

断面の変形を考慮した矩形箱桁の捩りについて

正員 ○能 町 純 雄*

正員 尾 崎 訓**

1. は し が き

捩れをうける中空薄肉部材では断面変形を阻止するようにダイヤフラムを数多く入れてその剛性を大きくしたり、コンクリート箱桁のように、みずからのラーメン剛性によって断面の変形に抵抗させ、捩れた後も断面形はもとのままであるという仮定のもとに、曲げ捩り理論¹⁾で解析されているのである。しかし捩れ変形と同時に多少に拘らず断面形は変形する筈で、これを考えて解析すれば従来の結果とどの程度の差が生ずるか？ この問題は興味ある検討事項であろう。ここでは中空対称矩形断面をとりあげて議論を進めたい。

まず矩形断面を構成している各辺部材を分離してその個々について、変形と剪断力との二次元応力の関係式を設定し、矩形断面頂点における力のつりあいと適合条件と断面変形抵抗の条件式を出発点とする。長さ方向 x に向いている変位は平面保持を仮定し、荷重は矩形頂点のみに作用すると考える。ダイヤフラムが数多くある場合は、 x 方向に平均化した剛度を用いる。これは格子構造における直交異方性板理論の応用と同じ考えである。薄肉の厚さ方向のウォーピングの変化による捩れ抵抗はこの場合、微少であるから無視する。

2. 細長い矩形板エレメントにおける変位剪断方程式

構成された断面の一部材を取り出し、図-1 のように深さ

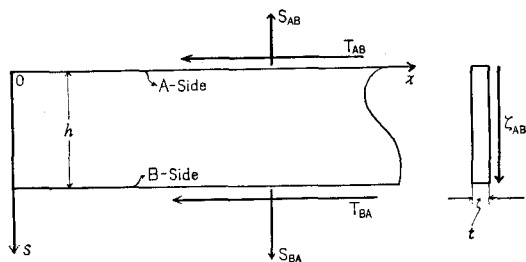


図-1

の方向を s 、軸長方向を x 、それぞれの方向の変位を w 、 u とする。 s 、 x 方向の法線断面力を p_s 、 p_x 、剪断力を q とし、 ζ をダイヤフラムまたは、断面のラーメン剛性からくる断面変形の抵抗力であって A 、 B 上下端間の平均値とする。このとき力のつりあい方程式は、

$$\frac{\partial p_s}{\partial s} + \frac{\partial q}{\partial x} + \zeta = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0 \quad (2)$$

また

$$p_x = E t u' \quad (3)^{***}$$

$$q = G t \left(\frac{\partial u}{\partial s} + w' \right) \quad (4)$$

$$u' = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad w' = \frac{\partial w}{\partial x},$$

u については、平面保持を仮定したから

$$u = u_A (1 - s/h) + u_B \frac{s}{h}, \quad (5)$$

したがって (2) は (3)、(5) より

$$q = T_{AB} - E u_A' t \left(s - \frac{s^2}{2h} \right) - E u_B' t \frac{s^2}{2h} \quad (6)$$

また $s=h$ で $q = -T_{BA}$ であるから

$$T_{AB} + T_{BA} = \frac{E t h}{2} (u_A' + u_B') \quad (7)$$

この場合 T_{AB} 、 T_{BA} は図-1 の向きを正とする。また (6) を

(1) に代入して s で積分し $s=0$ で $p_s = S_{AB}$ を考えれば

$$p_s = -T_{AB}' s + E u_A' t \left(\frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{6h} \right) + E u_B' t \frac{s^3}{6h} + S_{AB} - \zeta_{AB} h, \quad (8)$$

上下端の条件中、 $p_s = S_{BA}$ ($s=h$) を用いて上式から T_{AB} を求めれば

$$T_{AB} = \frac{E h t}{6} (2u_A' + u_B') + \frac{\bar{S}_{AB} - \bar{S}_{BA}}{h} - \zeta_{AB} \quad (9)$$

上式と (7) 式から

$$T_{BA} = \frac{E h t}{6} (2u_B' + u_A') + \frac{\bar{S}_{BA} - \bar{S}_{AB}}{h} + \zeta_{AB} \quad (10)$$

* 室蘭工業大学教授工博

** 室蘭工業大学助教授

*** (3) 式中 E の代りに $E/(1-\nu^2)$ を用いると板としての剛度が入って来る。

式中 u'_A, u'_B は A, B 端における水平変位の x についての2度微分で $\bar{S}_{AB}, \bar{S}_{BA}$ および $\bar{\zeta}_{AB}$ はそれぞれ $\bar{S} = \int S dx$, $\bar{\zeta} = \int \zeta dx$ である。この (9), (10) 式はラーメン構造におけるタワミ角公式のようなものであり、変位剪断公式と名付けることにする。

3. 変位 w

公式 (4) に (5) を代入して

$$Gtw' = q + Gt(u_A - u_B)/h$$

さらに (6) と (9) を適用して

$$Gthw' = \frac{Eh^2t}{6}(2u'_A + u'_B) + \bar{S}_{AB} - \bar{S}_{BA} - \bar{\zeta}_{AB}h - Eu'_A th \left(s - \frac{s^2}{2h} \right) - Eu'_B th \frac{s^2}{2h} + Gt(u_A - u_B) \quad (11)$$

この式は w が s 方向で変化することを表わしているがその変化は微少であるから AB 間の w の平均値をとり梁理論にならって w の値は s のどの点でも一定とみなせば

$$Ghtw'_{AB} = Gt(u_A - u_B) + \bar{S}_{AB} - \bar{S}_{BA} - \bar{\zeta}_{AB}h \quad (12)$$

となり w は x のみの関数となる。

4. 中空矩形対称断面における基本的考察

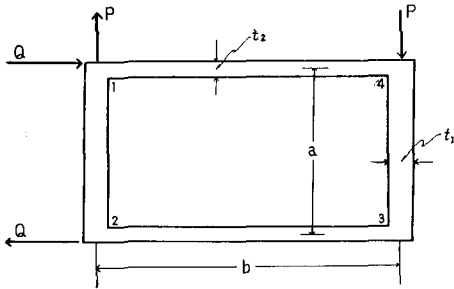


図-2

図-2 のような断面と荷重状態では変形の逆対称性から各頂点の水平変位は

$$u_1 = u_3 = -u_2 = -u_4$$

剪断流は $T_{12} = T_{34}, T_{14} = T_{32}$

変位剪断方程式は

$$T_{14} = \frac{Ebt_2}{6}u'_1 + \frac{\bar{S}_{14} - \bar{\zeta}_{41}}{b} - \bar{\zeta}_{14} \quad (13)$$

$$T_{12} = \frac{Eat_1}{6}u'_1 + \frac{\bar{S}_{12} - \bar{\zeta}_{21}}{a} - \bar{\zeta}_{12} \quad (14)$$

節点 1 のまわりの断面力のつりあいから $\bar{S}$ の各値は、図-3 から直ちに求まる。

すなわち

$$S_{14} + Q = 0, \quad S_{12} - P = 0 \quad (15)$$

節点 2, 4 に外力がないから

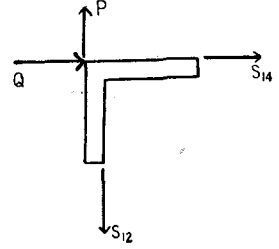


図-3

$$S_{41} = S_{21} = 0 \quad (16)$$

ここで注意すべきことは、辺材のラーメン剛性による端部反力や、同じく辺材個々の捩れによる端部の反力はすべて $\bar{\zeta}$ に含ませていくことである。

次に節点 1 における剪断流の相等から

$$T_{14} + T_{12} = 0 \quad (17)$$

5. ζ と断面変形度 $\Delta\psi$ との関係

(a) ダイアフラムが完全な板の場合

ダイアフラムが数多く入っている場合はダイアフラムの厚さを x 方向に平均化して考えると、単位長さあたりの力

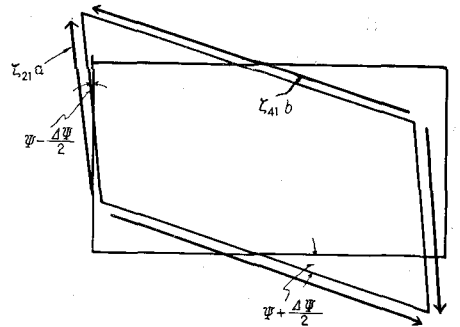


図-4

の関係は図-4 のようになる。周辺の 4 個の ζ はつりあうから鉛直方向、水平方向のつりあいをとって

$$\zeta_{21} = \zeta_{43}, \quad \zeta_{41} = \zeta_{23}$$

モーメントのつりあいは辺材個々の捩り抵抗を考慮すれば

$$ab(\zeta_{21} - \zeta_{41}) + 2G \frac{t_2^3 b}{3} \psi'' + 2G \frac{t_1^3 a}{3} \psi'' = 0 \quad (18)$$

断面の回転を ψ 、それにとりなす断面の変形度を $\Delta\psi$ とすれば

$$\psi_{12} = \psi - \Delta\psi/2, \quad \psi_{14} = \psi + \Delta\psi/2 \quad (19)$$

とすることができると (18) は

$$ab(\zeta_{21} - \zeta_{41}) + \frac{2G(t_2^3 b + t_1^3 a)}{3} \times \psi'' + \frac{G(t_2^3 b - t_1^3 a)}{3} \Delta\psi'' = 0 \quad (20)$$

とかくことができる。剪断力と角変化の関係から

$$G_0 \Delta \Psi = (\zeta_{21} + \zeta_{41})/2 \quad (21)$$

ただし

$$G_0 = \frac{Gr t_0}{l} \quad (22)$$

γ はダイフラムの数, t_0 は厚さ, l は径間長である。

(20) 式中第 2, 第 3 項は微少項であるからこれを見捨ると $\zeta_{21} = \zeta_{41} = \zeta$ とかくことができ, (21) 式は $G_0 \Delta \Psi = \zeta$ となる。ただし開断面の場合は第 2, 第 3 項は見捨ることができない。

(b) ラーメン剛性による場合 (二軸対称矩形断面)

矩形断面 1, 2, 3, 4 が 1', 2', 3', 4' へ回転し, 14 辺材が Ψ_{12} , 12 辺材が Ψ_{12} だけ回転したとすれば各頂点の端回転角は変形の逆対称性から全部等しくなる。これを φ とおく,

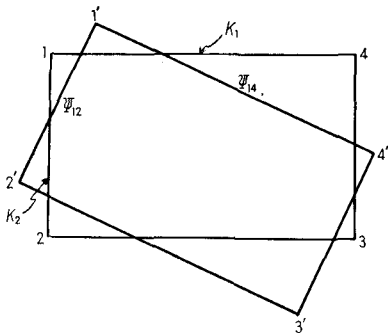


図-4

また Ψ_{14} , Ψ_{12} は鉛直辺材, 水平辺材の部材回転角であるから頂点 1 のまわりのモーメントのつりあいは

$$3\varphi(K_1 + K_2) - 3K_1\Psi_{12} - 3K_2\Psi_{14} = 0,$$

となる。ただし

$$K_1 = \frac{Et_1^3}{6a}, \quad K_2 = \frac{Et_2^3}{6b}$$

したがって

$$\varphi = \frac{K_1}{K_1 + K_2} \Psi_{12} + \frac{K_2}{K_1 + K_2} \Psi_{14}$$

タワミ角公式から

$$M_{14} = M_{41} = M_{23} = M_{32} = \frac{3K_1K_2}{K_1 + K_2} (\Psi_{12} - \Psi_{14})$$

$$M_{12} = M_{21} = M_{34} = M_{43} = -\frac{3K_1K_2}{K_1 + K_2} (\Psi_{12} - \Psi_{14})$$

故に辺材 12 に作用する剪断力 $a\zeta_{12}$ は

$$a\zeta_{12} = -\frac{1}{b} (M_{41} + M_{14} + M_{23} + M_{32})$$

$$b\zeta_{14} = +\frac{1}{a} (M_{12} + M_{21} + M_{34} + M_{43})$$

$$\therefore \zeta_{12} = \zeta_{14} = \zeta = \frac{2Et_1^3t_2^3}{ab(bt_1^3 + at_2^3)} \times \Delta \Psi$$

(a) の結果にあわせると二軸対称矩形断面のラーメン剛

性の場合

$$G_0 = \frac{2Et_1^3t_2^3}{ab(bt_1^3 + at_2^3)} \quad (23)$$

が変形抵抗係数となる。一軸対称矩形断面の場合も同じ手法で求めることができる。

6. 基本微分方程式

ここでは二軸対称矩形断面を前述のようにとり, 橋梁などのトルクは荷重の偏心によって生ずるのが普通であるがこの場合には前記 P, Q の中で $Q=0$ とすれば良い。(17) の端部剪断力のつりあいから $\zeta_{14} = \zeta_{12} = \zeta$ を考えて

$$\frac{E}{6} (bt_2 + at_1) u_1' + \frac{\bar{P}b - \bar{Q}a}{ab} - 2\zeta = 0 \quad (24)$$

振れによって矩形断面が全体として Ψ だけ時計回りに回転し, それと同時に 4 個の直角隅角が $\Delta \Psi$ だけ歪んだとし振れ率と変角率を $\theta (= \Psi')$, $\Delta \theta (= \Delta \Psi')$ とすれば,

$$w_{23}' - w_{14}' = a \left(\theta + \frac{\Delta \theta}{2} \right) \quad (25)$$

$$w_{12}' - w_{43}' = b \left(\theta - \frac{\Delta \theta}{2} \right) \quad (26)$$

であるから (12) 式を用いて上式は

$$Gt_2a \left(\theta + \frac{\Delta \theta}{2} \right) + 4Gt_2 \frac{u_1}{b} = 2 \frac{\bar{Q}}{b} + 2\zeta \quad (27)$$

$$Gt_1b \left(\theta - \frac{\Delta \theta}{2} \right) - 4Gt_1 \frac{u_1}{a} = 2 \frac{\bar{P}}{a} - 2\zeta \quad (28)$$

また

$$G_0(\Delta \theta) = \zeta' \quad (29)$$

ただし

$$G_0 = \frac{Gnt_0}{l}, \quad G_0 = \frac{2Et_1^3t_2^3}{ab(t_1^3b + t_2^3a)},$$

u_1 を (27), (28) から消去して, さらに (24) を用いて ζ を追いつくと

$$\frac{2G\theta a^2 b^2 t_1 t_2}{(t_1 b + at_2)} - \frac{Eab}{6} \frac{(bt_2 + at_1)(bt_1 - at_2)}{(bt_1 + at_2)} u_1'' = \bar{P}b + \bar{Q}a, \quad (30)$$

次に (27), (28) から ζ を消去し (29) と (24) からまた ζ を消去して $\Delta \theta$ を両方の結果から追いつくと

$$u_1''' - 2 \frac{G_0}{G} \frac{(bt_1 + at_2)}{abt_1 t_2} u_1'' + \frac{96G_0 u_1}{Eab(bt_2 - at_1)} = \frac{12(\bar{P}b + \bar{Q}a)(bt_1 - at_2)G_0}{GEa^2 b^2 t_1 t_2 (bt_2 + at_1)} - \frac{6(\bar{P}'b - \bar{Q}'a)}{Eab(bt_2 + at_1)} \quad (31)$$

7. 断面形が振れたときも不変の場合

この場合, 前記公式中 G_0 は無限大となり $\Delta \theta$ は零となる。公式 (30) 式中には G_0 が存在しないからそのままであるが, 公式 (31) 式中 G_0 を無限大とすると左辺の第 2, 第 3 項と右辺の第 1 項のみが残ることとなる。従来の理論と比

らべるため 2, 3 のおきかえを行なう。すなわち u_1 は頂点のそりであるから、これに対して無名関数 f を導入し、 $\bar{P} \cdot b + \bar{Q} \cdot a$ は外力の任意点の捩れモーメントであるから、それぞれ

$$u_1 = f \frac{ab(bt_1 - at_2)}{4(bt_1 + at_2)}, \quad \bar{P}b + \bar{Q}a = M_T,$$

とおき、この断面の warping moment inertia を I_w 、捩り剛度の断面係数を J 、捩り中心に関する断面極モーメントを I_p とすれば

$$I_w = \frac{a_2 b_2 (bt_1 - at_2)^2 (bt_2 + at_1)}{24(t_1 b + at_2)^2}$$

$$J = \frac{2a^2 b^2 t_1 t_2}{(bt_1 + at_2)}, \quad I_p = \frac{ab(bt_1 + at_2)}{2}$$

さらに η を

$$\eta^2 = 1 - \frac{J}{I_p} = \frac{(bt_1 - at_2)^2}{(bt_1 + at_2)^2}$$

とおけば (30) および (31) 式は

$$GJ\theta - EI_w f'' = M_T \quad (32)$$

$$-EI_w f'' + GJ\eta^2 f = \eta^2 M_T \quad (33)$$

上式は断面形不変を仮定した曲げ捩り理論の中で、もっとも厳密であるとされている BENSCHOTER²⁾ の結果と全く一致している。この式の結果が WAGNER 理論³⁾ と矩形断面の場合著しい差を与えることは注意しなければならない。開断面の場合両者の間に殆んど差はない。

8. 二軸対称矩形断面における数値計算例

(a) 正弦分布荷重の場合

鉛直荷重の偏心によってトルクを生ずるものとして、 $Q=0$ とし荷重は

$$p = p_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (34)$$

なる分布を仮定する。両端 $x=0, l$ で単純に支持されているときは

$$u'_1 = 0 \quad (x=0, l) \quad (35)$$

また両端で矩形断面が剛に閉じられて角度化 Ψ がないと仮定すれば境界条件は

$$\int u_1 dx = 0 \quad (x=0, l) \quad (36)$$

であるから

$$u'_1 = U \sin \frac{\pi x}{l} \quad (37)$$

とおくことができる。上式を (31) 式に代入して係数 U は直ちに求まり頂点におけるウォーピング応力は

$$\sigma_{w1} = Eu'_1 = \frac{6P_0 l^2}{a(bt_2 + at_1)\pi^2} \times \frac{1 + Fn}{1 + 2Kn + Hn} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (38)$$

ただし

$$F = \frac{l^2(bt_1 - at_2)}{abt_1 t_2 \pi^2}, \quad 2K = \frac{l^2(bt_1 + at_2)}{abt_1 t_2 \pi^2}$$

$$H = \frac{24I^4}{ab\pi^4(1+\nu)(bt_2 + at_1)}, \quad n = \frac{2G_0}{G}$$

ラーメン作用による隅角の曲げモーメントは (24) 式から

$$2\zeta = \frac{P_0}{a} \frac{2Kn + Hn - Fn}{1 + 2Kn + Hn} \sin \frac{\pi x}{l}$$

であるから

$$M_{12} = \frac{\zeta}{4} ab = \frac{P_0 b}{8} \frac{n(K+H-F)}{1 + 2Kn + Hn} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (39)$$

諸数値を次のようにおく

$$t_1 = t_2 = 15 \text{ cm} \quad l = 3,000 \text{ cm}$$

$$a = 150 \text{ cm} \quad b = 400 \text{ cm}$$

各係数は

$$F = 2.5330 \times 10^2, \quad H = 3.5058 \times 10^4$$

$$2K = 5.5726 \times 10^2, \quad n = 9.409 \times 10^{-4}$$

となり、中央点 $x = \frac{l}{2}$ で

$$\left. \begin{aligned} \sigma_w &= \frac{P_0 l^2}{t \pi^2} \times 0.26096 \times 10^{-5} \text{ kg/cm}^2 \\ M_{14} &= \frac{P_0 b}{8} \times 0.95653 \text{ kg}\cdot\text{cm/cm} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

比較のため断面形不変すなわち $n=\infty$ の値を示すと

$$\left. \begin{aligned} \sigma_w &= \frac{P_0 l^2}{t \pi^2} \times 0.05172 \times 10^{-5} \text{ kg/cm}^2 \\ M_{14} &= \frac{P_0 b}{8} \times 0.98506 \text{ kg}\cdot\text{cm/cm} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

となる。

(b) $x=c$ なる位置に単一隅力 P がある場合

この場合のフーリエ係数は $\frac{2P}{l} \sin \frac{m\pi c}{l}$ であるから、 $x=0, x=l$ が単純支持する場合

$$\sigma_{w1} = Eu'_1$$

$$= \frac{12Pl}{a\pi^2(bt_2 + at_1)} \sum_m \frac{m^2 + Fn}{m^4 + 2Kn m^2 + Hn} \sin \frac{m\pi c}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (42)$$

$$M_{12} = \frac{Pb}{4l} \sum_m \frac{m^2 n(K-F) + Hn}{m^4 + 2Kn m^2 + Hn} \sin \frac{m\pi c}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (43)$$

ただし $m=1, 2, 3, 4, \dots$,

上式 (42), (43) は次のように閉じた形で表わすことができる。

$$\sigma_{w1} = \frac{3Pl}{a\pi(bt_2 + at_1)} \left\{ \frac{\Phi(x \cdot c)}{(\alpha^2 + \beta^2)} \left(\alpha + \frac{n(F-K)}{2\alpha} \right) - \frac{\Psi(x \cdot c)}{\alpha^2 + \beta^2} \left(\beta - \frac{n(F-K)}{2\beta} \right) \right\} \quad (45)$$

$$M_{12} = \frac{\pi P b n}{16 l} (K-F) \left[\frac{\Phi(x \cdot c)}{(\alpha^2 + \beta^2)} \left(\alpha + \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{H}{K-F} - Kn \right) \right) - \frac{\Psi(x \cdot c)}{\alpha^2 + \beta^2} \left\{ \beta - \frac{1}{2\beta} \left(\frac{H}{K-F} - Kn \right) \right\} \right] \quad (46)$$

上式中

$$\left. \begin{aligned} 2(\alpha^2 - \beta^2) &= 2Kn, & (\alpha^2 + \beta^2)^2 &= Hn \\ c &= \xi_1 l, & x &= \xi l \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

$$\Phi(x \cdot c) = \frac{1}{\cosh 2\alpha\pi - \cos 2\beta\pi} \left\{ \begin{aligned} &\sinh \alpha\pi (2 + \xi - \xi_1) \\ &\times \cos \beta\pi (\xi_1 - \xi) + \sinh \alpha\pi (\xi_1 - \xi) \\ &\times \cos \beta\pi (2 + \xi_1 - \xi_1) - \sinh \alpha\pi (2 - \xi - \xi_1) \\ &\times \cos \beta\pi (\xi + \xi_1) - \sinh \alpha\pi (\xi + \xi_1) \\ &\times \cos \beta\pi (2 - \xi - \xi_1) \end{aligned} \right\} \quad (x < c), \quad (48)$$

$$\Phi(x \cdot c) = \frac{1}{\cosh 2\alpha\pi - \cos 2\beta\pi} \left\{ \begin{aligned} &\sinh \alpha\pi (2 + \xi_1 - \xi) \\ &\times \cos \beta\pi (\xi - \xi_1) + \sinh \alpha\pi (\xi - \xi_1) \\ &\times \cos \beta\pi (2 + \xi_1 - \xi) - \sinh \alpha\pi (2 - \xi_1 - \xi) \\ &\times \cos \beta\pi (\xi_1 + \xi) - \sinh \alpha\pi (\xi_1 + \xi) \\ &\times \cos \beta\pi (2 - \xi_1 - \xi) \end{aligned} \right\} \quad (x > c), \quad (49)$$

$$\Psi(x \cdot c) = \frac{1}{\cosh 2\alpha\pi - \cos 2\beta\pi} \left\{ \begin{aligned} &\cosh \pi\xi (2 + \xi - \xi_1) \\ &\times \sin \beta\pi (\xi_1 - \xi) + \cosh \alpha\pi (\xi_1 - \xi) \\ &\times \sin \beta\pi (2 + \xi_1 - \xi_1) - \cosh \alpha\pi (2 - \xi - \xi_1) \\ &\times \sin \beta\pi (\xi + \xi_1) - \cosh \alpha\pi (\xi + \xi_1) \\ &\times \sin \beta\pi (2 - \xi - \xi_1) \end{aligned} \right\} \quad (x < c), \quad (50)$$

$$\Psi(x \cdot c) = \frac{1}{\cosh 2\alpha\pi - \cos 2\beta\pi} \left\{ \begin{aligned} &\cosh \alpha\pi (2 + \xi - \xi_1) \\ &\times \sin \beta\pi (\xi_1 - \xi) + \cosh \alpha\pi (\xi_1 - \xi) \\ &\times \sin \beta\pi (2 + \xi_1 - \xi) - \cosh \alpha\pi (2 - \xi - \xi_1) \\ &\times \sin \beta\pi (\xi_1 + \xi) - \cosh \alpha\pi (\xi + \xi_1) \\ &\times \sin \beta\pi (2 - \xi - \xi_1) \end{aligned} \right\} \quad (x > c), \quad (51)$$

公式 (41) から (51) を使って中央点に単一トルクが鉛直の偶力と与えられたときのその点のそり応力と頂点のラーメン作用による曲げモーメントは近似的に

$$\sigma_{w1} = \frac{3Pl}{\sqrt{2} a (bt_2 + at_1)} \frac{\sqrt{Hn} + nF}{\pi \sqrt{Hn} (Kn + \sqrt{Hn})} \quad (52)$$

$$M_{12} = \frac{nPb\pi}{16\sqrt{2} l} \frac{\sqrt{n} (K-F) + \sqrt{H}}{\sqrt{n} (Kn + \sqrt{Hn})} \quad (53)$$

前記の諸数値を入れると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{w1} &= \frac{Pl}{t} \times 0.29473 \times 10^{-5} \quad \text{kg/cm}^2 \\ M_{12} &= P \times 0.4357 \times 10^{-2} \quad \text{kg} \cdot \text{cm/cm} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

となる。同じ荷重状態で断面形不変の場合すなわち $n = \infty$ では

$$\sigma_{w1} = \frac{Pl}{t} \times 0.06633 \times 10^{-5} \quad \text{kg/cm}^2 \quad (55)$$

また $M_{12} \rightarrow \infty$ となるが、これは板の曲げが点荷重直下で無限大になると類型的に同じで、微小幅に荷重を分布させると有限値となる。

(c) 数値計算による α 方向応力の帯員方向分布

前記 (a), (b) の結果を用いて 図-6 のような偏心荷重について頂点 1...4 に生ずる σ_w の変化をみよう。

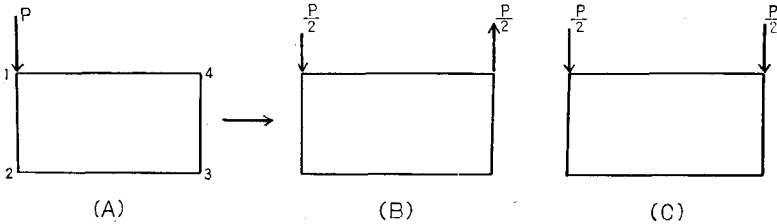


図-6

i 分布荷重 (a) について

図の (B) に対する結果は既に求まっている数値から

$$\sigma_w = \frac{P_0 l^2}{t \pi^2} \times 0.1305 \times 10^{-5} \quad \text{kg/cm}^2 \quad (56)$$

である。図の (c) 対しては上下フランジの曲げ応力は

$$\sigma'_x = \mp \frac{M_x}{I} \frac{a}{2} = \mp \frac{P_0 l^2}{\pi^2} \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{abt_2 + a^2 t_1 / 3}$$

中央点で

$$\sigma'_{x-l/2} = \frac{P_0 l^2}{t \pi^2} \times 1.4815 \times 10^{-5} \quad \text{kg/cm}^2 \quad (57)$$

故に両方を重ね合せて中央断面で

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \pm \frac{P_0 l^2}{t \pi^2} \times 1.6120 \times 10^{-5} \quad \text{kg/cm}^2 \quad (1.2 \text{ 点}) \\ \sigma_x &= \pm \frac{P_0 l^2}{t \pi^2} \times 1.3510 \times 10^{-5} \quad \text{kg/cm}^2 \quad (4.3 \text{ 点}) \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

この場合のラーメン作用による最大曲げモーメントは

$$M_{14} = \frac{P_0 b}{16} \times 0.95653 \quad \text{kg} \cdot \text{cm/cm} \quad (59)$$

また比較のために同じ荷重がフランジ 1, 4, の中央に作用したときの頂点 1, 4, の曲げモーメントを示すと、これは近似的に

$$M'_{14} = \frac{P_0 b}{8} \times \frac{K_1}{K_1 + K_2} = \frac{P_0 b}{16} \times 1.4545 \quad \text{kg} \cdot \text{cm/cm} \quad (60)$$

ii 集中荷重 (b) に対して

図中 (B) には公式 (54) から

$$\sigma_{w1} = \frac{Pl}{t} \times 0.1474 \times 10^{-5} \text{ kg/cm}^2$$

であり、(C) に対しては

$$\sigma'_a = \mp \frac{Pl}{4} \frac{a}{2I} = \mp \frac{Pl}{t} \times 0.3704 \times 10^{-5} \text{ kg/cm}^2$$

したがって各頂点における σ_x は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \mp \frac{Pl}{t} \times 0.5178 \times 10^{-5} \text{ kg/cm}^2 \quad (1.2 \text{ 点}) \\ \sigma_x &= \mp \frac{Pl}{t} \times 0.2230 \times 10^{-5} \text{ kg/cm}^2 \quad (4.3 \text{ 点}) \end{aligned} \right\} (61)$$

ラーメン作用による (B) の最大隅点曲げモーメントは

$$M_{14} = P \times 0.2178 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{cm/cm} \quad (62)$$

である。

9. 結 語

断面の変形を考えた二軸対称砥形箱桁の曲げ捩りに関する基本微分方程式を (30), (31) に誘導したが、これらの式が断面形不変と考えられる $G_0/G = \infty$ の特別の場合 BENS-COTER の理論式と一致することを確認した。ラーメン剛性によって断面変形に抵抗する本例の数値解と断面不変とする理論で同断面、同荷重を解析した値とでは、そり応力についてみると正弦分布荷重の場合で約 5 倍、中央点集中荷重の場合で 4.5 倍の増加である。図-6 の (A) に示す偏心鉛直荷重では、断面の変形を考えると最大 σ_x は平均曲げ応力の 9%, 40% 増となり、それぞれ正弦分布荷重、中央集中荷重に対応している値である。断面形不変とすれば

σ_x の増加は 2%, 9% にとどまる。

変形にともなうラーメン作用による面内曲げモーメントは (40), (41), (62) に与えてあるが、分布荷重については断面変形の影響にかかわらず、近似した結果である。断面不変形理論によって断面内のラーメン作用を GEORG KNITTEL が与えているが、本理論の $n = \infty$ の場合と一致している。本研究は昭和 40 年度文部省科学研究費によるものであることを附記する。

参 考 文 献

- 1) F.W. Bornscheuer: Beispiel und Formelsammlung zur Spannungs-berechnung dünnwandiger Stäbe mit wölbbegleitendem Querschnitt, Der Stahlbau, Heft 12, 1952.
小西一郎・小松定夫・大橋昭光: 合成箱桁の応力解析と設計計算法, 土木学会論文集第 25 号, 1655.
小松定夫: 変断面連続桁橋の立体的応力解析, 土木学会集論文第 16 号, 1956.
- 2) S. U. Benscoter: A Theory of Torsion Bending for Mulicell Beams, Applied Mechanics. March. 1954.
- 3) H. Wagner u. W. Pretschner: Verdrehung und Knickung von offenen Profilen, Lufo., Bd. 11, Nr. 6, 1934.
- 4) Georg Knittel: Zur Berechnung des dünnwandigen Kastenträgers mit gleichbleibendem symmetrischen Querschnitt, Beton und Stahlbetonbau, S 205, Heft 9, 1965.