

有限振幅波の性質について

○石 田 昌 寿*
佐 伯 浩**
岸 力***

1. 緒 論

有限振幅波の中の Stokes 波に関する研究のほとんどが、第 3 近似の Stokes 波理論によるものであったが、Bretschneider や Skjelbreia によって、Stokes 波の第 5 次近似の式が出された。本論文では、その波のもつ諸性質 (碎波限界・波形) と適用限界について検討を加えたものである。

2. 一般理論

Particle Velocity は次のような、ポテンシャル ϕ で表わされる。

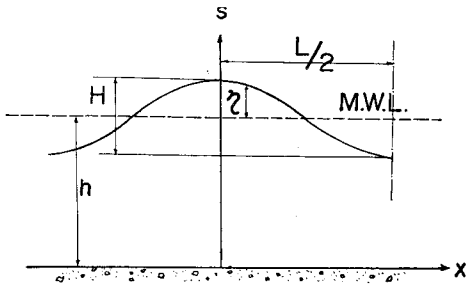


Fig. A Coordinate System

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial s} \quad (1)$$

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2)$$

boundary condition は

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial s} \right|_{s=0} = 0 \quad (3)$$

表面 ($S=h+\eta$) での boundary condition は

$$v = u \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad P=0 \quad (4)$$

particle velocity と圧力の間の関係は Bernoulli の式より (5) 式のようになる。

$$\frac{P}{\rho} + (u^2 + v^2) + 2 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -2g(K + S - h) \quad (5)$$

$$\theta = \frac{2\pi}{L} \cdot (x - \bar{C}t) = \beta(x - \bar{C}t) \quad (6)$$

(1) (4) (5) (6) 式と $S=h+\eta$ の条件より、(7), (8) 式が導かれる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{-v}{\bar{C} - u} \quad (7)$$

$$(\bar{C} - u)^2 + v^2 = \bar{C}^2 - 2g(K + \eta) \quad (8)$$

(2), (3) の両式と対称性を満足する、ポテンシャル ϕ は (9) 式の如くである。

$$\begin{aligned} \frac{\beta \phi}{\bar{C}} = & (\lambda A_{11} + \lambda^3 A_{13} + \lambda^5 A_{15}) \cdot \cosh \beta S \cdot \sin \theta \\ & + (\lambda^2 A_{22} + \lambda^4 A_{24}) \cdot \cosh 2\beta S \cdot \sin 2\theta \\ & + (\lambda^3 A_{33} + \lambda^5 A_{35}) \cdot \cosh 3\beta S \cdot \sin 3\theta \\ & + \lambda^4 \cdot A_{44} \cosh 4\beta S \cdot \sin 4\theta + \\ & \lambda^5 \cdot A_{55} \cdot \cosh 5\beta S \cdot \sin 5\theta \end{aligned} \quad (9)$$

また波形は次の (10) 式となる。

$$\begin{aligned} \beta \eta = & \lambda \cos \theta + (\lambda^2 B_{22} + \lambda^4 B_{24}) \cos 2\theta \\ & + (\lambda^3 B_{33} + \lambda^5 B_{35}) \cos 3\theta \\ & + \lambda^4 B_{44} \cos 4\theta + \lambda^5 B_{55} \cos 5\theta \end{aligned} \quad (10)$$

$$\beta \cdot K = \lambda^3 C_3 + \lambda^4 C_4 \quad (11)$$

$$\beta \bar{C}^2 = C_0^2 (1 + \lambda^2 C_1 + \lambda^4 C_2) \quad (12)$$

$\bar{C}$: 波 速

$C_0^2 = g \tanh \beta h$

K : 常 数

λ : 各々の波によって決まる常数に $(2\pi/L)$ を乗じたもの

$A_{11} \sim A_{35}, B_{22} \sim B_{55}, C_1 \sim C_4$: $\frac{h}{L}$ の関数 (この係数は、Skjelbreia と Hendrickson によって与えられている。)

* 北大工学部 土木工学科 大学院

** " " "

*** " " 教 授

(10) 式より波高は次の (13) 式で表わされる。

$$H = \eta|_{\theta=0} - \eta|_{\theta=\pi} \quad (13)$$

(10) 式と (13) 式より

$$\frac{\pi H}{h} = \frac{1}{(h/L)} \cdot \left\{ \lambda + \lambda^3 B_{33} + \lambda^5 (B_{35} + B_{55}) \right\} \quad (14)$$

$L_0 = (gT^2)/2\pi$ と $C_0^2 = g \tanh(2\pi h/L)$ と (12) 式より

$$\frac{h}{L_0} = \left(\frac{h}{L} \right) \cdot \tanh \beta h \cdot \left\{ 1 + \lambda^2 C_1 + \lambda^4 C_2 \right\} \quad (15)$$

3. 碎波限界

Stokes 波の第 3 近似解より求めた、碎波限界の式は、佐藤・浜田・岸・首藤等により、求められている。また、実験式として、浜田、Bretschneider のものもあるが、ここでは、第 5 近似の Stokes 波の碎波限界について調べた。

$u = \bar{C}$ という条件より求めると、(8), (11), (12) の式と、(10) 式で $\theta = 0$ (wave crest) とおいた、4 つの式より、(16) (17) の式が得られる。

$$\frac{\beta}{g} \cdot \bar{C}^2 = \tanh \beta h \cdot \left\{ 1 + C_1 \lambda^2 + C_2 \lambda^4 \right\} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{g} \cdot (\bar{C} - u)^2 = & \left[(1 + C_1 \lambda^2 + C_2 \lambda^4) \cdot \tanh \beta h \right. \\ & - 2(C_3 \lambda^2 + C_4 \lambda^4) - 2 \left\{ \lambda + B_{22} \lambda^2 + B_{33} \lambda^3 \right. \\ & \left. \left. + (B_{24} + B_{44}) \lambda^4 + (B_{35} + B_{55}) \lambda^5 \right\} \right] \quad (17) \end{aligned}$$

(16) 式の右辺を A , (17) 式の右辺を D とすると、(17) 式は (18) のように表わされる。

$$u = \sqrt{\frac{g}{\beta}} \cdot (\sqrt{A} - \sqrt{D}) \quad (18)$$

(16), (17), (18) の 3 式より、 $(u/\bar{C})$ は、(19) 式となる。

$$\frac{u}{\bar{C}} = \frac{\sqrt{A} - \sqrt{D}}{\sqrt{A}} \quad (19)$$

条件により、 $u = \bar{C}$ であるから、(19) 式から得られる、 λ の条件は (20) 式である。

$$\begin{aligned} \sqrt{D} = & (\tanh \beta h) \cdot (1 + C_1 \lambda^2 + C_2 \lambda^4) - 2(C_3 \lambda^2 + C_4 \lambda^4) \\ & - 2 \left\{ \lambda + B_{22} \lambda^2 + B_{33} \lambda^3 \right. \\ & \left. + (B_{24} + B_{44}) \lambda^4 + (B_{35} + B_{55}) \lambda^5 \right\} = 0 \quad (20) \end{aligned}$$

(20) 式を満足する λ が、碎波限界を与えるのである。

実際の計算操作は以下のようにした。

1) (h/L) を与えて、Skjelbreia と Hendrickson により求められた表より、 $C_1, C_2, C_3, C_4, B_{22}, B_{24}, B_{33}, B_{35}, B_{44}, B_{55}$ の係数を求めて、(20) 式へ代入して、 λ の 5 次方程式として解き、与えられた (h/L) に対する、 λ の値を求める。

2) 求められた λ により、(14) 式から (H/h) を計算して $(H/L) \times (h/L) = H/L$ より (H/L) を求める。求められた (h/L) と (H/L) の碎波点での関係を示したグラフが Fig. 1 である。

Fig. 1 からわかるように、 $(h/L) \div 0.114$ まで plot されている。これは (h/L) をこれより小さくすると、 (H/h) の値が急に振動するので、現実の波とは大きく異なるので、計算を中止したものである。これを、B.E.B. の実験値と比

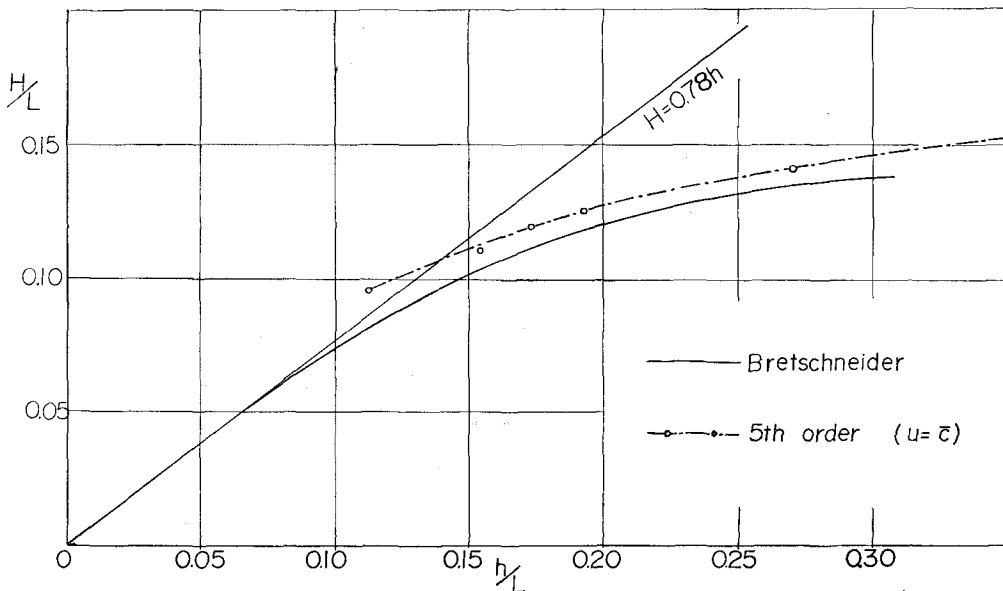


Fig. 1. H/L versus h/L for maximum waves

較すれば、計算値は実測値より一般に大きい。また $(h/L) < 0.135$ では、孤立波理論から求められた $(H/h) = 0.78$ より大きくなる。

4. 砕波時の $(u/\bar{C})$ の計算

$(u/\bar{C}) = 1$ という条件から、砕波時の (h/L) と (H/L) の関係を、3. で求めたが、実験値より (H/L) の値は大であった。そこで、Bretschneider が与えた、 (h/L) と (H/L) の実験曲線から、各 (h/L) に対する (H/L) を求めて、式 (14) より砕波時の λ を計算した。その (h/L) と λ を (19) 式に代入して、 $(u/\bar{C})$ を計算し、Fig. 2 の結果を得た。Fig. 2 からわか

るように、 $(h/L) > 0.15$ の範囲では $(u/\bar{C}) \div 0.75$ であるが、 $(h/L) < 0.15$ の範囲では、急激に減少する。

また、砕波時の、 (h/L) と λ の関係を求めたものが Fig. 3 である。実線が $(u/\bar{C}) = 1$ の条件の時、破線が Bretschneider の実験曲線から求めたものである。3. の $u = \bar{C}$ の条件のところでも述べたが、 $(h/L) < 0.114$ では λ の値が -11.20 と $+1.645$ の間を振動して、適切な値とみなされなかったので、図には記してない。

この砕波時の λ の値も、砕波時の $(u/\bar{C})$ の値と同じく、 $(h/L) < 0.15$ から急に減少している。

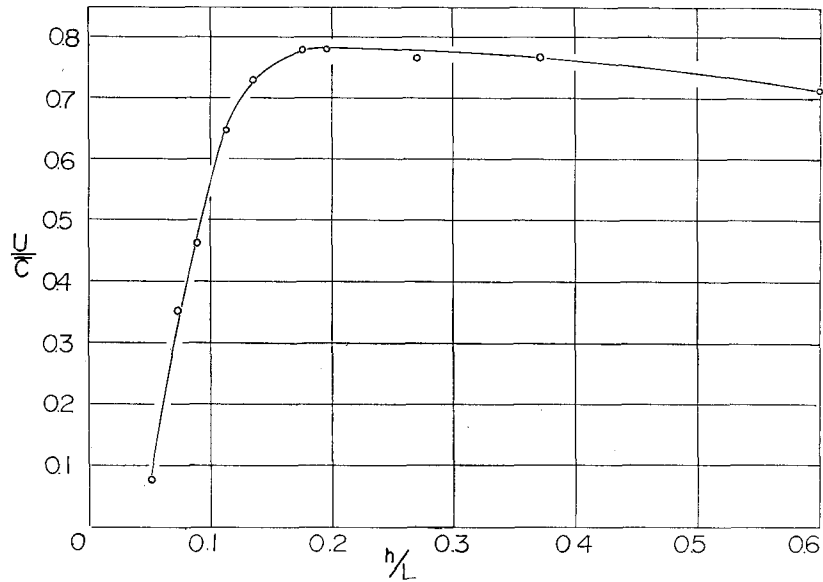


Fig. 2.

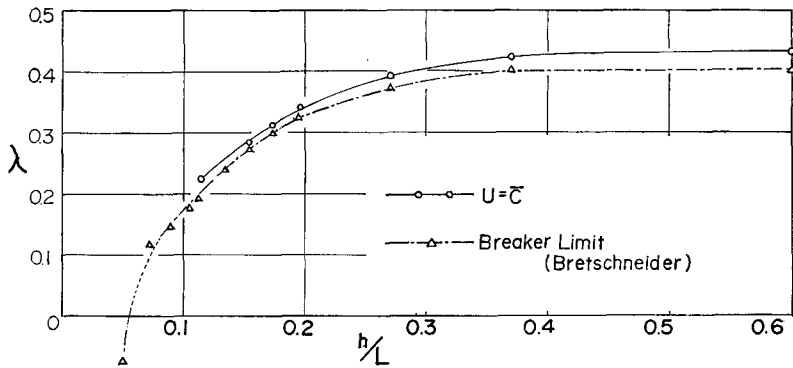


Fig. 3.

5. 波 形

第5近似の Stokes 波の波形は、(10) 式より (21) 式の如く表わされる。

$$\frac{2\eta}{H} = \frac{1}{(H/L) \cdot \pi} \cdot \left\{ \lambda \cos \theta + (\lambda^2 B_{22} + B_{24} \lambda^4) \cos^2 \theta + (B_{33} \lambda^3 + B_{35} \lambda^5) \cos 3\theta + B_{44} \lambda^4 \cos 4\theta + B_{55} \lambda^5 \cos 5\theta \right\} \quad (21)$$

$$\text{ここで } \theta = \frac{2\pi}{L} (x - \bar{C}t)$$

$(h/L)=0.125$, $(H/L)=0.0667$ の時に, 第5近似の波形と, 佐藤の求めた, 第3近似の波形と, Laplace 波とを比較した図が, Fig. 4 であり, $(h/L)=0.05$, $(H/L)=0.01$ の時は, Skjelbreia の第3近似式により, 岩垣が計算したものと比較したものが Fig. 5 である。

Fig. 4, Fig. 5 を見ると, まず第3近似式に比べて, 波頂部が尖がり, 波谷部では扁平となっている。

Fig. 5 では, 第3近似, 第5近似の Stokes 波とも波谷に小山 (Inflection point) ができている。

Borgman および Chappellear は, Stokes-Struik 波の理

論を使って, 波形勾配がある限度以上になると, inflection point ができる事を示し, その限界の条件を与えている。Fig. 5 の場合はその限界の条件から, 明らかに inflection point ができる条件を有していた。そこで第5近似の Stokes 波の理論波形から, その inflection point のできる限界を計算してみると, Borgman および Chappellear によって得られた限界とほとんど一致することがわかった。これは Stokes 波の理論を, ある水深より浅いとこまで拡張できない事を示し, Stokes 波の適用限界を決める手がかりとなるものである。この inflection point の限界は, Fig. 7 の中に破線で示されている。

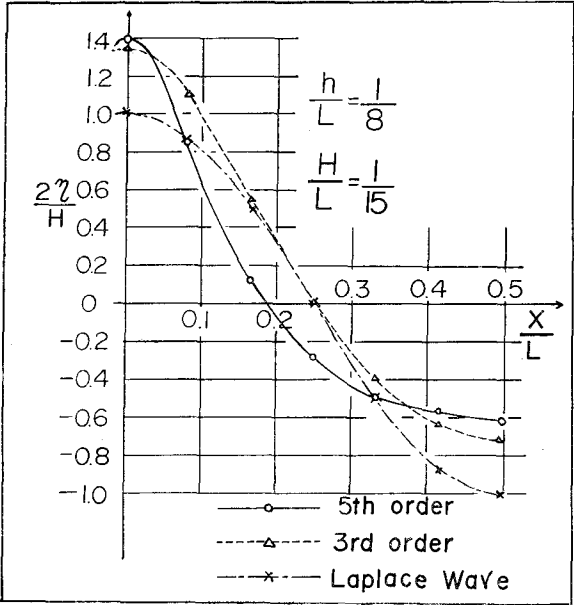


Fig. 4. Wave profile

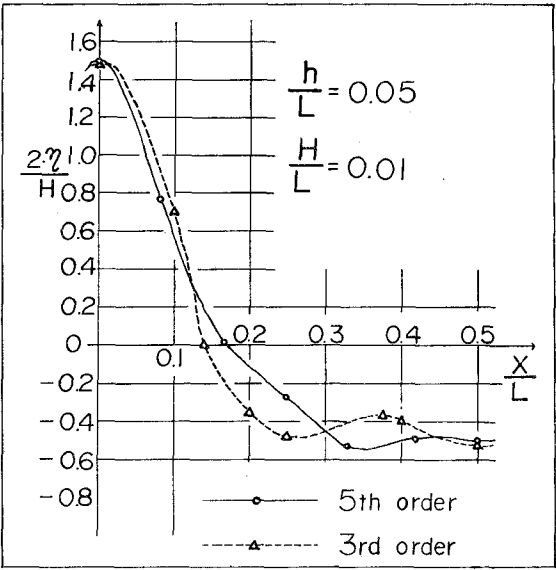


Fig. 5. Wave profile

6. 第5近似 Stokes 波の波頂高

ここでは, 第5近似の Stokes 波の波頂高の計算を行ない, $(h/L_0) \cdot (\eta_0/H) \cdot (H/L_0)$ の関係を図示した。このような関係は, Bretschneider も, $(h/T^2) \cdot (\eta_0/H) \cdot (H/T^2)$ の関係で図示している。Bretshneider は, その中で, 砕波限界を実験曲線 (Fig. 1 に示されている) を用いている。なお, $(h/T^2) \cdot (\eta_0/H) \cdot (H/T^2)$ の関係は, B.E.B. での実験値と, Florida の Lake Okechobee での実測から求められているので, 資料の範囲は, ほぼ $0.02 < h/L_0 < 0.2$ であり, それ以外の範囲の部分は, 外挿的に推定したものである。

計算方法は, ある (h/L) の値に対する砕波時の λ (最大値) は, 3, 4 で求められているので, その λ より以下の任意の λ を与えて, (14), (15), (10) の3式より, $(H/h) \cdot (h/L_0) \cdot \beta \eta_0$ を計算して, 次の (22), (23) の関係より, $(h/L_0) \cdot (H/L_0) \cdot (\eta_0/H)$ が求まり, その点を対数グラフにプロットして, (H/L_0) の等値を結んで作ったものである。

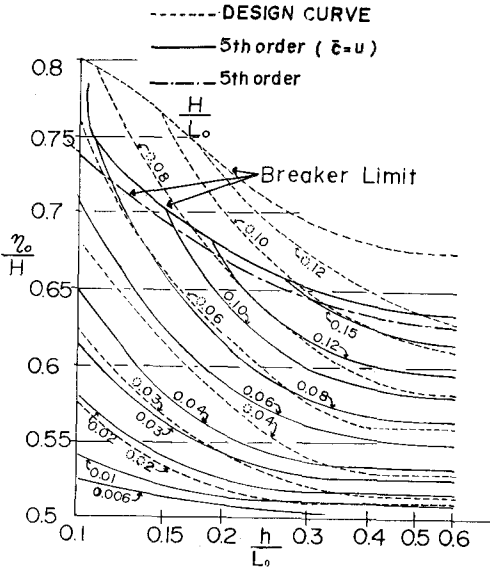


Fig. 6.

$$\left(\frac{H}{h}\right) \times \left(\frac{h}{L_0}\right) = \frac{H}{L_0} \quad (22)$$

$$\frac{\beta \eta_0}{2\pi \cdot (h/L) \cdot (H/h)} = \frac{\eta_0}{H} \quad (23)$$

Fig. 6 は、砕波限界を Bretschneider の実験曲線から求めたものである。破線は inflection point の limit を示しこれより上では、小山が波谷にできることを示している。

Fig. 7 は、実線が $u=\bar{C}$ から求めた砕波限界を示し、一点鎖線が Bretschneider の実験曲線より求めたものである。

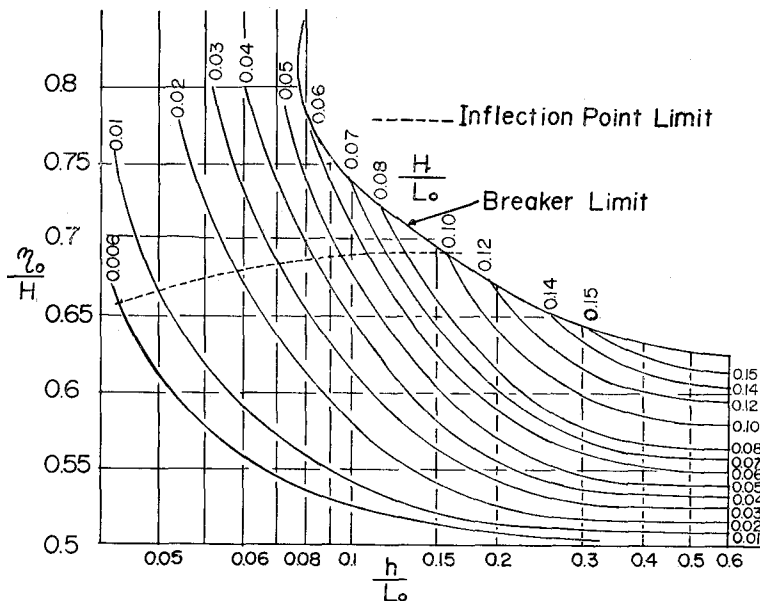


Fig. 7.

7. 第5近似 Stokes 波の適用限界

Stokes 波の適用限界としては、Keulegan によれば $(h/L) \geq \frac{1}{10}$, Laitone によれば $h/L > \frac{1}{8}$, Wilson-Webb-Hendrickson によれば $(h/L) > (\eta_0/L)^{\frac{1}{3}}$ である。

Fig. 8 は Wilson-Webb-Hendrickson によって作られた波形分類図である。これは $(\eta_0 L^2/h^3)$ によって分類している。 $(\eta_0 L^2/h^3) < 1$ つまり $(h/L) > (\eta_0/L)^{\frac{1}{3}}$ が第3近似 Stokes 波の適用限界となっている。第5近似 Stokes 波では Fig. 6 に示した、inflection point limit 以下が、適用限界となるので、これを $(\eta_0 L^2/h^3)$ で表わすと

$$(\eta_0 L^2/h^3) \leq 10 \quad (24)$$

のようになる。

これは inflection point limit 上の点を Fig. 6 よりとり (25) 式により計算して求めたものである。

$$\frac{\eta_0 L^2}{h^3} = \left(\frac{\eta_0}{H}\right) \cdot \left(\frac{H}{L_0}\right) \cdot \left(\frac{L_0}{h}\right)^3 \cdot \left(\frac{L}{L_0}\right)^2 \quad (25)$$

ここで (L/L_0) の値は微小振幅波より求めた値を用いた。

る。点線で記入してあるのは、Bretschneider が示した design curve である。 $(H/L_0) \approx 0.03$ を境として、 $(H/L_0) > 0.03$ の部分では、Bretschneider による design curve の方が第5近似 Stokes 波で求めたものより大きくでているが、 $(H/L_0) < 0.03$ ではその逆となっている。しかし (η_0/H) の比で表わしてあるので差が大きいようにあるが、 (h/T^2) を一定にして、 H と η_0 の関係と B.E.B. の実測値と比較してみると、ほとんど違っていない。

(h/L) のみで、厳密に第5近似 Stokes 波の適用限界を求

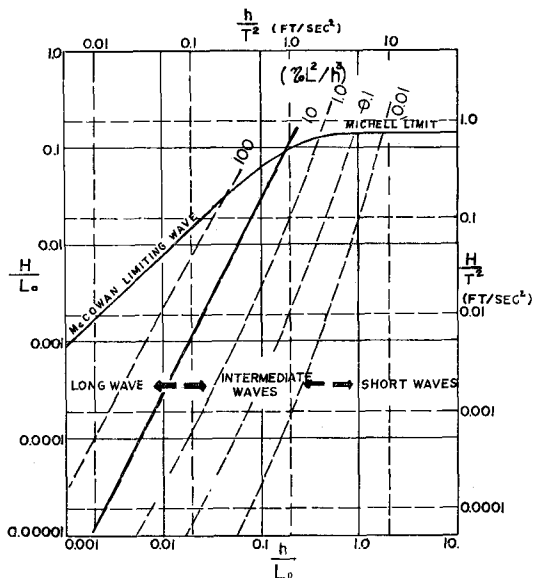


Fig. 8.

めると、(26)式のようになる。

$$\frac{h}{L} > 0.145 \quad (26)$$

8. 結 論

- 1) 第5近似 Stokes 波理論では、 $u = \bar{C}$ の条件で求められた限界の λ の値を使うと $h/L < 0.114$ までしか計算できない。
- 2) 砕波限界を与える、 (h/L) と (H/L) の実験曲線は、 $(h/L) > 0.15$ では、 $(u/\bar{C}) \doteq 0.75$ である。
- 3) 波形は第3近似 Stokes 波に較べて、波頂部で尖がり、波谷部では扁平である。
- 4) inflection point の限界は、Borgman および Chappelear が求めたものとほぼ同じであった。
- 5) 適用限界は $(\eta_0 L^2/h^3)$ で表わすと $(\eta_0 L^2/h^3) < 10$ となり、Wilson 等により得られたものより大きく、適用限界の範囲は広がった。

6) 適用限界を (h/L) のみで表わすと、5) の場合より適用限界が狭くなり $(h/L) > 0.145$ となる。

参 考 文 献

- Bretschneider, C. L.: Selection of Design Wave for Offshore Structures, A.S.C.E. WW 2 (1958).
- Skjelbreia, L. and Hendrickson, J. A.: Fifth order gravity wave theory, Proc. 7 th Conf. on Coastal Eng. (1960).
- 岩垣雄一: 京都大学防災研年報, No. 7 (1964).
- Borgman, L. E. and Chapelear, J. E.: The use of the Stokes-Struik approximation for wave of finite height, Proc. 6 th Conf. on Coastal Eng.
- Wilson, B. W., Webb, L. M. and Hendrickson, J. A.: The nature of Tsunami, their generation and dispersion in Water of Finite Height depth, NESCO Tech Rept. No. SN 57-2 (1962).
- 岸 力: 波動論, 土木学会水工学シリーズ, 64-5 (1964).
- 岸 力・佐伯 浩: 海岸工学講演集 (1964).