

鋼索などによるプレストレス構造物の緊張端 附近の応力状態について

北海道開発局土木試験所 井 藤 昭 夫

1. 概 要

近年、連続合成ゲタ橋や斜張橋などに部分的あるいは、全体的に応力の調整をする構造物が盛んに設計施工されている。

このようないわゆるプレストレスを導入する橋梁で種々の問題点があるが、そのうち特に比較的薄い板の部分、例えば鋼ゲタの腹板やコンクリート床版部分にプレストレスを導入し、この点で緊張、定着する構造様式が多く見られる。その場合の緊張端から定着端までの応力の分布が問題となる。

特に鋼索などを用いてプレストレスを導入する場合は、特別に応力を分布させるような装置がない限り、緊張端、定着端附近に応力が集中し、過大となり危険となる。

このような現象が現場における実験で確認された例があるので、薄板の荷重に対する応力について、二・三の応力計算および室内で模型により、プレストレス導入の方法と様式は異なるが、緊張と定着によるものと同じ効果を現わすと思われる簡単な実験を行なって、模型に発生する応力の値を実測し、その分布状態について検討した。

2. 理 論 的 考 察

プレストレスによる緊張端、定着端附近における問題を薄板の厚さ方向の同一面内に集中荷重、あるいは等分布荷重が作用した場合と仮定して二、三の理論的考察を試みる。

(1) 一辺に自由端を持つ縦横とも無限に長い板に等分布荷重が作用する場合(図-1)

K. Girkmann によれば、荷重強度 $p(x)$ は次の Fourier 積分で表わされる。

$$p(x) = \frac{2p}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha c}{\alpha} \cdot \cos \alpha x d\alpha \quad (1)$$

このような荷重状態の Airy の応力関数は α をパラメーターとして次の積分で与えられる。

$$F = \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} (A + B\alpha y) e^{-\alpha y} \cdot \cos \alpha x d\alpha \quad (2)$$

ここに A, B は板の周辺条件により定まるものである。

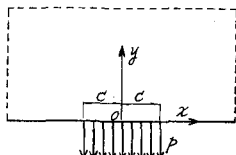


図-1

各応力成分は(2)式より

$$\sigma_x = \frac{p}{\pi h} \left[(\vartheta_2 - \vartheta_1) - \frac{1}{2} (\sin 2\vartheta_2 - \sin 2\vartheta_1) \right] \quad (3)$$

$$\sigma_y = \frac{p}{\pi h} \left[(\vartheta_2 - \vartheta_1) + \frac{1}{2} (\sin 2\vartheta_2 - \sin 2\vartheta_1) \right] \quad (4)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{p}{2\pi h} (\cos 2\vartheta_2 - \cos 2\vartheta_1) \quad (5)$$

ここに h は板厚を示し、又 $\vartheta_1 = \arctg \frac{x-c}{y}$, $\vartheta_2 = \arctg \frac{x+c}{y}$ である。

(2) 一辺に自由端を持つ縦横とも無限に長い板に集中荷重が作用する場合(図-2)

(1)において $2pc = P$ と置いて $c \rightarrow 0$ とすると、

$$\sigma_x = \frac{2P}{\pi h} \cdot \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\sigma_y = \frac{2P}{\pi h} \cdot \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{2P}{\pi h} \cdot \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

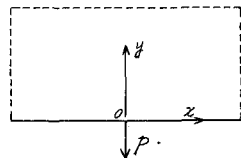


図-2

となり載荷点の $x=0, y=0$

では問題となる σ_y は無限大となる。従って、その近傍の応力の値は非常に大きくなり、このような状態の構造物は何らかの補強部材を必要とする。

(3) 相対する二辺が完全固定された無限に長い板の中央に集中荷重が作用する場合(図-3)

図-3 のような辺 a, b で固定された板に $x=0, y=0$ に集中荷重 P が作用した場合の各 x, y 軸方向の応力を求める。

まず辺 a, b が荷重か

ら、かなりはなれた状態での応力を求めなければならない。

この場合の Airy の応力関数を F_1 とすれば F_1 は次の積分で与えられる。

$$F_1 = \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} (A + B\alpha y) e^{-\alpha y} \cdot \sin \alpha x d\alpha \quad (6)$$

そこで係数 A, B を決定するため $y=0$ で y 方向の変位及び剪断力の関係から、次ぎの A, B に関する連立方程式を得る。

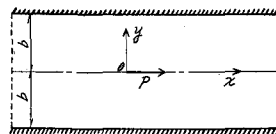


図-3

y 方向の変位を v , 板の弾性係数を E , ポアソン比を μ とすれば,

$$Ev = \int (\sigma_y - \mu \sigma_x) dy + \phi(x) \quad (7)$$

故に

$$Ev_{y=0} = \int_0^\infty \left[(1+\mu)A + (1-\mu)B \right] \cdot \frac{\sin \alpha x}{\alpha} d\alpha + \phi(x) = 0 \quad (7')$$

$\phi(x) = K_2 - K_1 x$ の形で表わされるが, $K_1 = K_2 = 0$ でなければならないので $\phi(x) = 0$ となる。

従って, (7') 式から

$$(1+\mu)A + (1-\mu)B = 0$$

又 $y = 0$ で, 剪断力式は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} (\tau_{xy})_{y=0} &= \int_0^\infty (A-B) \cos \alpha x d\alpha = \frac{P(x)}{h} \\ &= \frac{P}{2\pi h} \int_0^\infty \cos \alpha x d\alpha \end{aligned} \quad (9)$$

従って, (9) 式から

$$A - B = \frac{P}{2\pi h} \quad (10)$$

故に (8), (10) 式より A, B を求めると,

$$A = \frac{1-\mu}{4} \cdot \frac{P}{\pi h}, \quad B = -\frac{1+\mu}{4} \cdot \frac{P}{\pi h}$$

となり, これを (6) 式に代入し σ_x, σ_y を求めると,

$$\sigma_{x_1} = \frac{1+\mu}{4} \cdot \frac{P}{\pi h} \int_0^\infty \left(\frac{3+\mu}{1+\mu} - \alpha y \right) e^{-\alpha y} \cdot \sin \alpha x d\alpha \quad (11)$$

$$\sigma_{y_1} = -\frac{1+\mu}{4} \cdot \frac{P}{\pi h} \int_0^\infty \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - \alpha y \right) e^{-\alpha y} \cdot \sin \alpha x d\alpha \quad (12)$$

次に x 軸に対称な応力状態の応力関数を F_2 とすれば, F_2 は次式で表わされる。

$$F_2 = \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^2} (C \cosh \alpha y + D \alpha y \sinh \alpha y) \sin \alpha x d\alpha \quad (13)$$

この状態の各応力成分は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x_2} &= \int_0^\infty \left[(C+2D) \cosh \alpha y + D \alpha y \sinh \alpha y \right] \sin \alpha x d\alpha \\ \sigma_{y_2} &= -\int_0^\infty (C \cosh \alpha y + D \alpha y \sinh \alpha y) \sin \alpha x d\alpha \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

そこで x 方向の変位を u とすれば,

$$Eu = \int (\sigma_x - \mu \sigma_y) dx + \Phi(y) \quad \text{となる。} \quad (15)$$

結局 σ_x, σ_y は応力関数 F_1, F_2 の状態の応力の和で与えられるから, $\sigma_x = \sigma_{x_1} + \sigma_{x_2}, \sigma_y = \sigma_{y_1} + \sigma_{y_2}$ となる。故に

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \int_0^\infty \left\{ \frac{1+\mu}{4} \cdot \frac{P}{\pi h} \cdot \left(\frac{3+\mu}{1+\mu} - \alpha y \right) e^{-\alpha y} \right. \\ &\quad \left. + \left[(C+2D) \cosh \alpha y + D \alpha y \sinh \alpha y \right] \sin \alpha x d\alpha \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -\int_0^\infty \left\{ \frac{1+\mu}{4} \cdot \frac{P}{\pi h} \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - \alpha y \right) e^{-\alpha y} \right. \\ &\quad \left. + (C \cosh \alpha y + D \alpha y \sinh \alpha y) \right\} \sin \alpha x d\alpha \end{aligned} \quad (17)$$

(16), (17) 式を (15) に代入し, $Eu_{y=0} = 0$ とすれば, C, D に関する一次式が成立する。

この場合 $\Phi(y) = K_0 + K_1 y$ となるが, $Eu = 0$ なるためには $K_1 = K_2 = 0$ でなければならならず, 従って $\Phi(y) = 0$ となる。

故に

$$\begin{aligned} &\frac{1+\mu}{4} \cdot \frac{P}{\pi h} \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - \alpha b \right) e^{-\alpha b} \\ &+ \left[(C+2D) \cosh \alpha b + D \alpha b \sinh \alpha b \right] \\ &+ \mu \left\{ \left(\frac{1+\mu}{4} \cdot \frac{P}{\pi h} \right) \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - \alpha b \right) e^{-\alpha b} \right. \\ &\quad \left. + (C \cosh \alpha b + D \alpha b \sinh \alpha b) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

又, $y = 0$ で y 方向の変位が 0 であるから

$$Ev_{y=0} = \int_0^\infty (\sigma_y - \mu \sigma_x) dy + \phi(x) = 0 \quad (19)$$

(19) 式に (16), (17) 式を代入すると

$$C(1+\mu) + 2\mu D + \frac{P(1+\mu)^2}{4} \cdot \frac{e^{-\alpha b}}{\pi h} (1-\alpha b) = 0 \quad (20)$$

従って (18), (20) 式より C, D を求めると,

$$\begin{aligned} C(\alpha) &= -\frac{P(1+\mu)}{4\pi h} \left\{ \left(\frac{2\mu}{1+\mu} \right) \right. \\ &\quad \cdot \frac{[(1-\mu) - \alpha b(1+\mu) + (1+\mu)(1-\alpha b) \cosh \alpha b]}{[\alpha b(1+\mu) \sinh \alpha b - 2(1-\mu) \cosh \alpha b]} \\ &\quad \left. + (1-\alpha b) \right\} e^{-\alpha b} \\ D(\alpha) &= \frac{P(1+\mu)}{4\pi h} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{[(1-\mu) - \alpha b(1+\mu) + (1+\mu)(1-\alpha b) \cosh \alpha b]}{[\alpha b(1+\mu) \sinh \alpha b - 2(1-\mu) \cosh \alpha b]} \right\} e^{-\alpha b} \end{aligned} \quad (21)$$

そこで (21), (22) 式を (16), (19) 式に代入し, α に関して積分を行なうのであるが, 第一項は簡単に積分出来るが, 第二項の積分は非常に複雑で, 殆んど不可能と思われるので, 数値積分を行なって求めることにする。

第一項の積分の σ_x だけについて行えば

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= \int_0^\infty \frac{1+\mu}{4} \cdot \frac{P}{\pi h} \left(\frac{3+\mu}{1+\mu} - \alpha y \right) e^{-\alpha y} \cdot \sin \alpha x d\alpha \\ &= \frac{P(1+\mu)}{4\pi h} \left\{ \left(\frac{3+\mu}{1+\mu} \right) \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

そこで (23) 式は $y = 0$ で, x 軸上では $\sigma_{x_{x=0}} = \infty$ となり, 以下減少し $x = \infty$ で $x = 0$ となる。

結局, 第二項を数値積分を行い, 第一項の値との和を求めるのであるが, $C(\alpha), D(\alpha)$ は α をしだいに大きくして

いくと0に収束するのが確められるので σ_x, σ_y は有限な値をとる。応力の集中は主として σ_x によるものの影響が大きいので σ_x についてのみ計算する。

σ_x の値およびその分布は 図-4 に示す。

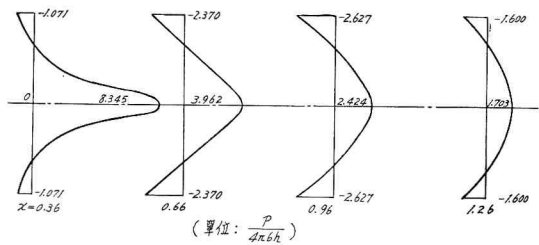


図-4

3. 模型実験

(1) 実験用板および実験方法

実験に用いた模型は 図-5 に示す I 型の鋼製で、載荷重には 500 t アムスラーを用いた。

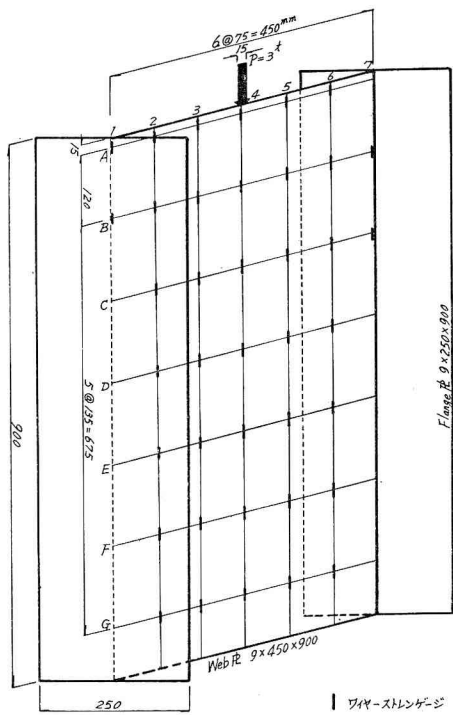


図-5

載荷の方法は図に示す板を縦にしてウェブに載荷板として 15 mm 巾の辺込みを合わせ、二枚のフランジの下に各 25 mm の鋼板を敷き、ウェブが下で支持されず持上げた状態で行った。

模型が荷重を受けたときの歪を測定するため、図-5 に示すように縦方向(載荷方向)にワイヤーストレンゲージを貼

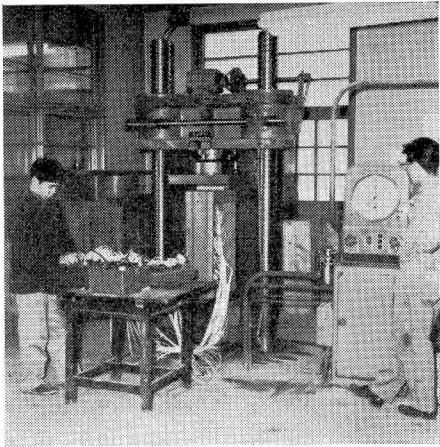


写真-1

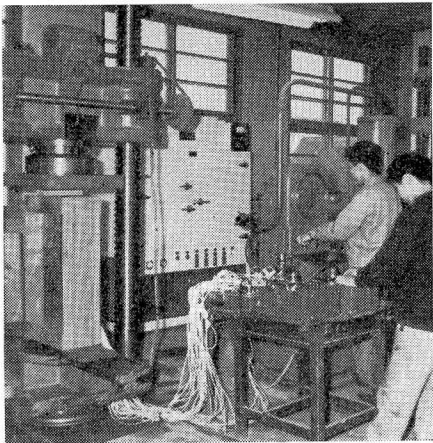


写真-2

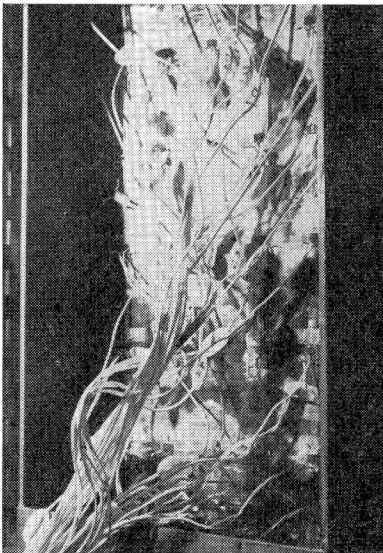


写真-3

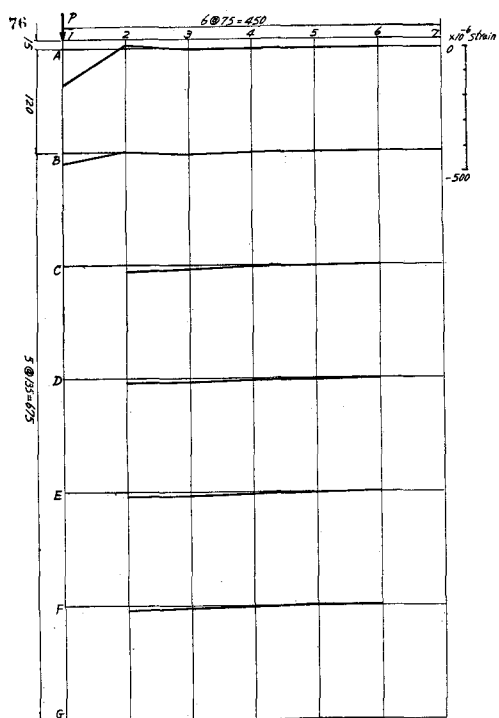


图-6

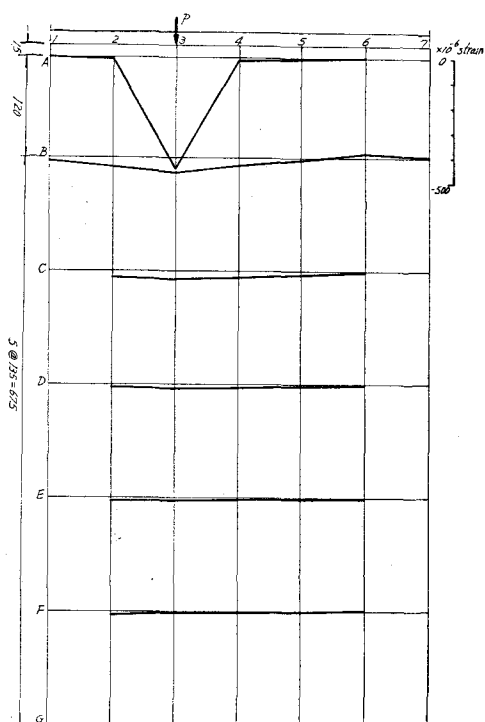


图-8

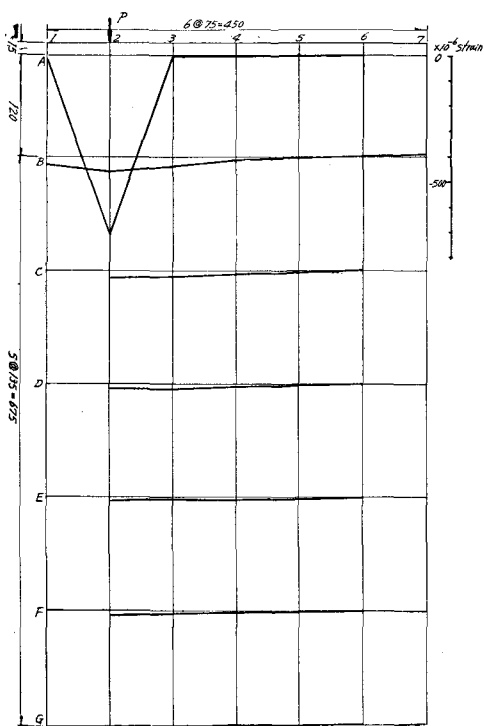


图-7

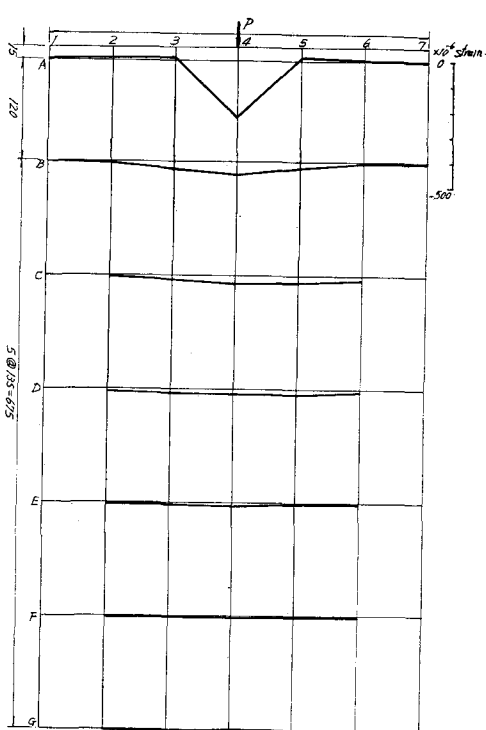
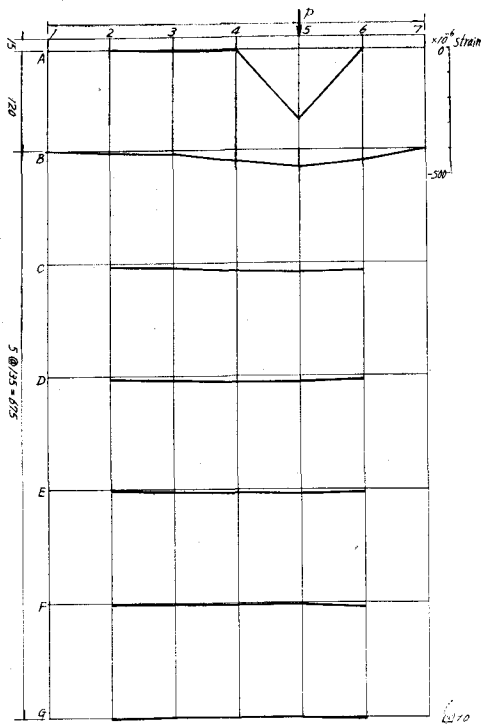
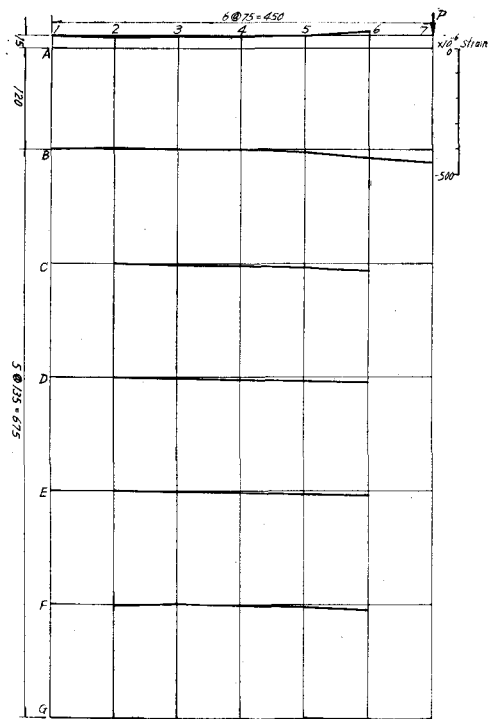


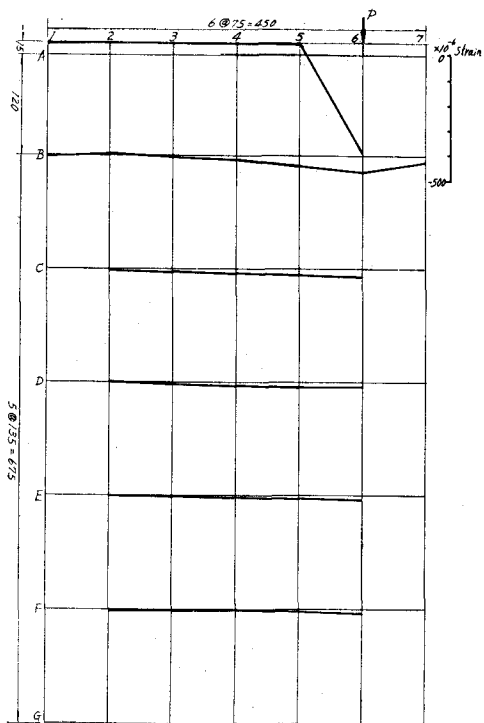
图-9



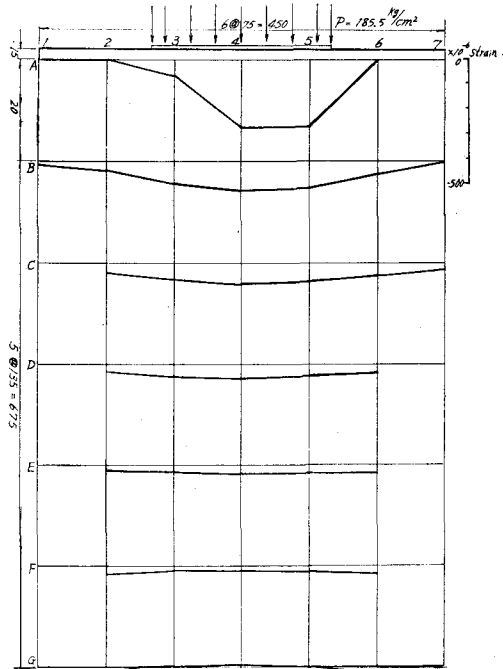
图—10



图—12



图—11



图—13

付し、(3)で述べた σ_x の値を測定すべく、 x 軸方向のストレンを実測した。

載荷重を 3t とし、載荷点(図-6 から 図-13 参照)を 1 から 7 までスライドさせ、各ター一回づつ七回測定した。

又、分布荷重としてウェブの中央に 9 mm×200 mm の鋼板を用い、荷重として 3t 加えた。

尚、載荷測定、ゲージ貼付状況は写真-1, 2 および 3 に示す。

(2) 実験結果およびその考察

集中荷重と考えた 15 mm 巾の載荷板によるストレンの測定値を 図-6 から 図-12 まで、分布荷重によるものを、図-13 に示す。

模型実験の結果として、集中、分布荷重状態とも載荷の近傍では、極端に大きい圧縮歪が生じ、載荷方向に対しウェブの巾の約 3 割に至るまでストレンは急減するのが見られ、以下ストレンの値と分布は小さくなり、ほぼ一様になり漸減する。

又、理論上板の固定端の近くでは、相当大きな引張歪が発生するはずであったが、模型の両端では完全固定の条件

を満たしていないと考えられ、縦横とも両端では圧縮力によりかなり変位しているものと思われる。

従って、今回の模型実験は 2 章で述べた理論のどれにも合致するものではないと思われるので、理論値と実測値との比較検討は行なわないことにした。

4. 現場実験の一例

現場実験を行った橋梁は、二径間連続合成ゲタ橋で、橋脚上支点に起る負の曲げモーメントを消去するために、主ゲタ側面に配置した鋼索でプレストレスを導入したものである。鋼索の緊張端、定着端をコンクリート床版に置いてあるので、コンクリート打設前に床版に埋設したカールソン型ストレンゲージで導入時のコンクリート床版に発生するストレンに特に注目し、測定を行った。

その結果は 図-14 に示すようにプレストレス導入部(プレストレスは橋端部で両引きで行なった)では、設計計算値よりはるかに大きな歪が発生し、応力が集中しているのがわかる。

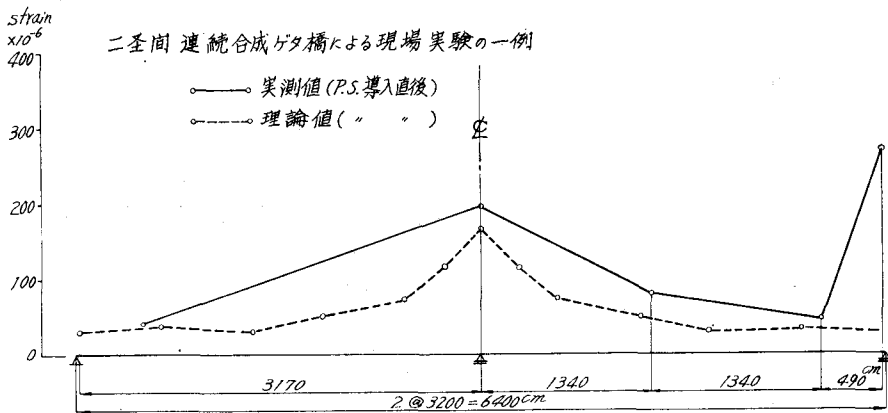


図-14

5. 結 論

今後盛んに行なわれると思われるプレストレス構造物で薄い鋼ゲタの腹板、あるいはコンクリート床版にプレストレス導入の緊張、定着端を設ける場合に懸念される局部的応力の集中の問題について考察を行ったものである。

理論的解明、模型実験および現場実験を行なった結果、薄板と考えられる部分に特に集中載荷の場合、その載荷部の近傍には非常に大きな応力が発生することがわかり、その部分の安全性が問題となり、構造物としての弱点となる。

従って、この応力の集中を起さないように荷重を分散させるか、載荷部附近の部材の断面を大きくするようにならなければならない。

参 考 文 献

- 1) Karl Girkmann: Flächenträgerwerke, 4 Auflage., S 59~S 63, S 113~S 119
- 2) K. Marguerre: Über die Beanspruchung von Plattenträgern, *Der Stahlbau*, 21-8, (1952).
- 3) Heinrich Bechert: Die voll mittragende Breite bei Plattenbalken, *Beton-und Stahlbetonbau*, 50-12, (1955).
- 4) Pericles S. Theocaris: Direct Determination of Stress in Platte Elasticity Problems Based on the Properties of Isostatics, *Journal of Applied Mechanics*, 26-2, (1959-6).