

フロック形成池内でのフロックの成長

北海道大学工学部 衛生工学科 丹 保 憲 仁

フロック形成池内のフロック粒子の成長については未だ確たる理論が無い。筆者は先にフロック形成池内のフロックの衝突合一、成長の原動力は微小水塊の乱流変動であることを明らかにしたが¹⁾、本稿においてはその基本式の誘導を説明し、従来必要に迫られながら、その機構の複雑と、理解の不充分さのために理論的に取りあげられることのなかった、過大生長粒子の破かいの問題について論じ、次いで回転攪拌型フロッキュレーターの翼配列の最も合理的な方式について論ずる。

1. 基本的理論

急速攪拌装置からフロック形成池に流入して来た微小粒子群は、フロック形成池の横断方向に一樣に分布していると考えることが出来る。これが池内の水流によって変動させられ、衝突合一して大きな沈降性の良い粒子に成長して行く。任意時間中の衝突回数は合一粒子の解体を考えなければフロック粒子の個数減少に等しい。

フロック形成池の起点断面において、 x (流下方向)、 y (幅方向)、 z (鉛直上向き)の三軸をとり、各軸に直交する平面で囲まれた微小体積要素 $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ について出入する粒子の個数 n の増減を示す基本式は次のようである。

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial n}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial n}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial n}{\partial z} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial x} (\bar{w}_0 n) - \frac{\partial}{\partial x} (un) + F(n) + G(n) \quad (1)$$

ここで

n = 単位体積中の粒子数

$D_x, D_y, D_z = x, y, z$, 方向の拡散係数

$\bar{w}_0$ = 粒子群の局所瞬間平均沈降速度

$u = x$ 方向の流速

$F(n)$ = 衝突減少を与える函数

$G(n)$ = 過大成長粒子の破かいを表わす函数

t = 混和(フロック形成)開始後の時間

式(1)中の函数 $F(n)$ は次のように考えることが出来る。

今、単位体積中の n 個の粒子間の平均距離を L とする。 m 個の粒子が半径 r の球の体積 $V = 4/3 \pi r^3$ の中に含まれる確率、 $P_m(r)$ は、微小体積 dV に二個以上の粒子が同時に含まれる確率が非常に少ないとして、ポアソン分布によって次のように表わすことが出来る。

$$P_m(r) = \frac{n}{m!} \left(\frac{4\pi r^3}{3} \right)^m \cdot \exp \left(-n \frac{4\pi r^3}{3} \right) \quad (2)$$

この関係から少なくとも一個のフロックが体積 V の中に含まれる確率 $P(r)$ は

$$P(r) = 1 - \exp \left(-n \frac{4\pi r^3}{3} \right) \quad (3)$$

そこで、最も近くのフロック粒子が、ある粒子から、 r と $r+dr$ の距離の間にある確率は

$$P(r+dr) - P(r) = P'(r) dr \quad (4)$$

故に、二粒子間の最も確からしい距離 L は

$$L = \int_0^\infty r P'(r) dr = \int_0^\infty 4\pi r n r^2 \cdot \exp(-4/3 \cdot \pi n r^3) dr \\ = \frac{1}{\sqrt[3]{n} \sqrt[3]{\frac{3}{4}\pi}} \int_0^\infty z^{\frac{1}{3}} \cdot \exp(-z) dz \quad (5)$$

ここで $z = 4/3 \cdot \pi n r^3$

(5) 式右辺の積分はガンマー函数であり、函数表より

$$\Gamma(4/3) = \int_0^\infty z^{\frac{1}{3}} \cdot \exp(-z) dz = 0.8930 \quad (6)$$

(6) 式を(5)式に代入して

$$L = 0.5534 \times \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \quad (7)$$

粒子の成長によりブラウン運動が粒子に変動を与える主原動力でありえなくなるまでに成長したフロックについては($d = 500 \sim 300 \text{ m}\mu$)、乱流による水塊の変動を主動力と考えねばならない。

乱流の場合において $t=0$ に点 P にあった粒子の乱流変動による時間 t 内における移動距離 X は

$$X = \int_0^t v'(t) dt \quad (8)$$

ここで $v'(t)$ = フロック粒子を同伴して変動する微小水塊の時刻 t における速度

そこでこの微小水塊の二乗平均移動距離 $\bar{X}^2$ は

$$\bar{X}^2 = \int_0^t \int_0^t \overline{v'(t_1) \cdot v'(t_2)} dt_1 dt_2 \quad (9)$$

ここで、記号上の棒線は同一現象の多数回測定による平均値を表わす。

もし、微小水体内において乱流が一樣で、 ϕ 点における二乗平均変動速度が不変であると、ラグランジェーの相関関数 $R(\tau)$ は時間差だけの関数となり

$$R(\tau) = \frac{\overline{v'(t) \cdot v'(t+\tau)}}{\bar{v}^2} \tag{10}$$

ここで τ = 時間差
故に

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\overline{X^2}) = \overline{Xv} = \int_0^t v'(t)v'(t+\tau) = \bar{v}^2 \int_0^t R(\tau) d\tau \tag{11}$$

$$X^2 = 2t \int_0^t R(\tau) d\tau = 2 \int_0^t R(\tau) d\tau \tag{12}$$

通常、有効なフロッキュレーションの行なわれる段階では衝突時間間隔は短いので、 $R(\tau)$ は近似的に 1 と考えられる。そこで

$$X^2 = \bar{v}^2 t^2 \text{ 又は } X = \sqrt{\bar{v}^2} \cdot t \tag{13}$$

そこで衝突間の平均所要時間 t は

$$t = k_1 \cdot L / \sqrt{\bar{v}^2} \cdot \frac{1}{P} \tag{14}$$

ここで t = 粒子の衝突に要する平均時間 [T]
 $\sqrt{\bar{v}^2}$ = 微小水塊の二乗平均変動速度 [LT^{-1}]
 P = フロックが他のフロックと衝突する確率
 k_1 = 微小水塊に対するフロックのずいはん係数 [無次元]

もし二個の粒子がある半径 d の内に来たら必ず合一するとするならば

$$P = k_2 (1/L^2)$$

ここで k_2 = 有効合一半径 d に関する係数 [L^2]

(7), (14), 及び (15) の三式より破かい関数 $F(n)$ は

$$F(n) = \text{const} \cdot \frac{1}{(0.5534)^3} \cdot \frac{k_1}{k_2} \cdot \sqrt{\bar{v}^2} \cdot n^2$$

$$= K \cdot \sqrt{\bar{v}^2} \cdot n^2 \tag{16}$$

ここで

$$K = \text{const} \cdot \frac{1}{(0.5534)^3} \cdot \frac{k_1}{k_2}, \quad [L^{-2}]$$

故に一般式としては

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial n}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial n}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial n}{\partial z} \right) \right\}$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} (\bar{w}_0 n) - \frac{\partial}{\partial x} (un)$$

$$- Kn^2 \sqrt{\bar{v}^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2} + G(n) \tag{17}$$

2. 機械攪拌型フロッキュレーター内でのフロックの成長

(1) 破かいを考えない場合

機械攪拌型フロッキュレーター内では強制攪拌のために

フロックは考えるブロック内では一樣に分布していると考えられる。通常、機械攪拌型フロッキュレーターは数ブロックに分けられ、短絡流を避け、各段階でのフロック形成を確実に達するように計画されている。簡単のために、ここでは (17) 式の $F(n)$ の変動速度として考えるブロック全体の平均の二乗変動速度を用い、あたかも等方性乱流下の問題のように扱う。このような省略により、機械攪拌型フロッキュレーター内のフロック成長の式は (18) のように表わされる。

$$\frac{dn}{dt} = -K(\bar{v}^2)^{\frac{1}{2}} n^2 \tag{18}$$

ここで $(\bar{v}^2)^{\frac{1}{2}}$ = 考えるブロック全体の平均の二乗平均変動速度

フロックの形成が進んで行くにつれて、単一粒子 (原粒子) と単一粒子との衝突によって生じた二倍大粒子、二倍大粒子と単一粒子の衝突による三倍大粒子等が生じて来、異なった寸法の粒子の消長、分布を考えなければならなくなる。Smolchowsky²⁾ の方法にしたがって (18) 式を R 倍粒子の消長に応用しうる様に拡大すると

$$\frac{dn_R}{dt} = \frac{1}{2} K \sum_{j=R-1}^{i=R-1} (\bar{v}^2)^{\frac{1}{2}} n_i n_j - K \sum_{i=1}^{\infty} (\bar{v}^2)^{\frac{1}{2}} n_i n_R \tag{19}$$

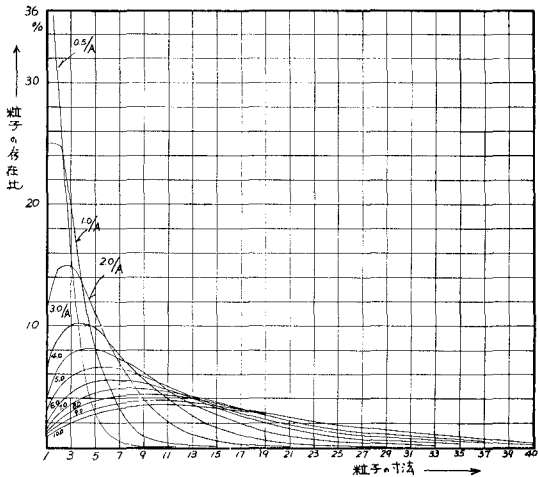
ここで n_i = i 倍粒子の数
 n_j = j 倍粒子の数
 n_R = R 倍粒子の数

全粒子数 N の消長については

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d \sum_{R=1}^{\infty} n_R}{dt} = \frac{1}{2} K (\bar{v}^2)^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} n_i n_j - 2 \sum_{R=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} n_R n_i \right\}$$

$$= \frac{1}{2} K (\bar{v}^2)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{R=1}^{\infty} n_R \right)^2 \tag{20}$$

(19) (20) 式から n_R 粒子の時間 t における消長は



図—1

$$n_R = \frac{n_0 \left(\frac{1}{2} K (\bar{v}^2)^{\frac{1}{2}} n_0 t \right)^{R-1}}{\left(1 + \frac{1}{2} K (\bar{v}^2)^{\frac{1}{2}} n_0 t \right)^{R+1}} \quad (21)$$

または

$$\frac{n_R}{n_0} = - \frac{(At)^{R-1}}{(1+At)^{R+1}} \quad (22)$$

ここで

$$A = \frac{1}{2} K (\bar{v}^2)^{\frac{1}{2}} n_0$$

この関係からフロックの破かいを考えない場合の粒子の消長は図-1のようにあらわされる。

(2) 破かいを考える場合

実際の機械攪拌フロック形成池においては、フロックの成長がある限度にまで達すると、過大生長粒子は水流によって及ぼされる剪断力に耐ええず破かいしそれ以上に成長しえない。したがって前節にのべたフロックの破かいの無い場合の式はフロック形成の比較的初期の段階に適用出来るだけで、フロック形成池内の攪拌の結果を求めるために応用することは出来ない。

そこで式(17)の最終項である破かい函数 $G(n)$ を併った基本方程式を解くことが必要になって来る。

破かい函数 $G(n)$ は種々の破かいの機構によって異なった形をとりそれにとまって方程式の解も異なって来るが本稿にあっては、次ののべるような比較的単純で最も一般的に生ずると推定される機構についての破かい函数を導いた。(i) フロックは最大 S 倍粒子に至るまでは破かいを生ずることなく生長を続ける。(ii) i 倍粒子と j 倍粒子の衝突によって、 S 倍粒子より大きな粒子が出来ると、この合一粒子は直ちに破かい解体して元の i 倍粒子と j 倍粒子となる。つまり S 倍粒子より大きな粒子を構成する粒子間の衝突はフロックの成長に対して無効であると考える。

この仮定を満たす破かい函数は次のように表わされる。

$$G(n) = K n_R \sum_{i=S-R+1}^S n_i \quad (23)$$

故に、この仮定を満たす R 倍粒子の消長は

$$\begin{aligned} \frac{dn_R}{dt} &= \frac{1}{2} K \sum_{i=1}^{R-1} n_i n_{R-i} - K n_R \sum_{i=1}^S n_i \\ &\quad + K n_R \sum_{i=S-R+1}^S n_i \\ &= \frac{1}{2} K \sum_{i=1}^{R-1} n_i n_{R-i} - K n_R \sum_{i=1}^{S-R} n_i \end{aligned} \quad (24)$$

(24) 式は(21)式を得るのに用いた解法によるように容易に一般的な解を得ることが不可能であるので、境界条件を与えて数値解法によらねばならない。

$S=20, 30, 40$ の各々の場合について $A=1 \sim 20$ の区間について各々 20 元, 30 元, 40 元の連立微分方程式をたて IBM 707 型電子計算機を用いて演算を行ないそれぞれ解を

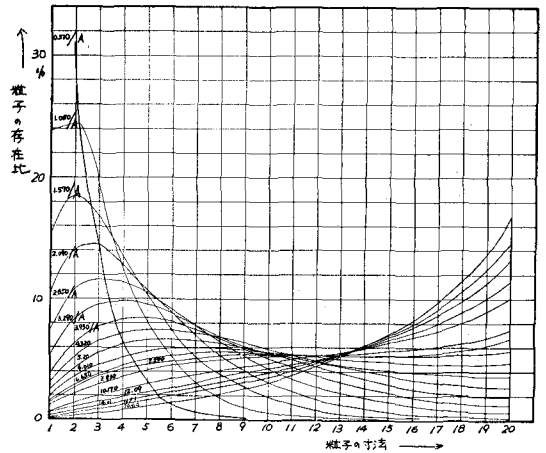


図-2

えた。

$S=20$ の例については図-2に示すようである。

この曲線群を用いることにより A -値の予め解って居るフロッキュレーター内でのフロックの成長を定量的に知りえ、次の沈澱池での除去率を予め算出することが出来る。

この図より明らかなようにフロッキュレーター内での処理時間を相当延長したとしても微小粒子を有効に減ずることは非常に難しく、沈澱効率上昇のための初期粒子寸法の重要性が強調される。

詳細については講演の際に明らかにしたい。

3. パドル型フロッキュレーターの型配列について

機械攪拌型フロッキュレーター中、一般に最も広く用いられているパドル型攪拌機における平均二乗変動速度の性質について、次のように単純化された条件下で検討を行なった。

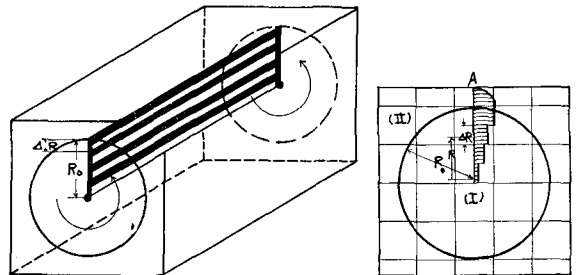


図-3 a

図-3 b

フロッキュレーターは図3-aに示すような半径 R_0 のパドルを有し、図3-bにみられるように、パドルのウエーク(後流)による乱れが卓越していると考えられること(II)部分と、壁面の摩擦による乱れが卓越していると考えられる(I)部分に分けて考えられる。議論を進めて行くにあたって、簡単のために(I)部分がフロック形成のための主部分と考えて他は省略する。ブレード群がO-A断面を横切って回転して行く現象を単純化し、A-O断面を流速

U_R なる平行流が横切る現象とおき換え、区間巾 ΔR 内で U_R は一定と考え、中心からの距離 R と共に段をなして変化する流速 U のいくつかの等速平行流ウエーク群として問題を考えて行く。(図-3c 参照)

R. G. Olssen によれば平行格子群の後流の流速分布は(25)式で与えられる。

$$u = \frac{U_R}{8\pi^3} \cdot \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \cdot \frac{\lambda}{x} \cdot \cos\left(2\pi \frac{y}{\lambda}\right) \quad (25)$$

ここで u = 平均流速 U_R からの流速差
 U_R = 巾 ΔR を有し、中心から R の距離にある区間の平均流速
 λ = 平行格子の間隔
 l = Prandtl の混合距離

平行格子の後流の場合、プラントルの混合距離 l は通常 λ に比例すると考えられる。そこで点 $P(x, y)$ における乱流変動速度 $|v'|$ は次のように導かれる。

$$\begin{aligned} |v'| \propto l \left| \frac{du}{dy} \right| &= l \left| \frac{d}{dy} \left[U_R \cdot \frac{1}{8\pi^3} \cdot \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \cdot \frac{\lambda}{x} \cdot \cos\left(2\pi \frac{y}{\lambda}\right) \right] \right| \\ &\propto l \left| U_R \cdot \left(\frac{\lambda}{l}\right) \cdot \frac{1}{x} \cdot \sin\left(2\pi \frac{y}{\lambda}\right) \right| \\ &\propto \left| U_R \cdot \frac{\lambda}{x} \cdot \sin\left(2\pi \frac{y}{\lambda}\right) \right| \quad (26) \end{aligned}$$

$y=0$ から $y=\lambda$, $x=a$ から $x=x$ の領域内の平均変動速度は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \sqrt{v'^2} &= \frac{U_R \int_a^x \frac{\lambda}{x} \cdot \left[\int_0^\lambda \sqrt{\sin^2(2\pi y/\lambda)} \cdot dy \right] dx}{x \cdot \lambda} \\ &= \frac{U_R \int_a^x \frac{\lambda}{x} \cdot \left[4 \int_0^{\lambda/4} \sin(2\pi y/\lambda) dy \right] dx}{x \lambda} \\ &\propto \frac{U_R}{x \lambda} \int_a^x \frac{\lambda^2}{x} dx = \frac{U_R \lambda}{x} \int_a^x \frac{1}{x} dx \quad (27) \end{aligned}$$

R. G. Olssen によるとこの機構による安定な後流の生ずる点は $x/\lambda > 4$ であるから、 $a=4\lambda$ とすると

$$\frac{(\sqrt{v'^2})^{\frac{1}{2}}}{U_R} = c \cdot \frac{\lambda}{x} \log \frac{x}{4\lambda} \quad (28)$$

ここで c = 比例定数

式(24)より平均二乗変動速度は攪拌翼の直線速度 U_R に直接比例することを知らうる (i.e., 翼の毎分回転数と回転軸から翼中心までの距離の積に比例する)。更に攪拌翼のピッチ λ は x 軸に垂直な平面での乱流速度に影響を与えない

(i.e., $\int_0^\lambda \sqrt{\sin^2(2\pi y/\lambda)} dy = \text{constant}$) が攪拌翼群からの無次元の距離 x/λ は重要な意味を持って来る。

式(28)の右辺の x/λ についての最大値は攪拌翼群の最も有利な値を与える。

式(28)から種々の x/λ について $\sqrt{v'^2}$ の値を求めると図-4 のようである。

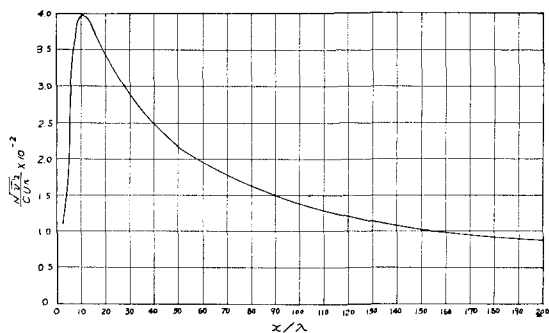


図-4

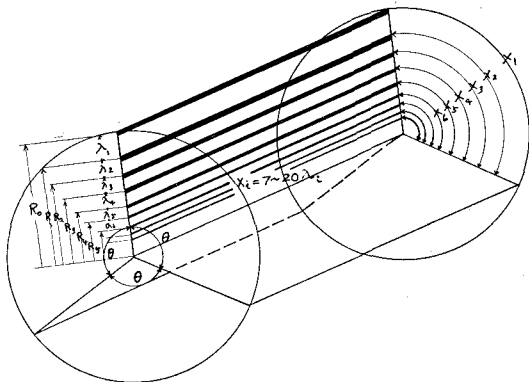


図-5

この結果によると、最も有利な攪拌翼群の間隔は 11λ であり、実際問題として 7λ から 20λ の範囲程度にあることが望まれる。このことから、各々の攪拌翼群の翼のピッチ λ は回転中心からの距離に比例して図-5 のように配列されるのが最も良い。この関係を律する条件式は

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i X(7 \sim 20) &= X_i \\ \lambda_i / R_i &= \text{constant} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

この式から λ_i か X_i のいずれかを決めると攪拌翼系の適当な配列を決めることが出来る。

(I) 部分のみを考える時には(22)式の関係から粒子の成長は (R 倍粒子時間 t における数 n) は次式によって与えられる。

$$\frac{nR}{n_0} = \frac{\left[\frac{1}{2} Kc \int_0^{R_0} \left(\frac{\lambda_R}{R\theta} \cdot \log \frac{R\theta}{4\lambda_R} \right) U_R dR \right]^{R-1}}{\left[1 + \frac{1}{2} Kc n_0 \int_0^{R_0} \left(\frac{\lambda_R}{R\theta} \cdot \log \frac{R\theta}{4\lambda_R} \right) U_R dR \right]^{R+1}} \quad (30)$$

ここで θ = 隣り合う攪拌翼群のなす角(ラジアン)
 λ_R = 攪拌翼のピッチ (R の函数)
 R = 攪拌翼群の回転主軸から考える攪拌翼
までの距離

参考文献

- 1) 丹保憲仁: 薬品沈澱におけるフロッキュレーターの

水理 水道協会雑誌 362 号 昭 36.11

- 2) M. V. Smoluchowski: Versuch einer mathematischen Theorie der Koagulationskinetik kolloidalen Lösungen, Zeitschrift. physik. chemie XCII.