therefore \frac{U}{V_*} = \frac{\bar{U}}{V_*} = \bar{\beta} = \text{一定}$$

従って (22) 式は

$$\frac{d\theta}{d\zeta_x} = \frac{\rho_s + \frac{1}{2}\rho}{\rho_s} \cdot \frac{1}{\bar{\beta}^2 \left(1 - \frac{\zeta_x}{\bar{\beta}}\right)^2}$$

上式を初期条件  $\theta=0$  で  $\zeta_x=0$  を用いて解くと

$$\zeta_x = \bar{\beta} - \frac{\bar{\beta}(1+1/2z)}{\bar{\beta}\theta + (1+1/2z)} \quad (24)$$

Saltation ABC の平均速度を次の様にして求める。

$$(\zeta_x)_m = \frac{1}{\theta_{AC}} \int_0^{\theta_{AC}} \zeta_x d\theta \quad (25)$$

(24) 式から各点水平速度が求まり (24) 式を (25) 式に代入すると Saltation ABC の平均速度  $(C_x)_m$  が求まる。( $\bar{\beta}=10.0$ )

#### 4-4 跳躍時間の計算

垂直方向の運動方程式 (11) 式を (2) (3) (5) (8) (10) (14) (15) (16) (22) 式を用いて変形すると次式となる。

$$\frac{d\theta}{d\zeta_y} = \frac{1}{\frac{2}{2+z} \frac{\alpha_f}{\alpha_D} \frac{1}{Y_{cr}} e^{-\alpha_f} - \frac{2}{2+z} \zeta_y^2 - \frac{2}{2+z} \frac{\alpha_f}{\alpha_D} \frac{1}{Y}} \quad (26)$$

(26) 式を直接積分して  $\theta$  を求めることは困難であるので数値積分で解く。

垂直運動で上下方向とも抵抗係数  $\alpha_{D_f}$  を同一にとるならば、(26) 式は上下方向とも同じ  $\theta$  を与えることになる。

ここに

$$\widehat{\theta}_{AB} = \widehat{\theta}_{BC}$$

従って  $\widehat{\theta}_{AC}$  は

$$\widehat{\theta}_{AC} = \widehat{\theta}_{AB} + \widehat{\theta}_{BC} = 2\widehat{\theta}_{AB}$$

(26) 式の数値積分は、次の境界条件と初期条件を用いて Kutter の第3近似法で解く。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{初期条件} & \zeta_y = 0 \text{ に対し } \theta = 0 \\ \text{境界条件} & \zeta_y = 0 \quad \theta = \theta_{AB} \end{array} \right\} \quad (27)$$

$\theta_{AC}$  を (25) 式に代入することにより  $(C_x)_m$  が求まる。

#### 4-5 実測資料の検討

導かれた理論式は河床組成物質が一定であるならば掃流力の無次元表示  $Y$  [(5) 式] 即ち shear velocity  $V_*$  によって一義的に流水中の粒子運動が決定される。

従って実測で得られた資料も各 shear velocity 毎に整理する。図-2 より Saltation の跳躍高さ ( $h$ ) と飛距離 ( $L$ ) の間にはほぼ正規分布しており両者の間に明確な相関が存在することが判明した。

図-3, 4 から Saltation の跳躍高さ、飛距離とも  $\chi^2$  検定の結果はほぼ正規分布しており、それぞれの平均値は、粒子運動を特長づける大きな意味を持っていることがわかる。

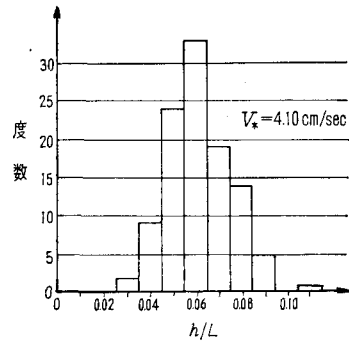


図-2  $h/L$  頻度分布

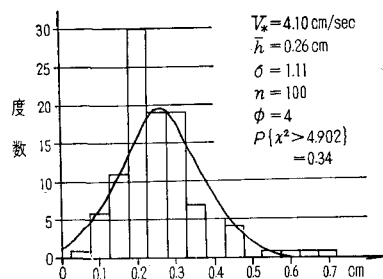


図-3 飛高頻度分布

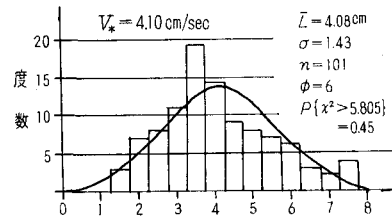


図-4 飛距離頻度分布

#### 4-6 定数値の決定

理論展開はすべて平均的な Saltation であるので実験で得た資料も統計的手法を用いて整理し平均値による考察から定数を求めた。

提案された運動方程式が流水中の運動現象を力学的に十

分あらわしているかどうかの判定は Saltation している粒子の軌道が理論式で求めた軌道と良く近似し更に跳躍時間が等しければ運動方程式は流水中の粒子運動を十分あらわしているものと考えられる。

この観点から実測平均粒子軌道に理論軌道を合わせるような定数決定を行なった。

#### 4-6-1 揚力減衰定数 $\alpha$ の決定

(2) 式は河床より各高さでの揚力の分布を示す式である。

Chepil<sup>6)</sup> は揚力が河床から数粒径の高さで消えることを実験的に確かめた。

揚力は垂直到達高さに直接関係があるので理論到達高さを実測平均到達高さを一致させるような  $\alpha$  の値を決定する必要がある。実測粒子軌道の各区分 (図-1, 1. 2. 3 ...) に対応する水平垂直区分平均速度が写真 1 より求まるので (17) (18) 式で実測区分垂直速度に一致させるような抵抗係数  $\alpha_D$  を区分毎に求める。

ここで抵抗係数  $\alpha_D$  には、おのづから水理的制限がある範囲内の値よりとり得ない。

抵抗係数  $\alpha_D$  としては水理学書 (例えば H. Schlichting, Boundary Layer Theory) に掲げられている球の抵抗係数  $C_D$  との関係は

$$\alpha_D = \frac{\pi}{8} C_D \quad (28)$$

であり、抵抗係数  $C_D$  即ち  $\alpha_D$  としては粒子レーノルズナンバー ( $Re$ ) と共に大ざっぱに 4 つの領域にわけられる。

- (a)  $Re=1$  以下の小さなレーノルズナンバーに対し、Stokes-Ossen の抵抗式が成立し抵抗が速度に一次で比例する領域である。
- (b)  $Re$  が  $1 \times 10^4 \sim 2 \times 10^5$  の範囲で (9) (10) 式の 2 乗抵抗式が良く満足され  $C_D \approx 0.4$  の一定値となる領域
- (c) これらの中間領域でレーノルズナンバーと共に抵抗値が急速に変化し速度の 1 乗と 2 乗の間に存在する領域
- (d) 速度の 2 乗に比例する領域を越え、境界層内の流れが乱流になることにより抵抗が速度が増しても減少する領域

$$2 \times 10^5 < Re < 4 \times 10^5$$

本実験では掃流力が限界掃流力の 2~7 倍の範囲にわたる実験を行なった。

$Re(CD/\nu)$  の垂直速度  $C$  としては粒子垂直速度  $C_y$  であり、実測によれば (1~10 cm/sec) の範囲内で変化し、一方水平方向の速度  $C$  としては当然流体と粒子の相対速度  $|U-C_x|$  を用いるべきである。

相対速度の最大値は (10~15 cm/sec) 程度であり平均的には (7~8 cm/sec) 程度の相対速度をもっている。

これをレーノルズナンバーに計算すると最大速度で

$$\text{垂直方向} \quad Re = \frac{C_y D}{\nu} \approx \frac{0.187 \times 10}{0.01} = 1.87 \times 10^2$$

$$\text{水平方向} \quad Re = \frac{0.187 \times 15}{0.01} = 2.80 \times 10^2$$

いずれも  $10^2$  のオーダーで抵抗が前述の (c) の領域に入り抵抗係数がレーノルズナンバーと共に著しく変化する。

従って各区分について一定の  $\alpha$  に対し抵抗係数を計算し最終的にそれらの平均的な値を求めた。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_D y &= \pi/7 \\ \alpha_D H &= \pi/8 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

これらの抵抗係数の時  $\alpha=2.5$  が最も実測平均軌道に合致することが明らかになった。

$$\alpha = 2.5 \quad (30)$$

粒子は球であるから

$$\alpha_f = \pi/6 \quad (31)$$

これらの定数値を用い、運動方程式 (6) (7) から計算した粒子軌道は図-5a, 5b である。

両軌道は良く近似しており、跳躍時間についてもほぼ等しいので理論式は、水中での粒子の Saltation の機構を十分表現しているものと思われる。

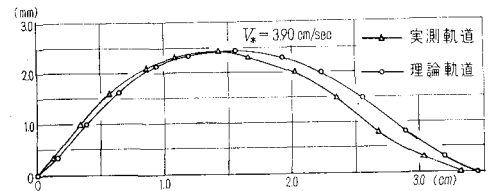


図-5a 実測軌道と理論軌道の比較

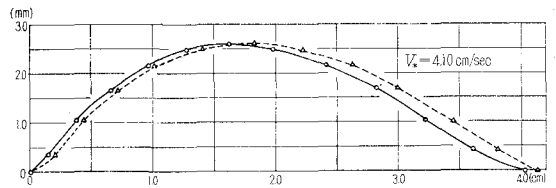


図-5b 実測軌道と理論軌道の比較

#### 4-7 Saltation Layer の粒子濃度

(1) 式の粒子水平平均速度  $C_{x,m}$  が求まったので量的な問題にまで拡張する為に  $N$  を求める必要がある。

河床附近の粒子濃度を支配する機構は複雑であるが、佐藤、吉川、芦田の行なったと同様に模型化して砂粒に仿らく乱れによる揚力によると仮定する<sup>2)</sup>。

H. A. Einstein と EL. Samni<sup>4)</sup>, Chepil<sup>5)</sup>, Zingg<sup>7)</sup> は揚圧力の変動値が、正規誤差分布法則に従うことを確かめた。

これを式にあらわすと

$$f(\Delta p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\Delta p^2}} e^{-\frac{\Delta p^2}{2\Delta p^2}} \quad (32)$$

$$\text{但し } \int_{-\infty}^{\infty} f(\Delta p) d\Delta p = 1 \quad \sqrt{\Delta p^2} = \text{標準偏差}$$

揚圧力の瞬時値  $p$

$$p = C_L \cdot \frac{\rho}{2} U_b^2 \quad (33)$$

揚圧力の平均値  $\bar{p}$

$$\bar{p} = C_L \cdot \frac{\rho}{2} \bar{U}_b^2 \quad (34)$$

従って変動値  $\Delta p$  は

$$\Delta p = p - \bar{p} = C_L \cdot \frac{\rho}{2} \bar{U}_b^2 \left( \frac{U_b^2}{\bar{U}_b^2} - 1 \right) \quad (35)$$

流砂量が定常であるとする、揚圧力が粒子群に及ぼす力積は Saltation Layer 中の粒子群が下向きに及ぼす力積に等しい。

河床単位面積のうち揚圧力が効果的に及ぼす面積割合を  $\gamma$ ,  $\delta t$  時間のうち揚圧力が効果的に及ぼす時間を  $\delta t'$  とすると  $\delta t$  時間に流水が揚圧力により粒子に効果的に作用した力積は単位面積について

$$\delta t' \cdot \gamma \int_{p_c}^{\infty} p f(p) dp$$

$p_c$  粒子を浮揚させる限界揚圧力  
一方重力が鉛直下方に与える力積は

$$\delta t \cdot N(\rho_s - \rho) g$$

従って  $\delta t' = \delta t$  とおくと

$$N(\rho_s - \rho) g = \gamma \int_{p_c}^{\infty} p f(p) dp \quad (36)$$

$N$  を求めるため (36) 式右边で  $p = \bar{p} + \Delta p$  と

$$f(\Delta p) d(\Delta p) = f(p) dp \quad (37)$$

を考慮すると (36) 式は

$$N(\rho_s - \rho) g = \gamma \int_{\Delta p_c}^{\infty} (\bar{p} + \Delta p) f(\Delta p) d(\Delta p) \quad (38)$$

(38) 式に (32) 式を代入し変形すると

$$N(\rho_s - \rho) g = \gamma \bar{p} \int_{\Delta p_c}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\Delta p^2}} e^{-\frac{\Delta p^2}{2\Delta p^2}} d(\Delta p) + \gamma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\Delta p^2} e^{-\frac{\Delta p^2}{2\Delta p^2}} \quad (39)$$

(39) 式を解く為  $p_c$ ,  $\Delta p_c$  を考える。1 個の砂粒の釣合で

$$p \cdot \frac{\pi}{4} D^2 = (\rho_s - \rho) g \cdot \frac{\pi}{6} D^3 \quad (40)$$

今限界状態として、佐藤らと同様に揚圧力の変動値が標準偏差の 2 倍の所の圧力が粒子重量にうちかつ掃流力を限界掃流力と定義すると拾上げ確率 2~3% で著者らの実験データの解析で岩垣公式<sup>8)</sup> で限界掃流力を計算したが、ほぼ岩垣の定義と一致する。

上述の定義より

$$(1+2\sigma)(\bar{p}_c) = p_c \quad (41)$$

但し  $\sigma$  は、揚圧式の標準偏差と平均揚圧力の比で、

Einstein<sup>4)</sup> らや Chepil<sup>5)</sup> はすべての水理条件で一定であることを実験的に確かめた。

$$\sigma = \frac{\sqrt{\Delta p^2}}{\bar{p}} \quad (42)$$

(34) 式を (41) 式に代入して

$$p_c = (1+2\sigma) \frac{C_L}{2} \rho U_{b,c}^2 \quad (43)$$

限界状態に対して (40) 式に (41) 式を代入して

$$(1+2\sigma)(\bar{p}_c) = \frac{2}{3} (\rho_s - \rho) g D \quad (44)$$

粗面壁を有する河床附近の流速は対数分布則に従う。

(34) 式のその位置として理論河床から  $y_0$  にとると

$$\bar{U}_b = (8.5 + 5.75 \log y_0/k_s) V_* = a V_* \quad (45)$$

$$a = 8.5 + 5.75 \log y_0/k_s \quad (46)$$

(45) 式を (34) 式に代入すると

$$\bar{p} = \frac{C_L a^2}{2} \rho V_*^2 = \frac{C_L a^2}{2} \cdot \tau \quad (47)$$

$$\Delta p_c = p_c - \bar{p} = (1+2\sigma) \frac{(C_L a^2)_c}{2} \tau_c - \frac{(C_L a^2)}{2} \tau = \frac{C_L a^2}{2} \left\{ (1+2\sigma) \frac{(C_L a^2)_c}{C_L a^2} \tau_c - \tau \right\} \quad (48)$$

(35) (45) 式より

$$\sqrt{\Delta p^2} = C_L \frac{\rho U_b^2}{2} \sqrt{\left( \frac{U_b^2}{\bar{U}_b^2} - 1 \right)^2} = \frac{C_L a^2}{2} \tau \cdot \sigma \quad (49)$$

(48) (49) 式より

$$\frac{\Delta p_c}{\sqrt{\Delta p^2}} = \frac{1}{\sigma} \left\{ (1+2\sigma) \frac{(C_L a^2)_c}{(C_L a^2)} \frac{\tau_c}{\tau} - 1 \right\} \quad (50)$$

(39) 式で  $\Delta p / \sqrt{\Delta p^2} = t$  とおき (47) (49) (50) 式を代入して

$$N(\rho_s - \rho) g = \frac{\gamma}{2\sqrt{2\pi}} \cdot C_L a^2 \cdot \tau \left[ \int_{\frac{1}{\sigma} \left\{ (1+2\sigma) \frac{(C_L a^2)_c}{C_L a^2} \frac{\tau_c}{\tau} - 1 \right\}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \sigma e^{-\frac{\left\{ (1+2\sigma) \frac{(C_L a^2)_c}{C_L a^2} \frac{\tau_c}{\tau} - 1 \right\}^2}{2\sigma^2}} \right] \quad (51)$$

ここに

$$F\left(\frac{\tau_c}{\tau}\right) = \int_{\frac{1}{\sigma} \left\{ (1+2\sigma) \frac{(C_L a^2)_c}{C_L a^2} \frac{\tau_c}{\tau} - 1 \right\}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \sigma e^{-\frac{\left\{ (1+2\sigma) \frac{(C_L a^2)_c}{C_L a^2} \frac{\tau_c}{\tau} - 1 \right\}^2}{2\sigma^2}} \quad (52)$$

とおくと (51) 式は

$$N(\rho_s - \rho) g = \gamma \frac{C_L a^2}{2\sqrt{2\pi}} F\left(\frac{\tau_c}{\tau}\right) \cdot \tau$$

従って

$$N = \frac{\gamma \cdot C_L a^2}{(\rho_s - \rho) g} F\left(\frac{\tau_c}{\tau}\right) \cdot \tau \quad (53)$$

(53) 式を (1) 式に代入すると、単位幅単位時間あたりの流砂量  $q_B$  (g/cm, sec) は

$$q_B = N \cdot \rho_s \cdot g \cdot (C^x)_m$$

$$= \gamma \cdot \frac{C_L a^2}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\rho_s}{\rho_s - \rho} F\left(\frac{\tau_c}{\tau}\right) \cdot \tau \cdot C_{z,m} \quad (54)$$

#### 4-8 定数値の決定

##### (a) $\gamma$ の決定

$\gamma$  は河床単位面積中揚圧力が効果的に伝わる面積割合である。White<sup>9)</sup>, Kalinske<sup>10)</sup> は全抵抗 (Drag)  $\tau_0$  は流体によって動かされる最上層粒子によって受け持たれるとした。

この仮定にもとづいて White は “Packing Coefficient”  $\gamma$  は河床表面にある粒子を数え、粒子の最大水平横断面積を計算し河床の全水平面積でこの面積を割ることによって  $\gamma = 0.35$  を決定した。

しかしこの方法では、完全に表面にあらわれているものと埋まっていたが流れている間に表面に出てきたものとの間にフルイ分作用が起り、このことは何ら法則性がなく偶然的なものであるから正確な係数決定はできない。

Chepil<sup>9)</sup> は Drag と Lift の比が一定 ( $L = 0.85D$ ) であるところから揚力に対する  $\gamma$  は Drag に対するものと同じでなければならないとし  $\gamma$  の決定法を全河床上の単位面積についての平均 Drag と Lift と流体によって動かされる最上層の単位面積についての Drag と Lift の比としてあらわされるとした。これは White<sup>9)</sup> の方法よりも確実である。

Chepil はこの方法による直接測定で次の値を得た。

$$\gamma = 0.21 \quad (55)$$

##### (b) $C_L, C_L a^2$ の決定

揚圧力は一般に (33) 式であらわされ  $p$  は粒子の上部と下部の圧力差であるところから (33) 式を変形して次式が導かれ得る。

$$C_L = \frac{2g\bar{h}}{U^2} \quad (56)$$

$$\Delta\bar{h} = \bar{h}_B - \bar{h}_T \quad (\text{図-6 参照})$$

$U$  = 河床より任意距離での速度

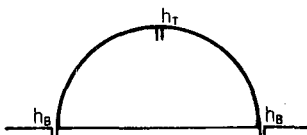


図-6

Einstein と EL. Samni は図-6 の様な半球を河床に密にはりつけ、水頭差  $\Delta\bar{h}$  の得られた断面での速度測定から揚力係数  $C_L$  を河床から種々の距離で求め  $C_L$  と  $y/k_s$  の関係を図示した<sup>4)</sup>。彼等は河床から  $0.35 k_s$  ( $k_s = D$  粒径) の距離で  $C_L = 0.178$  になることを見出した。

一方 Chepil<sup>11)</sup> も Einstein らと同様に半球の頂部と下部の圧力差が平均揚力を与えるとして種々の大きさの半球を風洞底部にはりつけ 図-7 の様な装置で半球で占められて

いる水平単位面積について、平均揚力を半球の底部と zone A, B, C の圧力差から決定した。

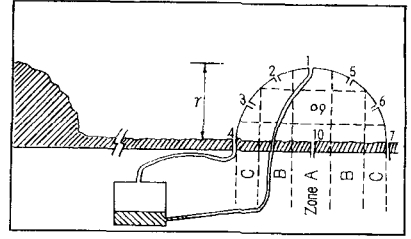


図-7

ここで注目値することは Einstein らの方法 (図-6) は Chepil の方法 (図-7) の  $(P_4 - P_1)$  と  $(P_7 - P_1)$  の平均に相当するはずであるが 2.85 倍大きい揚圧力を示した。

従って  $y = 0.35D$  での Einstein らの  $C_L = 0.178$  は 0.0624 に相当することになる。

実際 Chepil の実験で求めた理論河床から  $0.35D$  での  $C_L$  の値は 0.068 であった。

この差は Einstein らと Chepil の揚力を決定する原理的な差による。即ち Einstein らは半球の頂部と下部の圧力差として求めているのに対し Chepil は半球の圧力分布から決定したためである。

Shear flow の中での実験値の信頼性は Chepil の測定法にあると思われるので Einstein らの求めた各点での揚力係数値を 2.85 で除した値をもって各点での揚力係数とする。  $C_L = 0.068$  と 0.0624 の違いは、半球の配列状態の関係があると思われる。

理論河床から各位置での揚力係数  $C_L$  と (46) 式よりの  $a$  との積から  $C_L a^2$  を計算したものが表-1 である。但し  $C_L$  の値としては平均値を用いた。

(54) 式の  $C_L a^2$  は下表から明らかなように Saltation Layer 内ではほぼ一定値を示す。

表-1

| $y/k_s$ | Einstein<br>の $C_{L1}$ | $C_L = \frac{C_{L1}}{2.85}$ | $a$<br>(46 式) | $C_L a^2$ |
|---------|------------------------|-----------------------------|---------------|-----------|
| 0.20    | 0.310                  | 0.109                       | 4.481         | 2.183     |
| 0.30    | 0.202                  | 0.071                       | 5.493         | 2.136     |
| 0.40    | 0.160                  | 0.056                       | 6.212         | 2.165     |
| 0.50    | 0.140                  | 0.049                       | 6.769         | 2.250     |
| 0.60    | 0.120                  | 0.042                       | 7.224         | 2.197     |
| 0.70    | 0.109                  | 0.038                       | 7.610         | 2.212     |
| 0.80    | 0.097                  | 0.034                       | 7.943         | 2.145     |
| 0.90    | 0.092                  | 0.032                       | 8.237         | 2.192     |
| 1.00    | 0.086                  | 0.030                       | 8.500         | 2.182     |

$$C_L a^2 \text{ の平均} = 2.185$$

$$CLa^2 = 2.185 \quad (57)$$

(c)  $F(\tau_c/\tau)$  の決定

Chepil<sup>11)</sup> は半球での圧力分布が、その大きさや水理条件に関係せず、ほとんど一定であることを示した。

従って

$$CLa^2 \doteq (CLa^2)_c \quad (58)$$

更に又河床の最上層で揚圧力の標準偏差と平均揚圧力の比  $\sigma$  がほぼ一定で  $1/2$  であることを示した。

一方 Einstein<sup>4)</sup> らは、比は一定であるが  $\sigma = 1/2.75$  であることを見出した。

そこで  $CLa^2 = (CLa^2)_c$ ,  $\sigma = 1/2$ ,  $1/2.75$  を (52) 式に代入しそれぞれ  $F(\tau_c/\tau)$  を求めると両者ともほぼ同じ値を持つので本解析には

$$\sigma = 1/2 \quad (59)$$

を用いる。

(52) 式で  $\tau_c/\tau = 0$  の時  $F(\tau_c/\tau) = F(0) = 2.517$  である。

従って  $F(\tau_c/\tau)$  は次のように書き換え得る。

$$F(\tau_c/\tau) = F(0) \cdot f(\tau_c/\tau) = 2.517 f(\tau_c/\tau) \quad (60)$$

(54) 式に (60) 式を代入して最終的な掃流砂量  $q_B$  は

$$q_B = \gamma \cdot \frac{CLa^2}{2\sqrt{2}\pi} \cdot \frac{\rho_s}{\rho_s - \rho} \cdot 2.517 f(\tau_c/\tau) \cdot \tau \cdot (C_x)_m \quad (61)$$

尚  $f(\tau_c/\tau)$  と  $\tau_c/\tau$  の間の関係が  $\sigma = 1/2$ ,  $1/2.75$  について図-8に示されている。

## 5. 掃流流砂量の計算

(61)式より流砂量  $q_B$  は shear velocity によって一義的に決定される。

今実例として最も一般的な  $\rho_s/\rho = 2.65$  の砂について計算を行なってみる。

$$V_* = 6.0 \text{ cm/sec} \quad D = 0.221 \text{ cm} \text{ とする。}$$

(5) 式より

$$Y = \frac{\rho V_*^2}{\gamma_s D} = 0.1008 \quad Y_{cr} = \frac{\rho V_{*cr}^2}{\gamma_s D} = 0.0447$$

但し限界掃流力は岩垣公式によった。

$$z = \frac{\rho}{\rho_s} = 0.3773$$

$$\alpha = 2.5, \quad \alpha_f = \pi/6, \quad \alpha_D = \pi/7$$

これらを (26) 式に代入し数値積分して

$$(\theta_{AC})_V = 0.7378$$

$$\theta_{AC} = \frac{t_{AC} V_*}{D} \cdot \frac{\alpha_D}{\alpha_f} z$$

$\alpha_D = \pi/7$  の時  $\theta_{AC} = 0.7378$  であるから水平方向  $\alpha_{DH} = \pi/8$  に換算して水平速度  $(C_x)_m$  を算出する必要がある。(但し上式中時間  $t_{AC}$  は不変である)。

$$(\theta_{AC})_H = 0.7378 \times 7/8 = 0.6455$$

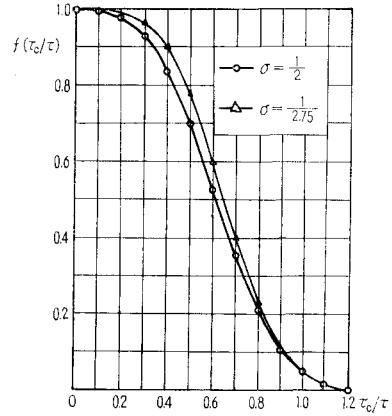


図-8

この  $\theta_{AC}$  を (25) 式に代入して

$$(\zeta_x)_m = \frac{(C_x)_m}{V_*} = 6.573$$

したがって  $(C_x)_m = 6.573 \times 6.0 = 39.4 \text{ cm/sec}$

$$\tau = \rho V_*^2 = 3.672 \times 10^{-2}$$

$f(\tau_c/\tau) = f(0.443)$  に相当する  $f$  関数は図-8より

$$f(\tau_c/\tau) = 0.778$$

$\gamma = 0.21$ ,  $CLa^2 = 2.185$  を考慮して

$$q_B = 0.370 \times 0.778 \times 3.672 \times 10^{-2} \times 39.4 \\ = 0.416 \text{ gr/cm, sec}$$

同様に、他の shear velocity に対する流砂量も計算できる。図-9は  $Y/Y_{cr}$  と  $\theta_{AC}$  の関係であり種々の shear velocity (掃流力) に対して  $\theta_{AC}$  (跳躍時間) が図上で求まる。

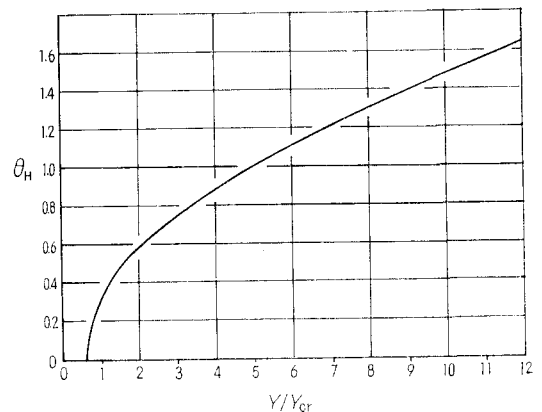


図-9  $\theta_H$  と  $Y/Y_{cr}$  の関係

理論式で求めた流砂量を Einstein が掃流流砂量公式<sup>12)</sup>で導入した無次元量  $\Phi$  (Intensity of bed load) と  $\phi$  (Flow intensity) により理論曲線を描き、佐藤ら<sup>2)</sup> が土木研究所ではば一様粒径の数種類の砂を用い、全長 114 m, 幅 80 cm の大きな実験水路で、実際河川に近い状態で実験を行なっ

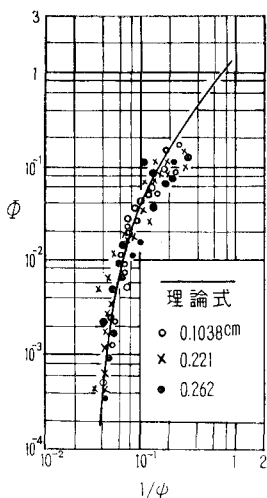


図-10

て得た資料と比較検討を行なった。

ここに

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \frac{q_B}{\rho_s g \{(\rho_s/\rho - 1) g D^3\}^{1/2}} \\ 1/\psi &= \frac{V_*^2}{(\rho_s/\rho - 1) g D} \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

## 6. 結 論

- (1) 流砂の形式を Saltation とし砂漣の影響は考慮していない。
- (2) 河床附近の粒子の Saltation の機構がかなり明確になった。
- (3) 既知の物理現象を用い粒子水平平均速度と、粒子濃度との積により流砂量を求め実測値と比較した。
- (4) 若干の仮定を含み又力学的機構が多少模型的ではあるが実測値と理論値はかなり良く一致している。
- (5) 粒径と流砂量が大になるにつれて理論曲線から僅か

にはずれる傾向がある。

## 参 考 文 献

- 1) 岸・福岡・山口：河床附近の砂の運動機構，第20回年次学術講演会概要 (1965)。
- 2) 佐藤・吉川・芦田：河床砂礫の掃流運搬に関する研究 (1)，土木研究所報告。
- 3) M. S. Yalin: An Expression for the Bed Load Transportation, Proc. A.S.C.E. HY. (1963)。
- 4) H. A. Einstein and EL. Samni: Hydrodynamic Forces Acting on Particles in the Surface of a Stream Bed, thesis presented to the University of California, (1949)。
- 5) W. S. Chepil: Equilibrium of Soil Grains at the Threshold of Movement by Wind, Soil Sci. Soc. of Am. Proc. 23 (1959)。
- 6) W. S. Chepil: The Use of Spheres to Measure Lift and Drag on Wind-Eroded Soil Grains, Soil Sci. Soc. of Am. Proc. 25 (1961)。
- 7) A. W. Zingg and W. S. Chepil: Aerodynamics of Wind Erosion, Agr. Eng. 31 (1950)。
- 8) 岩垣雄一：限界掃流力に関する基礎的研究，土木学会論文集，第41号。
- 9) White: Equilibrium of Grains on Bed of Stream, Proc. Roy. Soc. 174A (1940)。
- 10) A. A. Kalinske: Turbulence and the Transport of Sand and Silt by Wind, Annals. New York Acad. of Science, XLIV (1943)。
- 11) W. S. Chepil: The Use of Evenly Spaced Hemispheres to Evaluate Aerodynamic Forces on a Soil Surface, Trans. A.G.U. 39 No. 3。
- 12) H. A. Einstein: The Bed Load Function for Sediment Transportation in Open Channel Flows, U.S. Department Agriculture Soil Conservative Service Technical Bulletin (1950)。