

格子ゲタの一解法

正員 北海道開発コンサルタント株式会社 青 木 弘

1. 要 旨

最近の道路橋では、上路型式の採用が多く、荷重分配を考慮することがかなり一般化されてきた。

荷重分配は、床板、対傾構、横げたと主げたとを連結することにより生ずるが、このような格子構造はすでに多くの解法が発表され、Guyon-Massonnet⁽¹⁾、Leonhardt⁽²⁾、Homberg⁽³⁾、Hendry-Jaeger⁽⁴⁾、Utesher⁽⁵⁾氏などの方法がある。ここでは、斜格子げたに適用する目的で、一本横げた、任意数主げたよりなる骨組格子構造の一解法を計算例を附記して説明する。この解法は、斜橋は勿論、各主げたの曲げ剛性、方向性を考慮することができ、なおこの理論をおしすすめ連続格子げた、ゲルバー格子げたなどに適用できる。

2. 理論の考察

この解法は、曲げ剛性のみを考えており、格子げたの根本的理念である下記の三条件より出発している。即ち、格子点における主げたと横げたの撓みが相等である、合計格子点力は零である、任意点における格子点力によるモーメ

ントは零である。この三条件より任意荷重による格子点力を求めることが最終の目的である。

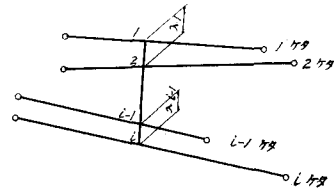


図-1

図-1において、1けたの x 点に W_1 なる荷重が作用した場合、各格子点に、 $q_1, q_2, \dots, q_{i-1}, q_i$ の格子点力が伝くものとして、各主げたの格子点における撓みは、

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= -q_1 \delta_{11} + W_1 \delta_{1x} \\ \delta_2 &= -q_2 \delta_{22} \\ &\vdots \\ \delta_{i-1} &= -q_{i-1} \delta_{i-1, i-1} \\ \delta_i &= -q_i \delta_{ii} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

となる。次に横げた 2, 3, ..., $i-2, i-1$ 点における撓みは、

$$\left. \begin{aligned} \delta_2 &= \frac{\sum_{k=2}^{i-1} \lambda_k}{\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k} \delta_1 + \frac{\lambda_1}{\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k} \delta_i + q_2 \alpha_{22} + q_3 \alpha_{23} + \dots + q_{i-1} \alpha_{2, i-1} \\ \delta_3 &= \frac{\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k}{\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k} \delta_1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k} \delta_i + q_2 \alpha_{32} + q_3 \alpha_{33} + \dots + q_{i-1} \alpha_{3, i-1} \\ &\vdots \\ \delta_{i-2} &= \frac{\lambda_{i-2} + \lambda_{i-1}}{\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k} \delta_1 + \frac{\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k}{\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k} \delta_i + q_2 \alpha_{i-2, 2} + q_3 \alpha_{i-2, 3} + \dots + q_{i-1} \alpha_{i-2, i-1} \\ \delta_{i-1} &= \frac{\lambda_{i-1}}{\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k} \delta_1 + \frac{\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k}{\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k} \delta_i + q_2 \alpha_{i-1, 2} + q_3 \alpha_{i-1, 3} + \dots + q_{i-1} \alpha_{i-1, i-1} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

となる。但し、

次に、格子点力の平衡条件より

δ_{kj} ; j 点に単位荷重が作用した時の主げた k 点の撓み。
 α_{kj} ; 1 及び i げたで単純支持された横げた j の点に単位荷重が作用した時の k 点の撓み。

$$\left. \begin{aligned} q_1 + q_2 + \dots + q_{i-1} + q_i &= 0 \\ \lambda_1 q_2 + (\lambda_1 + \lambda_2) q_3 + \dots + \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k q_{i-1} + \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k \cdot q_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

がなりたつ。(1), (2), (3)より

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{i-2} \\ q_{i-1} \\ q_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 \delta_{1x} \\ W_1 \delta_{1x} \\ \vdots \\ W_1 \delta_{1x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

但し

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \delta_{11} - \frac{\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k}{\sum_{k=2}^{i-1} \lambda_k} \beta_{22} & -\frac{\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k}{\sum_{k=2}^{i-1} \lambda_k} \alpha_{23} & \cdots & -\frac{\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k}{\sum_{k=2}^{i-1} \lambda_k} \alpha_{2, i-1} & \frac{\lambda_1}{\sum_{k=2}^{i-1} \lambda_k} \delta_{ii} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{11} - \frac{\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k}{\lambda_{i-1}} \alpha_{i-1, 2} & -\frac{\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k}{\lambda_{i-1}} \alpha_{i-1, 3} & \cdots & -\frac{\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k}{\lambda_{i-1}} \beta_{i-1, i-1} & \frac{\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k}{\lambda_{i-1}} \delta_{ii} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & \sum_{k=1}^{i-2} \lambda_k & \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k \end{pmatrix}$$

ここで, $\beta_{kk} = \delta_{kk} + \alpha_{kk}$

Matrix $\mathbf{A}$ の Inverse matrix を $\mathbf{A}^{-1}$ とし, 次のようにおくと,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1, i-1} & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2, i-1} & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1, 1} & a_{i-1, 2} & \cdots & a_{i-1, i-1} & a_{i-1, i} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i, i-1} & a_{ii} \end{pmatrix}$$

1 けた上の任意荷重による任意格子点力は (5) となる。

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{i-1} \\ q_i \end{pmatrix} = W_1 \delta_{1x} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{i-2} a_{1k} \\ \sum_{k=1}^{i-2} a_{2k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{i-2} a_{i-1, k} \\ \sum_{k=1}^{i-2} a_{i, k} \end{pmatrix} \quad (5)$$

次に, 2, 3, ..., $i-2, i-1$ けたの各 x 点に, $W_2, W_3, \dots, W_{i-2}, W_{i-1}$ なる荷重が作用した場合, 同様にして各主げ

たの格子点における撓みは,

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= -q_1 \delta_{11} \\ \delta_2 &= -q_2 \delta_{22} + W_2 \delta_{2x} \\ \delta_3 &= -q_3 \delta_{33} + W_3 \delta_{3x} \\ &\vdots \\ \delta_{i-2} &= -q_{i-2} \delta_{i-2, i-2} + W_{i-2} \delta_{i-2, x} \\ \delta_{i-1} &= -q_{i-1} \delta_{i-1, i-1} + W_{i-1} \delta_{i-1, x} \\ \delta_i &= -q_i \delta_{ii} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

となる。横げたの各点における撓み, 及び格子点の平衡は 1 けたに荷重のある場合と同様である。従って, (6), (2), (3)より

$$\mathbf{B} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_{i-2} \\ q_{i-1} \\ q_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_2 \delta_{2x} \\ W_3 \delta_{3x} \\ W_4 \delta_{4x} \\ \vdots \\ W_{i-1} \delta_{i-1, x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

但し

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{\sum_{k=2}^{i-1} \lambda_k}{\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k} \delta_{11} & \beta_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2, i-1} & -\frac{\lambda_1}{\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k} \delta_{ii} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\sum_{k=1}^{i-2} \lambda_k}{\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k} \delta_{11} & \alpha_{i-1, 2} & \alpha_{i-1, 3} & \cdots & \beta_{i-1, i-1} & -\frac{\sum_{k=1}^{i-2} \lambda_k}{\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k} \delta_{ii} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_1 + \lambda_2 & \cdots & \sum_{k=1}^{i-2} \lambda_k & \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1, i-1} & b_{1i} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2, i-1} & b_{2i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i-1, 1} & b_{i-1, 2} & \cdots & b_{i-1, i-1} & b_{i-1, i} \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{i, i-1} & b_{ii} \end{pmatrix}$$

Matrix $\mathbf{B}$ の Inverse matrix を $\mathbf{B}^{-1}$ とし, 次のようにおくと, 格子点力と荷重の関係は (8) となる。

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{i-1} \\ q_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,i-3} & b_{1,i-2} \\ b_{22} & b_{22} & \cdots & b_{2,i-3} & b_{2,i-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{i-1,1} & b_{i-1,2} & \cdots & b_{i-1,i-3} & b_{i-1,i-2} \\ b_{i,1} & b_{i,2} & \cdots & b_{i,i-3} & b_{i,i-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_2 \delta_{2x} \\ W_3 \delta_{3x} \\ \vdots \\ W_{i-2} \delta_{i-2,x} \\ W_{i-1} \delta_{i-1,x} \end{pmatrix} \quad \dots (8)$$

又、 i けたの x 点に W_i の荷重が作用すると、1 けたの場合と同様な考え方で

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{i-1} \\ q_i \end{pmatrix} = W_i \cdot \delta_{ix} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{i-2} c_{1k} \\ \sum_{k=1}^{i-2} c_{2k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{i-2} c_{i-1,k} \\ \sum_{k=1}^{i-2} c_{ik} \end{pmatrix} \quad \dots (9)$$

となる。従って (5), (8), (9) を総合すると、(10) の任意荷重と格子点力の関係が求められる。

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{i-1} \\ q_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{i-2} a_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1,i-2} & \sum_{k=1}^{i-2} c_{1k} \\ \sum_{k=1}^{i-2} a_{2k} & b_{21} & \cdots & b_{2,i-2} & \sum_{k=1}^{i-2} c_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{i-2} a_{i-1,k} & b_{i-1,1} & \cdots & b_{i-1,i-2} & \sum_{k=1}^{i-2} c_{i-1,k} \\ \sum_{k=1}^{i-2} a_{ik} & b_{i1} & \cdots & b_{i,i-2} & \sum_{k=1}^{i-2} c_{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \delta_{1x} \\ W_2 \delta_{2x} \\ \vdots \\ W_{i-1} \delta_{i-1,x} \\ W_i \delta_{ix} \end{pmatrix} \quad \dots (10)$$

即ち、主げた数と無関係に、Matrix **A**, **B**, **C** の Inverse matrix を求めることに帰着する。

なお、結果として求められた (10) の i 位 Square matrix は格子桁の特性より夫の性質がある。

1) 各列の総和は零となる。

2) $W_k=1, \delta_{kx}=\delta_{kk}$ とした時の各行は、その行に相当する格子点の横分布係数相当値、即ち Leonhardt, Homberg 氏法の q'_{ij}, c_{ij} となる。

3) この場合、各格子点の影響値の和の総和は主げた数 i となる。

3. 計算例

一般に図-2のように点対称骨組の場合が多い。

この場合、Matrix **A**, **B**, **C** は次のように簡単になる。なお、**A**=**C** となる。

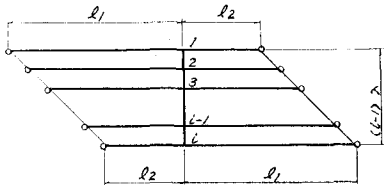


図-2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & -\frac{i-1}{i-2} \beta_{22} & -\frac{i-1}{i-2} \alpha_{23} & -\frac{i-1}{i-2} \alpha_{24} & \cdots & -\frac{i-1}{i-2} \alpha_{2,i-2} & -\frac{i-1}{i-2} \alpha_{2,i-1} & \frac{1}{i-2} \delta_{ii} \\ \delta_{11} & -\frac{i-1}{i-3} \alpha_{32} & -\frac{i-1}{i-3} \beta_{33} & -\frac{i-1}{i-3} \alpha_{34} & \cdots & -\frac{i-1}{i-3} \alpha_{3,i-2} & -\frac{i-1}{i-3} \alpha_{3,i-1} & \frac{2}{i-3} \delta_{ii} \\ \delta_{11} & -\frac{i-1}{i-4} \alpha_{42} & -\frac{i-1}{i-4} \alpha_{43} & -\frac{i-1}{i-4} \beta_{44} & \cdots & -\frac{i-1}{i-4} \alpha_{4,i-2} & -\frac{i-1}{i-4} \alpha_{4,i-1} & \frac{3}{i-4} \delta_{ii} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{11} & -\frac{i-1}{2} \alpha_{i-2,2} & -\frac{i-1}{2} \alpha_{i-2,3} & -\frac{i-1}{2} \alpha_{i-2,4} & \cdots & -\frac{i-1}{2} \beta_{i-2,i-2} & -\frac{i-1}{2} \alpha_{i-2,i-1} & \frac{i-3}{2} \delta_{ii} \\ \delta_{11} & -\frac{i-1}{1} \alpha_{i-1,2} & -\frac{i-1}{1} \alpha_{i-1,3} & -\frac{i-1}{1} \alpha_{i-1,4} & \cdots & -\frac{i-1}{1} \alpha_{i-1,i-2} & -\frac{i-1}{1} \beta_{i-1,i-1} & \frac{i-2}{1} \delta_{ii} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & i-3 & i-2 & i-1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{i-2}{i-1} \delta_{i1} & \beta_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \cdots & \alpha_{2, i-2} & \alpha_{2, i-1} & -\frac{1}{i-1} \delta_{ii} \\ -\frac{i-3}{i-1} \delta_{i1} & \alpha_{32} & \beta_{33} & \alpha_{34} & \cdots & \alpha_{3, i-2} & \alpha_{3, i-1} & -\frac{2}{i-1} \delta_{ii} \\ -\frac{i-4}{i-1} \delta_{i1} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \beta_{44} & \cdots & \alpha_{4, i-2} & \alpha_{4, i-1} & -\frac{3}{i-1} \delta_{ii} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{2}{i-1} \delta_{i1} & \alpha_{i-2, 2} & \alpha_{i-2, 3} & \alpha_{i-2, 4} & \cdots & \beta_{i-2, i-2} & \alpha_{i-2, i-1} & -\frac{i-3}{i-1} \delta_{ii} \\ -\frac{1}{i-1} \delta_{i1} & \alpha_{i-1, 2} & \alpha_{i-1, 3} & \alpha_{i-1, 4} & \cdots & \alpha_{i-1, i-2} & \beta_{i-1, i-1} & -\frac{i-2}{i-1} \delta_{ii} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & i-3 & i-2 & i-1 \end{pmatrix}$$

但し、 $\square$ 内が主げた数により増減する項で、1列、 i 列、 $i-1$ 行、及び i 行は主げた数に無関係に必要な項である。 i は主げた数となり、 A 、 B 共 i 位の Square matrix となる。なお、(11)は主げた数四本以上に適用される。三主げたの場合は、 q_i と W_i との関係が(12)となる。

$$r \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \delta_{1x} \\ W_2 \delta_{2x} \\ W_3 \delta_{3x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \cdots (12)$$

但し

$$r = \left\{ \delta_{i1} + 4\delta_{22} + \delta_{33} + \frac{2\lambda^3}{3EI_F} \right\}^{-1}$$

EI_F ; 横げたの曲げ剛性

一例として図-3について、死荷重による曲げモーメントを求めてみる。

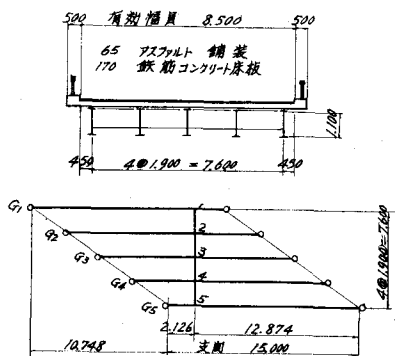


図-3

主げた、及び横げたの曲げ剛性係数を、 $I_{G1} = I_{G5} = 4.8 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ 、 $I_{G2} = I_{G4} = 4.0 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ 、 $I_{G3} = 3.4 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ 、 $I_F = 3.5 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ とする。このとき、 A 、 B は(11)より、又 A^{-1} 、 B^{-1} は電算により、次のようになる。

$$A = \begin{pmatrix} \delta_{i1} & -\frac{3}{4} \beta_{22} & -\frac{4}{3} \alpha_{23} & -\frac{4}{3} \alpha_{24} & \frac{1}{3} \delta_{55} \\ \delta_{i1} & -\frac{4}{2} \alpha_{32} & -\frac{4}{2} \beta_{33} & -\frac{4}{2} \alpha_{34} & \delta_{55} \\ \delta_{i1} & -4 \alpha_{42} & -4 \alpha_{43} & -4 \beta_{44} & 3 \delta_{55} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.000165 & -0.000940 & -0.000103 & -0.000046 & 0.000055 \\ 0.000165 & -0.000154 & -0.002216 & -0.000154 & 0.000165 \\ 0.000165 & -0.000138 & -0.000308 & -0.002821 & 0.000495 \\ 1.000000 & 1.000000 & 1.000000 & 1.000000 & 1.000000 \\ 0.000000 & 1.000000 & 2.000000 & 2.000000 & 4.000000 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \delta_{i1} & \beta_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & -\frac{1}{4} \delta_{55} \\ -\frac{2}{4} \delta_{i1} & \alpha_{32} & \beta_{33} & \alpha_{34} & -\frac{2}{4} \delta_{55} \\ -\frac{1}{4} \delta_{i1} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \beta_{44} & -\frac{3}{4} \delta_{55} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.000124 & 0.000705 & 0.000077 & 0.000035 & -0.000041 \\ -0.000083 & 0.000077 & 0.001108 & 0.000077 & -0.000083 \\ -0.000041 & 0.000035 & 0.000077 & 0.000705 & -0.000124 \\ 1.000000 & 1.000000 & 1.000000 & 1.000000 & 1.000000 \\ 0.000000 & 1.000000 & 2.000000 & 3.000000 & 4.000000 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 640.05 & 142.75 & 37.78 & 0.86 & -0.24 \\ -961.69 & 77.67 & 30.59 & 0.14 & -0.03 \\ 116.52 & -440.84 & 38.84 & 0.05 & 0.00 \\ 91.83 & 77.67 & -320.57 & 0.02 & 0.03 \\ 113.29 & 142.75 & 213.36 & -0.08 & 0.24 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -853.43 & -285.48 & -151.07 & 0.86 & -0.24 \\ 1282.32 & -155.36 & -122.46 & 0.14 & -0.03 \\ -155.36 & 881.68 & -155.36 & 0.05 & 0.00 \\ -122.46 & -155.36 & 1282.32 & 0.02 & 0.03 \\ -151.07 & -285.48 & -853.43 & -0.08 & 0.24 \end{pmatrix}$$

