土木学会北海道支部　技術資料　第 21 号

杭の縦方向衝撃について

正員　能町純雄*

1. 緒　　言

杭の動力学の問題は衝撃弾性学の立場から論ぜられる性質のものであるが，これが注目されたのはかなり古く文献によれば1843年 Moseley[1] が杭の打ち込みを衝撃と反撥理論の応用として取り扱うことができると主張している。しかし本格的にこの問題に取り組んだのは Isaacs[2] であろう。 1931年のことである。電子計算機の出現と共にこの分野も大きく前進し1950年以降，E. A. L. Smith[3] を中心として多くの論文が提出されている。その方法は弾性波動方程式を骨組としたもので，所謂一次元弾性波の方程式に杭表面と土の接触面との剪断抵抗と杭先端の抵抗を一種のバネ常数として盛り込んだものである。この外内部粘性と外部粘性とを考慮しているが，これらの常数殊にバネ常数を仮定するのが問題で，これは全くの暗中模索である。適宜深さの関数として選んで現象に会うように工夫しているが，これについては“将来の研究が光を与えることを切望する”とテキサス大学の研究グループ[4] が言っている現状である。この方法によればクッションの影響なども考慮でき，とにもかくにも数値解は求まる。しかし理論的に全体を見る訳にいかない欠点がある。本論文では杭の中を伝わる衝撃波を解析的に見るため杭表面と土との剪断抵抗はその変位に比例することとし，その比例常数は土の深さに無関係であると仮定する。また杭は先端において土盤反力を受けるのであるが，これを表現するため次の仮定を設ける。即ち実杭に連続した土盤の部分を地盤中にある杭と見做し，土盤の中に土盤と同じ弾性諸元を有する等価な杭がありそれによって先端反力が生ずると考える。

2. 基礎方程式

杭部分の微小部分をとって力の釣合をみると

$$A\frac{\partial\sigma}{\partial x}-F\tau-\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2}\rho A=0,$$

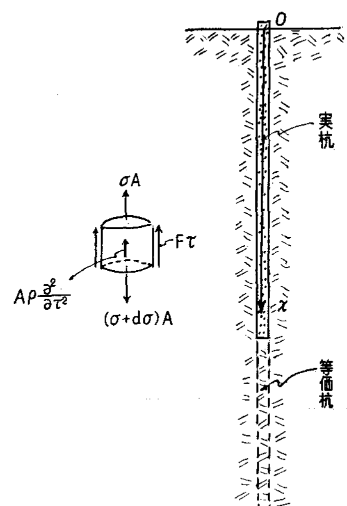
フックの法則から

$$E\frac{\partial w}{\partial x}=\sigma,$$

仮定により　$\tau=kw$　　($k=$ 杭表面バネ常数)

従って

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-c^2\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2}-k^2 w=0, \tag{1}$$



図—1

上式中

$$c^2=\frac{\rho}{E},\qquad k^2=\frac{FK}{AE},$$

ρ: 杭の質量，A: 断面積，F: 杭の外周，E: 弾性常数

同じ様にして等価土杭についても

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2}-c_1^2\frac{\partial^2 w_1}{\partial\tau^2}-k_1^2 w_1=0, \tag{2}$$

ただし

$$c_1^2=\frac{\rho_1}{E_1},\qquad k^2=\frac{F_1K_1}{A_1E_1}$$

添字1は凡て等価土杭についての定数を示す。勿論上式は杭先端の反力を記述するための便宜的仮定である。

3. 基本方程式の一般解

方程式(1)を x で一度微分すれば　$\sigma=E\partial w/\partial x$ であるから

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}-c^2\frac{\partial^2\sigma}{\partial\tau^2}-k^2\sigma=0, \tag{3}$$

---

* 室蘭工業大学教授　工博

σ のラプラス変換を $L[\sigma]$ とすれば

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{L[\sigma]\right\}-(c^2s^2+k^2)\left\{L[\sigma]\right\}=0,$$

この式から

$$L[\sigma]=q(s)\times\exp\left(-cx\sqrt{s^2+a^2}\right) \tag{4}$$

ただし

$$a^2=\frac{k^2}{c^2},\qquad q(s)=\int_0^\infty p(\tau)e^{-st}dt$$

$$L[\sigma]=\int_0^\infty \sigma e^{-st}dt$$

$p(t)$ は杭頭に作用する衝撃関数である。解式 (4) の逆変換[5] は

$$\left.\begin{array}{ll}\sigma=0, & t<xc\\ \sigma=p(t-cx)-\displaystyle\int_{cx}^{t}\frac{acx}{\sqrt{t'^2-c^2}}J_1\left(a\sqrt{t'^2-c^2x^2}\right) & \\ \qquad\times p(t-t')\,dt', & t>xc\end{array}\right\} \tag{5}$$

この式は杭頭 $x=0$ で $\sigma=p(t)$ となり境界条件を満足する。また

$$\sigma=E\frac{\partial w}{\partial x}\qquad \text{から}$$

$$L[w]=q(s)\frac{1}{Ec}\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}\exp\left(-cx\sqrt{s^2+a^2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\therefore\ w=\dfrac{1}{Ec}\displaystyle\int_{cx}^{t}J_0\left(a\sqrt{t'^2-c^2x^2}\right) & \\ \qquad\times p(t-t')\,dt', & t>cx\\ w=0, & t<cx\end{array}\right\} \tag{6}$$

杭頭の変位は

$$w)_{x=0}=\frac{1}{Ec}\int_0^t J_0(at')\,p(t-t')\,dt' \tag{7}$$

上式中 $t\to\infty$, $p(t)=p$, とすれば無限長摩擦杭に静荷重が作用した場合となり

$$w)_{x=0}=p/Eca \tag{8}$$

単位衝撃が作用するとき杭頭の運動は

$$w)_{x=0}=\frac{P}{Ec}J_0(at) \tag{9}$$

これは衝撃が杭底に到着し杭頭にその反射が達する迄成立する。

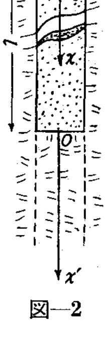
3. 杭先端における反力

等価土杭の深さの方向の座標を先端から計って x_1, 杭中を伝波して来た衝撃 w が反射て杭底から新らしく出発する反射波を w_2, 等価土杭に侵入する衝撃を w_1 とすれば

反射波は

$$\sigma_2=p_2(t-c(l-x))$$
$$-\int_{c(l-x)}^{t}\frac{ac(l-x)}{\sqrt{t'^2-c^2(l-x)^2}}J_1\left(a\sqrt{t'^2-c^2(l-x)^2}\right)$$
$$\times p_2(t-t')\,dt' \tag{10}$$

$$w_2=-\frac{1}{Ec}\int_{c(l-x)}^{t}J_0\left(a\sqrt{t'^2-c^2(l-x)^2}\right)$$
$$\times p_2(t-t')\,dt' \tag{11}$$



図—2

侵入波は

$$\sigma_1=p_1(t-c_1x_1)$$
$$-\int_{c_1x_1}^{t}\frac{a_1c_1x_1}{\sqrt{t'^2-c_1^2x_1^2}}J_1\left(a_1\sqrt{t'^2-c_1^2x_1^2}\right)$$
$$\times p_3(t-t')\,dt' \tag{12}$$

$$w_1=\frac{1}{E_1c_1}\int_{c_1x_1}^{t}J_0\left(a_1\sqrt{t'^2-c_1^2x_1^2}\right)$$
$$\times p_1(t-t')\,dt' \tag{13}$$

杭底において杭と等価土杭とは応力が等しく変位も等しいから,

$$\left.\begin{array}{l}\sigma)_{x=l}+\sigma_2)_{x=l}=\sigma_1)_{x'=0}\\ w)_{x=l}+w_2)_{x=l}=w_1)_{x'=0}\end{array}\right\} \tag{14}$$

即ち

$$p(t-cl)-\int_{cl}^{t}\frac{acl}{\sqrt{t'^2-c^2}}J_1\left(a\sqrt{t'^2-c^2l^2}\right)$$
$$\times p(t-t')\,dt'+p_2(t)=p_1(t), \tag{15}$$

$$\frac{1}{Ec}\int_{cl}^{t}J_0\left(a\sqrt{t'^2-c^2l^2}\right)\times p(t-t')\,dt'$$
$$-\frac{1}{Ec}\int_0^t J_0(at')\,p_2(t-t')\,dt'$$
$$=\frac{1}{E_1c_1}\int_0^t J_0(a_1t')\,p_1(t-t')\,dt', \tag{16}$$

上式の Laplace の変換をとれば

$$\frac{q(s)\times\exp\left(-cl\sqrt{s^2+a^2}\right)}{Ec\sqrt{s^2+a^2}}-\frac{q_2(s)}{Ec\sqrt{s^2+a^2}}$$
$$=\frac{q_1(s)}{E_1c_1\sqrt{s^2+a_1^2}}, \tag{17}$$

従って，更に $a_1=a$ を仮定すれば，(17) 式は

$$p(t-cl)-\int_{cl}^{t}\frac{acl}{\sqrt{t'^2-c^2l^2}}J_1\left(a\sqrt{t'^2-c^2l^2}\right)$$
$$\times p(t-t')\,dt'-p_2(t)=\frac{Ec}{E_1c_1}p_1(t), \tag{18}$$

式 (15), (18) の第1，2項は $\sigma)_{x=l}$ であるからこの両式を解いて，反射波の成分 $p_2(t)$ と土へ杭底から侵入する成分 $p_1(t)$ は

$$\left.\begin{array}{l}p_1(t)=\dfrac{2E_1c_1}{Ec+E_1c_1}\left[(\sigma)_{x=l}\right],\\[2ex] p_2(t)=\dfrac{E_1c_1-Ec}{E_1c_1+Ec}\left[(\sigma)_{x=l}\right],\end{array}\right. \tag{19}$$

ただし

$$\sigma_{x=l}=p(t-cl)-\int_{cl}^{t}\frac{acl}{\sqrt{t'^2-c^2}}J_1(a\sqrt{t'^2-c^2l^2})$$
$$\times p(t-t')\,dt'$$

式 (19) を (10), (11) に代入すれば反射波が記述される。次の現象は，杭頭でこの反射波が更に反射して，杭頭に衝撃があれば，これと合成され杭底に出発し，同じ操作を繰返すのであるが，ステップ・バイ・ステップに各伝播区間の波動を与えられた杭頭衝撃関数が表わすことができる。(19) 式，第2式からわかるように $E_1c_1<Ec$ ならば反射波は引張衝撃となって杭頭へ向う。 E_1c_1 が無限大，即ち杭が先端で変位がないときは，ここの圧力は2倍となる。反射波は同じ圧縮波となって杭頭に戻っていく。

4. 土の粘性を考慮した場合

この場合基本方程式は

$$EA\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-A\gamma\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}-KFw-HF\frac{\partial w}{\partial \tau}=0, \tag{20}$$

上式中，F は杭の単位長あたりの周面積，H は杭と土の間の動粘性抵抗 (kg-sec/cm^2),

前と同様に x で微分して w を σ であらわし Laplace 変換をとれば

$$L[\sigma]=q(s)\cdot\exp\left\{-cx\sqrt{s^2+2bs+a^2}\right\}, \tag{21}$$

上式中

$$2b=\frac{HF}{EA},\qquad a^2=\frac{KF}{EA}\qquad c^2=\frac{\gamma}{E}$$

(21) 式の逆変換は

$$\sigma=p(t-cx)\,e^{-cxb}-\int_{cx}^{t}e^{-btc}\frac{a'cx}{\sqrt{t'^2-c^2x^2}}$$
$$J_1(a'\sqrt{t'^2-c^2x^2})\,p(t-t')\,e^{-bt'}dt', \tag{22}$$

ただし

$$a'^2=a^2-b^2=\frac{KF}{EA}-\frac{H^2F^2}{4E^2A^2},$$
$$w=\frac{1}{Ec}\int_{cx}^{t}$$
$$J_0(a'\sqrt{t'^2-c^2x^2})\,p(t-t')\,e^{-bt'}dt' \tag{23}$$

杭頭における変位は

$$w)_{x=0}=\frac{1}{Ec}\int_0^t J_0(a't')\,p(t-t')\,e^{-bt'}dt',$$

若し $t\to\infty$, $p(t)=p$ とおけば無限長杭の静定の問題となり

$$w)_{x=0}=\frac{1}{Ec}\frac{p\Gamma(\frac{1}{2})}{(a'^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}=\frac{p}{Eca}, \tag{24}$$

(8) 式と同じ結果になる。

$a'^2=0$ の特別の場合

$$\left.\begin{aligned}\sigma&=p(t-cx)\,e^{-bxc}\\ w&=\frac{1}{Ec}\int_{cx}^{t}p(t-t')\,e^{-bt'}dt'\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

杭頭の変位は

$$w)_{x=0}=\frac{1}{Ec}\int_0^t p(t-t')\,e^{-bt'}dt'$$

$t\to\infty$, $p(t)=p$ なる定常的な場合

$$w)_{x=0}=\frac{p}{Ec}\int_0^\infty e^{-bt'}dt'=\frac{p}{Ecb}$$

$b^2>a'^2$ 或は $a'^2<0$ の場合

$$\sigma=p(t-cx)\,e^{-cxb}-\int_{cx}^{t}e^{-bt'}\frac{a'cx}{\sqrt{t'^2-c^2x^2}}$$
$$I_1(a'\sqrt{t'^2-c^2x^2})\cdot p(t-t')\,dt', \tag{26}$$
$$w=\frac{1}{Ec}\int_{cx}^{t}$$
$$I_0(a'\sqrt{t'^2-c^2x^2})\,p(t-t')\,e^{-bt'}dt', \tag{27}$$

杭頭の変位は

$$w)_{x=0}=\frac{1}{Ec}\int_0^t I_0(a't')\,e^{-bt'}dt',$$

$t\to\infty$, $p(t)=p$ のとき

$$w)_{x=0}=\frac{1}{Eca},$$

となる。この場合にも先端における杭への反力を等価土杭でおき代えることが出来ると仮定しその等価土杭中の a, b を杭に等しい特殊な場合をとれば杭頭への反射波と土への侵入波との割合は (19) 式と全く同じになる。

参 考 文 献

1) Isaac Todhunter and Karl Pearson: "A History of the theory of Elasticity" N. Y., Vol. 1, 1960, p. 669.
2) D' V. Isaacs: "Reinforced Concrete Pile Formulae" Transactions Inst. of Eng. Australia Vol. 12. 1931, p. 312.
3) E. A. L. Smith: "Pile Driving Impact", Industrial Computation Seminar, Sep. 1950, International Business Machines Corp., N. Y., 1951, p. 44. "Impact and Longitudinal Wave Transmission" Transactions, A.S.M.E, Aug. 1955, p. 963, "Pile-driving Analysis by the Wave Equation" Transactions, A. S.C.E, Vol. 127, 1962, Part I, p. 1145.
4) C. H. Samson, T. J. Hirsch, and L. L. Lowery: "Computer Study of Dynamic Behavior of Piling" Report of Special Project, Aug. 1963, p. 6.
5) A. Erdelyi and others "Tables of Integral Transforms" Vol. 1, 1954, p. 248.