格子桁理論による連続鋼床板の影響面に関する解析と計算

正員　北海道大学助教授　工博　渡　辺　昇

I. 概　　説

1. まえがき

橋の鋼床板の第 II 系の計算法としては，直交異方性板理論による方法と格子桁理論による方法とがある。図 I·1 および図 I·2 のように橋の横断方向に鋼床板が 2 径間あるいは 3 径間で連続している場合の撓みおよび断面力の影響面を画く方法として，ここでは Homberg の格子桁理論を拡張して解析と計算を行なってみた。この場合，横リブは，間隔 a をもつ無限数の 2 径間あるいは 3 径間の主桁として扱い，縦リブは，間隔 b をもつ無限数横桁として扱い，鋼床板は橋長方向に無限の長さをもつものと仮定する。主

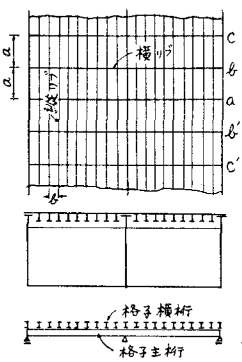

図 I·1 a–c

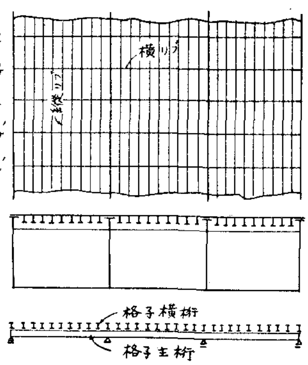

図 I·2 a–c

桁および横桁の振り剛性は無視する。この計算では，橋長方向に対しては，“弾性沈下可能の無限数支点をもつ連続桁の支点反力 $C_{ak(n)}$ と曲げモーメント $M_{ak(n)}$” と，横断方向に対しては，“無限数横桁をもつ 2 径間あるいは 3 径間の連続格子桁の理論” とを組みあわせることになる。

2. 記　　号

x＝位置座標 [m]，連続格子桁では $x_1, x_2, \cdots$；y_x＝弾性曲線 [m]，連続格子桁では $y_{x_1}, y_{x_2}\cdots$；l＝主桁支間 [m]，連続格子桁では $l_1, l_2, \cdots$；a＝主桁間隔 [m]，(横リブ間隔)；b＝横桁間隔 [m]，(縦リブ間隔)；E＝ヤング率 [t/m²]；I＝断面二次モーメント [m⁴]；I_Q＝横桁断面二次モーメント [m⁴]；M_x＝曲げモーメント [tm]，連続格子桁では $M_{x_1}, M_{x_2}, \cdots$；ω＝個有値 [m²/t]；$m=\sqrt[4]{\dfrac{1}{\omega EI}}$ [m⁻¹] 連続格子桁では $m_1, m_2, \cdots$；$\lambda=ml$,連続格子桁では $\lambda_1=m_1l_1$, $\lambda_2=m_2l_2\cdots$；$z=\left(\dfrac{l}{2a}\right)^3\cdot\dfrac{I_Q}{I}$＝曲げ格子剛度；$B_{ik}$＝弾性沈下可能の無限数支点をもつ連続桁で支点 k の上の桁上に荷重 $P=1$ が作用したときの支点 i の反力 [t]；C_{ik}＝弾性沈下可能の無限数支点をもつ連続桁で支点 k に荷重 $P=1$ が作用したときの支点 i の反力 [t]；η_v＝単位弾性曲線。

3. 無限数横桁をもつ連続格子桁の理論の概要

等断面の横桁 n 本をもつ格子桁の群荷重 $\alpha_{h(n)}$ とその撓み $f_{h(n)}$ との間には

$$f_{h(n)}=\omega_{(n)}\,\alpha_{h(n)},\quad h=1,\cdots j,\cdots n \tag{I·1}$$

なる関係がなければならない (図 I·3)。

また静荷重 $p_{x(n)}$ とその弾性曲線 $y_{x(n)}$ との間には

$$EIy^{\mathrm{IV}}_{x(n)}=p_{x(n)} \tag{I·2}$$

なる関係がある (図 I·4)。

ここで (n) は，群荷重番号であるが，以降記述の便宜上これを略する。式 (I·1) の f_h と α_h の代りに，式 (I·2) の y_x と p_x とを代入し，全径間を通して等断面主桁とすれば次のようになる。

$$y_x=\omega p_x=\omega EIy^{\mathrm{IV}}_x \tag{I·3}$$

ここで

$$m^4=\frac{1}{\omega EI} \tag{I·4}$$

あるいは

$$\omega=\frac{1}{m^4EI} \tag{I·5}$$

とおけば (ω はすべての径間において定値) 結局，次の微分方程式をうる。

$$y^{\mathrm{IV}}_x-m^4y_x=0 \tag{I·6}$$

この式の一般解は次のようになる。

$$y_x=A\cos mx+B\sin mx+C\cosh mx+D\sinh mx \tag{I·7}$$

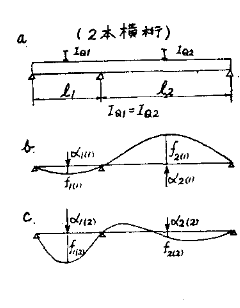

図 I·3 a–c

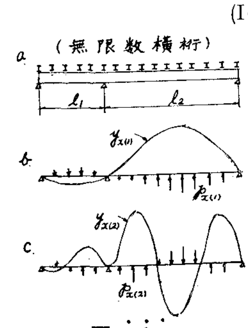

図 I·4 a–c

連続桁の各径間ごとに式(I·7)の解が存在するから，支間 $l_1, l_2\cdots$ ごとに，未知数 $A_1\cdots D_1, A_2\cdots D_2, \cdots$ が生じ，これらは境界条件により定まってくる。すなわち，支点で撓みが0, 中間支点で左右の曲げモーメントが等しく，撓角が等しい。次にこれによって得られた連立方程式の係数分母行列式を零とおくことによって $m_{(n)}$ の値の求まり，さらに $\omega_{(n)}$, $y_{x(n)}$ および $p_{x(n)}$ が求まる。群荷重 p_x の間には，次の直交関係がある。

$$\int_0^{l_1+l_2+\cdots} p_{x(n)}\cdot p_{x(h)}\,dx=0, \quad h\neq n \qquad \text{(I·8)}$$

無限数横桁をもつ格子桁に対しては

$$\alpha_{h(n)}=p_{x(n)}, \quad \gamma_{v(n)}=p_{v(n)},$$

$$\mu_{(n)}=1:\ \int_0^{l_1+l_2+\cdots} p_{x(n)}^2\,dx, \quad n=1,2,3 \qquad \text{(I·9)}$$

とおけば，$p_{x(n)}$ が静荷重として作用する基本系連続桁（横桁のない連続桁）の点 x における曲げモーメント $M_{x(n)}$, せん断力 $Q_{x(n)}$, 撓み $f_{x(n)}$ などを求めることによって，無限数横桁をもつ連続格子桁の主桁 i の点 x における主桁の影響面は次式より求まる。

格　点　力

$$K_{ix,kv}=\sum_{n=1,2,\cdots}\mu_{(n)}p_{x(n)}\gamma_{v(n)}C_{ik(n)},$$

曲げモーメント

$$M_{ix,kv}=M_{ix,kv}^0+\sum_{n=1,2,\cdots}\mu_{(n)}M_{x(n)}\gamma_{v(n)}C_{ik(n)}$$

せ ん 断 力

$$Q_{ix,kv}=Q_{ix,kv}^0+\sum_{n=1,2,\cdots}\mu_{(n)}Q_{x(n)}\gamma_{v(n)}C_{ik(n)}$$

撓　　み

$$\delta_{ix,kv}=\delta_{ix,kv}^0+\sum_{n=1,2,\cdots}\mu_{(n)}f_{x(n)}\gamma_{v(n)}C_{ik(n)}$$

(I·10–13)

また，横桁の影響面は次式より求まる。

格　点　力

$$K_{xi,vk}=\sum_{n=1,2,\cdots}\mu_{(n)}\cdot p_{x(n)}\gamma_{v(n)}C_{ik(n)},$$

曲げモーメント

$$M_{xi,vk}=\sum_{n=1,2,\cdots}\mu_{(n)}p_{x(n)}\gamma_{v(n)}M_{ik(n)},$$

せ ん 断 力

$$Q_{xi,vk}=\sum_{n=1,2,\cdots}\mu_{(n)}p_{x(n)}\gamma_{v(n)}Q_{ik(n)},$$

撓　　み

$$\delta_{xi,vk}=\sum_{n=1,2,\cdots}\mu_{(n)}p_{x(n)}\gamma_{v(n)}\delta_{ik(n)},$$

(I·14–17)

II. 2径間連続鋼床板

1. 微分方程式の解と個有値

図 II·1 のような無限数横桁をもつ連続格子桁の解は各径間ごとに次のようになる。

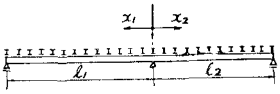

図 II·1

$$\left.\begin{aligned} y_{x_1}&=A_1\cos m_1x_1+B_1\sin m_1x_1\\ &\quad+C_1\cosh m_1x_1+D_1\sinh m_1x_1\\ y_{x_2}&=A_2\cos m_2x_2+B_2\sin m_2x_2\\ &\quad+C_2\cosh m_2x_2+D_2\sinh m_2x_2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II·1 a, b)}$$

連続桁の境界条件から，次の8式をうる。

$$\left.\begin{aligned} &x_1=0, \quad y_{x_1}=0\to 0=A_1+C_1\\ &x_1=l_1, \quad y_{x_1}=0\to 0=A_1\cos\lambda_1\\ &\quad+B_1\sin\lambda_1+C_1\cosh\lambda_1+D_1\sinh\lambda_1\\ &x_1=l_1, \quad y_{x_1}''=0\to 0=-A_1\cos\lambda_1\\ &\quad-B_1\sin\lambda_1+C_1\cosh\lambda_1+D_1\sinh\lambda_1\\ &x_2=0, \quad y_{x_2}=0\to 0=A_2+C_2\\ &x_2=l_2, \quad y_{x_2}=0\to 0=A_2\cos\lambda_2\\ &\quad+B_2\sin\lambda_2+C_2\cosh\lambda_2+D_2\sinh\lambda_2\\ &x_2=l_2, \quad y_{x_2}''=0\to 0=-A_2\cos\lambda_2\\ &\quad-B_2\sin\lambda_2+C_2\cosh\lambda_2+D_2\sinh\lambda_2\\ &x_1=x_2=0, \quad y_{x_1}''=y_{x_2}''\to\\ &\quad-A_1+C_1=-A_2+C_2\\ &x_1=x_2=0, \quad -y_{x_1}'=y_{x_2}'\to\\ &\quad-(B_1+D_1)=B_2+D_2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II·2 a, h)}$$

これらの式から

$$A=A_1=A_2=-C_1=-C_2$$

なる関係がえられ，次のように簡単化される。

$$\left.\begin{aligned} &0=A\cos\lambda_1+B_1\sin\lambda_1-A\cosh\lambda_1+D_1\sinh\lambda_1\\ &0=-A\cos\lambda_1-B_1\sin\lambda_1-A\cosh\lambda_1+D\sinh\lambda_1\\ &0=A\cos\lambda_2+B_2\sin\lambda_2-A\cosh\lambda_2+D_2\sinh\lambda_2\\ &0=-A\cos\lambda_2-B_2\sin\lambda_2-A\cosh\lambda_2+D_2\sinh\lambda_2\\ &-(B_1+D_1)=B_2+D_2 \end{aligned}\right\}$$

(II·3 a, e)

$$\left.\begin{aligned} &\text{(II·3 a)}-\text{(II·3 b)}\to 0=2A\cos\lambda_1+2B_1\sin\lambda_1\\ &\text{(II·3 c)}-\text{(II·3 d)}\to 0=2A\cos\lambda_2+2B_2\sin\lambda_2 \end{aligned}\right\}\text{(II·4 a, b)}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{(II·4 a)}\times\cos\lambda_2-\text{(II·4 b)}\times\cos\lambda_1\to\\ &B_2=\frac{\sin\lambda_1\cdot\cos\lambda_2}{\sin\lambda_2\cdot\cos\lambda_1}\cdot B_1 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II·5)}$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned} &0=A(\cos\lambda_1-\cosh\lambda_1)+B_1\sin\lambda_1+D_1\sinh\lambda_1\\ &0=A(-\cos\lambda_1-\cosh\lambda_1)-B_1\sin\lambda_1+D_1\sinh\lambda_1\\ &0=A(\cos\lambda_2-\cosh\lambda_2)+B_1\sin\lambda_1\cdot\frac{\cos\lambda_2}{\cos\lambda_1}+D_2\sinh\lambda_2\\ &0=A(-\cos\lambda_2-\cosh\lambda_2)-B_1\sin\lambda_1\cdot\frac{\cos\lambda_2}{\cos\lambda_1}+D_2\sinh\lambda_2\\ &-(B_1+D_1)=\frac{\sin\lambda_1\cdot\cos\lambda_2}{\sin\lambda_2\cdot\cos\lambda_1}\cdot B_1+D_2 \end{aligned}\right\}$$

(II·6 a, e)

$$\left.\begin{array}{l}
(\text{II}\cdot 6\,\text{a})\times \dfrac{1}{\sinh \lambda_1} \to 0 = A\,(\cos \lambda_1 - \cosh \lambda_1) \\
\quad \dfrac{1}{\sinh \lambda_1} + B_1 \dfrac{\sin \lambda_1}{\sinh \lambda_1} + D_1 \\
(\text{II}\cdot 6\,\text{c})\times \dfrac{1}{\sinh \lambda_2} \to 0 = A\,(\cos \lambda_2 - \cosh \lambda_2) \\
\quad \dfrac{1}{\sinh \lambda_2} + B_1 \dfrac{\sin \lambda_1 \cdot \cos \lambda_2}{\sinh \lambda_2 \cdot \cos \lambda_1} + D_2
\end{array}\right\} \quad (\text{II}\cdot 7\,\text{a, b})$$

$$\left.\begin{array}{l}
(\text{II}\cdot 6\,\text{a}) + (\text{II}\cdot 6\,\text{b}) \to D_1 = A \dfrac{\cosh \lambda_1}{\sinh \lambda_1} \\
(\text{II}\cdot 6\,\text{c}) + (\text{II}\cdot 6\,\text{d}) \to D_2 = A \dfrac{\cosh \lambda_2}{\sinh \lambda_2}
\end{array}\right\} \quad (\text{II}\cdot 8\,\text{a, b})$$

$$\left.\begin{array}{l}
(\text{II}\cdot 7\,\text{a}) + (\text{II}\cdot 7\,\text{b}) \to 0 \\
\quad = A\left\{\dfrac{\cos \lambda_1 - \cosh \lambda_1}{\sinh \lambda_1} + \dfrac{\cos \lambda_2 - \cosh \lambda_2}{\sinh \lambda_2}\right\} \\
\quad + B_1\left\{\dfrac{\sin \lambda_1}{\sinh \lambda_1} + \dfrac{\sin \lambda_1}{\sinh \lambda_2} \cdot \dfrac{\cos \lambda_2}{\cos \lambda_1}\right\} \\
\quad + (D_1 + D_2)
\end{array}\right\} \quad (\text{II}\cdot 9)$$

式 (II・8 a, b) を式 (II・9) に，式 (II・8 a, b) を式 (II・6 e) に代入すれば，次式をうる。

$$\left.\begin{array}{l}
B_1 = -A \dfrac{\dfrac{\cos \lambda_1}{\sinh \lambda_1} + \dfrac{\cos \lambda_2}{\sinh \lambda_2}}{\dfrac{\sin \lambda_1}{\sinh \lambda_1} + \dfrac{\sin \lambda_1}{\sinh \lambda_2} \cdot \dfrac{\cos \lambda_2}{\cos \lambda_1}} \\
\quad = -A \cdot \dfrac{\cos \lambda_1}{\sin \lambda_1} - \left(B_1 + A \dfrac{\cosh \lambda_1}{\sinh \lambda_1}\right) \\
\quad = \dfrac{\sin \lambda_1 \cdot \cos \lambda_2}{\sin \lambda_2 \cdot \cos \lambda_1} B_1 + A \dfrac{\cosh \lambda_2}{\sinh \lambda_2}
\end{array}\right\} \quad (\text{II}\cdot 10\,\text{a, b})$$

(1) 第一の解

$A=0$ とおけば，式 (II・3 a) と (II・3 b) より次式をうる。

$$\left.\begin{array}{ll}
B_1 & D_1 \\
\hline
\sin \lambda_1 & \sinh \lambda_1 = 0 \\
-\sin \lambda_1 & \sinh \lambda_1 = 0
\end{array}\right\} \quad (\text{II}\cdot 11\,\text{a, b})$$

係数行列式を 0 とおくと，

$$2 \sin \lambda_1 \cdot \sinh \lambda_1 = 0$$

となり，$\lambda_1 = m_1 l_1 \fallingdotseq 0$ に対しては常に $\sinh \lambda_1 \fallingdotseq 0$ だから，$\sin \lambda_1 = 0$ でなければならない。すなわち，個有値は

$$\lambda_{1(n)} = n\pi, \quad (n = 1, 2, 3) \qquad (\text{II}\cdot 12)$$

となる。さらに $x_1 = l_1$ に対して

$$y_{x_1} = B_1 \sin n\pi + D_1 \sinh n\pi = 0$$

だから，$D_1 = 0$ でなければならず，結局，解は

$$y_{x_1} = B_1 \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} \qquad (\text{II}\cdot 13)$$

となる。また式 (II・3 c) と (II・3 d) より次式をうる。

$$\left.\begin{array}{ll}
B_2 & D_2 \\
\hline
\sin \lambda_2 & \sinh \lambda_2 = 0 \\
-\sin \lambda_2 & \sinh \lambda_2 = 0
\end{array}\right\} \quad (\text{II}\cdot 14\,\text{a, b})$$

これも同様にして，個有値は

$$\lambda_{2(n)} = n\pi, \quad (n = 1, 2, 3) \qquad (\text{II}\cdot 15)$$

解は

$$y_{x_2} = B_2 \sin \frac{n\pi x_2}{l_2} \qquad (\text{II}\cdot 16)$$

となる。

式 (II・13) と (II・16) を式 (II・2 h) に代入すれば

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 = x_2 = 0, \quad -y'_{x_1} = y'_{x_2} \to B_2 = -B_1 \dfrac{l_2}{l_1} \\
D_1 = D_2 = 0 \to B_2 = -B_1
\end{array}\right\} \quad (\text{II}\cdot 17\,\text{a, b})$$

となり

$$l_1 = l_2 \qquad (\text{II}\cdot 18)$$

でなければならない。次に，$x_1 = l_1$ においてすべての n の値に対して $y_{x_1} = B_1 \sin n\pi = 0$ であるから，未知定数 B_1 には任意の値を与えることができるから $y_{x(n)} = \omega_{(n)} p_{x(n)}$ の関係に着目して

$$B_1 = \omega_{(n)}, \quad B_2 = -\omega_{(n)}$$

を与える。結局

$$l_1 = l_2 = l, \quad \lambda_{1(n)} = \lambda_{2(n)} = n\pi, \quad (n = 1, 2, 3)$$

の場合に

$$\left.\begin{array}{l}
y_{x_1(n)} = \omega_{(n)} \sin \dfrac{n\pi}{l} x_1 \\
y_{x_2(n)} = -\omega_{(n)} \sin \dfrac{n\pi}{l} x_2, \quad n = 1, 2, 3 \cdots
\end{array}\right\} \quad (\text{II}\cdot 19\,\text{a, b})$$

なる解をうる。

従って

$$\left.\begin{array}{l}
p_{x_1(n)} = \sin \dfrac{n\pi}{l} x_1 = {}_1\gamma_{v_1(n)} \\
p_{x_2(n)} = \sin \dfrac{n\pi}{l} x_2 = {}_1\gamma_{v_2(n)} \quad n = 1, 2, 3 \cdots
\end{array}\right\} \quad (\text{II}\cdot 20\,\text{a, b})$$

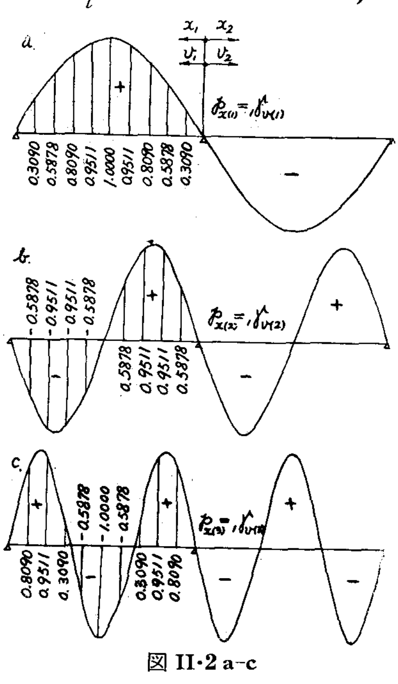

図 II・2 a–c

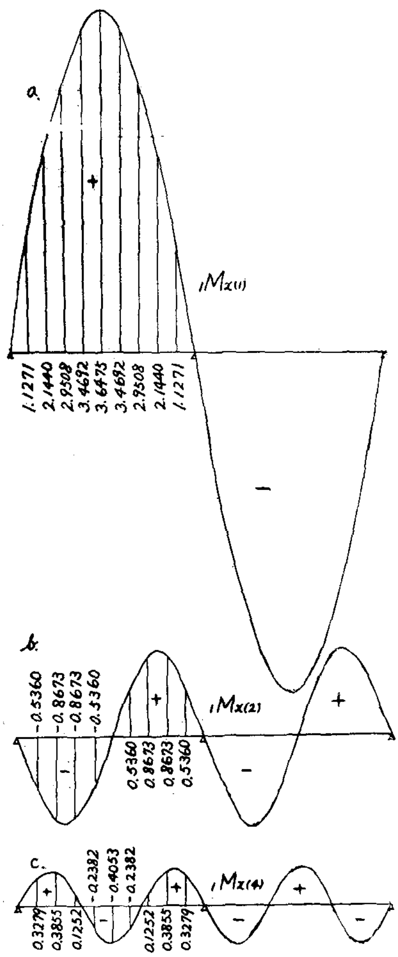

図 II·3 a–c

また

$$M=-EIy''_x$$

$$=-EI\omega_{(n)}\frac{d^2p_x}{dx^2}=-EI\frac{1}{m^4_{(n)}EI}\frac{d^2p_x}{dx^2} \qquad \text{(II·21)}$$

だから

$$\left.\begin{aligned}{}_1M_{x_1(n)}&=\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi x_1}{l}\\ {}_1M_{x_2(n)}&=-\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi x_1}{l}\end{aligned}\right\} \qquad \text{(II·22 a, b)}$$

となる。これを図示すれば図II·2および図II·3のとおりである。

(2) 第 二 の 解

式(II·10 a, b)より次式をうる

$$\left.\begin{array}{ccc} A & B_1 & \\ \hline \cos\lambda_1 & \sin\lambda_1 & =0 \\ \left(\dfrac{\cosh\lambda_2}{\sinh\lambda_2}+\dfrac{\cosh\lambda_1}{\sinh\lambda_1}\right) & \left(\dfrac{\sin\lambda_1}{\sin\lambda_2}\cdot\dfrac{\cos\lambda_2}{\sin\lambda_1}+1\right) & =0 \end{array}\right\}$$

(II 23 a, b)

係数行列式を0とおくと

$$\cos\lambda_1\left(\frac{\sin\lambda_1}{\sin\lambda_2}\cdot\frac{\cos\lambda_2}{\cos\lambda_1}+1\right)$$
$$-\sin\lambda_1\left(\frac{\cosh\lambda_2}{\sinh\lambda_2}+\frac{\cosh\lambda_1}{\sinh\lambda_1}\right)=0$$

となり，

$$l_1\neq l_2,\quad \sin\lambda_1\neq 0\quad(\lambda_1\neq n\pi)$$

に対して，次の条件式をうる。

$$\frac{\cos\lambda_1}{\sin\lambda_1}-\frac{\cosh\lambda_1}{\sinh\lambda_1}=-\left(\frac{\cos\lambda_2}{\sin\lambda_2}-\frac{\cosh\lambda_2}{\sinh\lambda_2}\right) \qquad \text{(II·24)}$$

特に，

$$l_1=l_2=l,\quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda$$

の場合には

$$\cot\lambda=\coth\lambda \qquad \text{(II·25)}$$

なる条件が存在し，個有値は

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{(1)}&=3.9265\fallingdotseq\left(1+\frac{1}{4}\right)\pi\\ \lambda_{(n)}&=\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi,\quad n=2,3,4\end{aligned}\right\} \qquad \text{(II·26)}$$

となる。

次に，式(II·23 a, b)で

$$A=\frac{1}{2}\omega_{(n)}$$

とおけば

$$B_1=-\frac{\omega_{(n)}}{2}\frac{\cos\lambda_1}{\sin\lambda_1} \qquad \text{(II·27 a)}$$

となり，さらに

$$\left.\begin{aligned}D_1&=\frac{\omega_{(n)}}{2}\frac{\cosh\lambda_{1(n)}}{\sinh\lambda_{1(n)}}, & D_2&=\frac{\omega_{(n)}}{2}\cdot\frac{\cosh\lambda_{2(n)}}{\sinh\lambda_{2(n)}},\\ A_1&=A_2=\frac{\omega_{(n)}}{2}, & C_1&=C_2=-\frac{\omega_{(n)}}{2},\\ B_1&=-\frac{\omega_{(n)}}{2}\cdot\frac{\cos\lambda_{1(n)}}{\sin\lambda_{1(n)}}, & B_2&=-\frac{\omega_{(n)}}{2}\cdot\frac{\cos\lambda_{2(n)}}{\sin\lambda_{2(n)}},\end{aligned}\right\}$$

(II·28 b–f)

となり，結局

$$\left.\begin{aligned}y_{x_1(n)}&=\frac{\omega_{(n)}}{2}\left\{\cos m_{1(n)}x_1-\left(\frac{\cos\lambda_{1(n)}}{\sin\lambda_{1(n)}}\right)\sin m_{1(n)}x_1\right.\\ &\quad\left.-\cosh m_{1(n)}x_1+\left(\frac{\cosh\lambda_{1(n)}}{\sinh\lambda_{1(n)}}\right)\sinh m_{(n)}x_1\right\}\\ &=\omega_{(n)}\left\{-\frac{\sinh(\lambda_{1(n)}-m_{1(n)}x_1)}{2\sinh\lambda_{1(n)}}\right.\\ &\quad\left.+\frac{\sin(\lambda_{1(n)}-m_{1(n)}x_1)}{2\sin\lambda_{1(n)}}\right\}\\ y_{x_2(n)}&=\frac{\omega_{(n)}}{2}\left\{\cos m_{2(n)}x_2-\left(\frac{\cos\lambda_{2(n)}}{\sin\lambda_{2(n)}}\right)\sin m_{2(n)}x_2\right.\\ &\quad\left.-\cosh m_{2(n)}x_2+\left(\frac{\cosh\lambda_{2(n)}}{\sinh\lambda_{2(n)}}\right)\sinh m_{2(n)}x_2\right\}\\ &=\omega_{(n)}\left\{-\frac{\sinh(\lambda_{2(n)}-m_{2(n)}x_1)}{2\sinh\lambda_{2(n)}}\right.\\ &\quad\left.+\frac{\sin(\lambda_{2(n)}-m_{2(n)}x_2)}{2\sin\lambda_{2(n)}}\right\}\end{aligned}\right\}$$

(II·29 a, b)

なる解をうる。

従って，

$$\left.\begin{aligned}
p_{x_1(n)} &= -\frac{\sinh(\lambda_{1(n)}-m_{1(n)}x_1)}{2\sinh\lambda_{1(n)}} \\
&\quad+\frac{\sin(\lambda_{1(n)}-m_{1(n)}x_1)}{2\sin\lambda_{1(n)}}={}_2\gamma_{v_1(n)} \\
p_{x_2(n)} &= -\frac{\sinh(\lambda_{2(n)}-m_{2(n)}x_2)}{2\sinh\lambda_{2(n)}} \\
&\quad+\frac{\sin(\lambda_{2(n)}-m_{2(n)}x_2)}{2\sin\lambda_{2(n)}}={}_2\gamma_{v_2(n)}
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II}\cdot 30\,\mathrm{a,b})$$

$$\left.\begin{aligned}
{}_2M_{x_1(n)} &= \frac{1}{m_{1(n)}^2}\left\{\frac{\sinh(\lambda_{1(n)}-m_{1(n)}x_1)}{2\sinh\lambda_{1(n)}}\right. \\
&\quad\left.+\frac{\sin(\lambda_{1(n)}-m_{1(n)}x_1)}{2\sin\lambda_{1(n)}}\right\} \\
{}_2M_{x_2(n)} &= \frac{1}{m_{2(n)}^2}\left\{\frac{\sinh(\lambda_{2(n)}-m_{2(n)}x_2)}{2\sinh\lambda_{2(n)}}\right. \\
&\quad\left.+\frac{\sin(\lambda_{2(n)}-m_{2(n)}x_2)}{2\sin\lambda_{2(n)}}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II}\cdot 31\,\mathrm{a,b})$$

となる。

特に，

$$l_1=l_2=l,\quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda,\quad x_1=x_2=x$$

の場合には

$$\left.\begin{aligned}
&y_{x_1(n)}=y_{x_2(n)}=\omega_{(n)}p_{x_1(n)}=\omega_{(n)}p_{x_2(n)} \\
&p_{x_1(n)}=p_{x_2(n)}=-\frac{\sinh(\lambda_{(n)}-m_{(n)}x)}{2\sinh\lambda_{(n)}} \\
&\quad+\frac{\sin(\lambda_{(n)}-m_{(n)}x)}{2\sin\lambda_{(n)}}={}_2\gamma_{v_1(n)}={}_2\gamma_{v_2(n)} \\
&{}_2M_{x_1(n)}={}_2M_{x_2(n)}=\frac{1}{m_{(n)}^2}\left\{\frac{\sinh(\lambda_{(n)}-m_{(n)}x)}{2\sinh\lambda_{(n)}}\right. \\
&\quad\left.+\frac{\sin(\lambda_{(n)}-m_{(n)}x)}{2\sin\lambda_{(n)}}\right\}
\end{aligned}\right\}$$

(II·32–34)

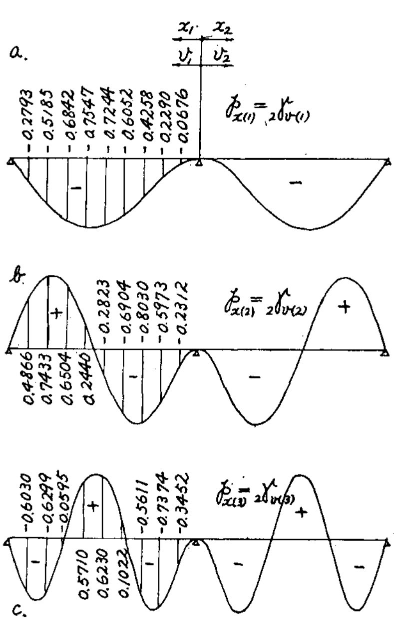

図 II·4 a–c

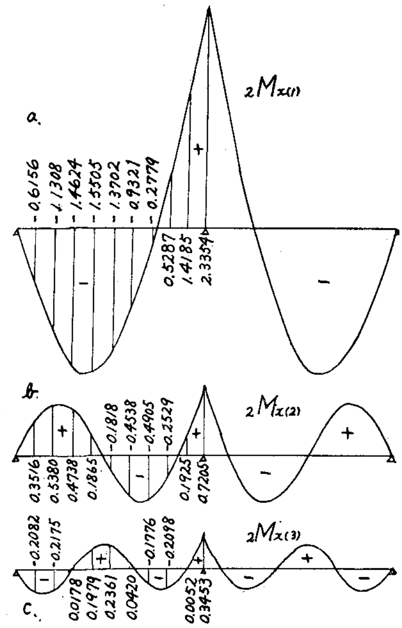

図 II·5 a–c

となる。そして個有値 $\lambda_{(n)}$ は式 (II·26) である。これらを図示すれば図 II·4 および図 II·5 のとおりである。

2. $\int p_x^2 dx$, μ の計算

(1) 第 一 の 解

$l_1=l_2=l$ の場合である。

$$p_{x_1(n)}=\sin\frac{n\pi x_1}{l},\qquad p_{x_2(n)}=-\sin\frac{n\pi x_2}{l}.$$

$$p_{x_1(n)}^2=p_{x_2(n)}^2=\sin^2\frac{n\pi x}{l}.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^l p_{x_1(n)}^2dx&=\int_0^l p_{x_2(n)}^2dx=\int_0^l\sin^2\frac{n\pi x}{l}dx \\
&=\int_0^l\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx \\
&=\frac{1}{2}\left[x-\frac{l}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{l}\right]_0^l=\frac{l}{2}
\end{aligned}\qquad (\mathrm{II}\cdot 35)$$

$$\begin{aligned}
\mu_{(n)}&=\frac{1}{\int_0^{l_1}p_{x_1(n)}^2dx_2+\int_0^{l_2}p_{x_2(n)}^2dx} \\
&=\frac{1}{2\int_0^l p_{x(n)}^2dx}=\frac{1}{l}
\end{aligned}\qquad (\mathrm{II}\cdot 36)$$

(2) 第 二 の 解

図 II·1 のように $l_1 \neq l_2$ の場合である。

$$p_{x_1}=-\frac{\sinh(\lambda-mx_1)}{2\sinh\lambda}+\frac{\sin(\lambda-mx_1)}{2\sin\lambda},$$

$$p_{x_2}=-\frac{\sinh(\lambda-mx_2)}{2\sinh\lambda}+\frac{\sin(\lambda-mx_2)}{2\sin\lambda}.$$

$$\begin{aligned}
p_x^2&=\frac{\sinh^2(\lambda-mx)}{4\sinh^2\lambda} \\
&\quad+\frac{\sin^2(\lambda-mx)}{4\sin^2\lambda}-\frac{\sinh(\lambda-mx)\cdot\sin(\lambda-mx)}{2\sinh\lambda\cdot\sin\lambda}.
\end{aligned}$$

$$\int_0^l p_x^2 dx=\int_0^l \frac{\sinh^2(\lambda-mx)}{4\sinh^2\lambda}dx+\int_0^l \frac{\sin^2(\lambda-mx)}{4\sin^2\lambda}dx-\int_0^l \frac{\sinh(\lambda-mx)\cdot\sin(\lambda-mx)}{2\sinh\lambda\cdot\sin\lambda}dx$$

$$=\frac{1}{8\sinh^2\lambda}\int_0^l\left\{\cosh^2(\lambda-mx)-1\right\}dx+\frac{1}{4\sin^2\lambda}\int_0^l\sin^2(\lambda-mx)\,dx-\frac{1}{2\sinh\lambda\cdot\sin\lambda}\int_0^l\sinh(\lambda-mx)$$

$$\cdot\sin(\lambda-mx)\,dx=\frac{1}{8\sinh^2\lambda}\left[\frac{\sinh_2(\lambda-mx)}{-2m}-x\right]_0^l+\frac{1}{4\sin^2\lambda}\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{4m}\sin 2\ (\lambda-mx)\right]_0^l$$

$$-\frac{1}{2\sinh\lambda\cdot\sin\lambda}\left[\frac{1}{2m}\left\{\cos(\lambda-mx)\cdot\sinh(\lambda-mx)-\sin(\lambda-mx)\cdot\cosh(\lambda-mx)\right\}\right]_0^l=\frac{1}{8\sinh^2\lambda}\left[\frac{\sinh 2\lambda}{2m}-l\right]$$

$$+\frac{1}{4\sin^2\lambda}\left[\frac{l}{2}-\frac{\sin 2\lambda}{4m}\right]-\frac{1}{2\sinh\lambda\cdot\sin\lambda}\left[\frac{1}{2m}(-\cos\lambda\cdot\sinh\lambda+\sin\lambda\cdot\cosh\lambda)\right]=\frac{\sinh 2\lambda}{16m\sinh^2\lambda}-\frac{l}{8\sinh^2\lambda}$$

$$+\frac{l}{8\sin^2\lambda}-\frac{\sin 2\lambda}{16m\sin^2\lambda}=\frac{\cosh\lambda}{8m\sinh\lambda}-\frac{l}{8\sinh^2\lambda}+\frac{l}{8\sin^2\lambda}-\frac{\cos\lambda}{8m\sin\lambda}=\frac{l}{8}\left\{\left(\frac{\cosh\lambda}{\lambda\sinh\lambda}-\frac{\cos\lambda}{\lambda\cdot\sin\lambda}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\sin^2\lambda}-\frac{1}{\sinh^2\lambda}\right)\right\} \tag{II·37}$$

$$\mu_{(n)}=\frac{1}{\int_0^{l_1}p_{x_1(n)}^2dx+\int_0^{l_2}p_{x_2(n)}^2dx}=\left[\frac{l_1}{8}\left\{\left(\frac{\cosh\lambda_{1(n)}}{\lambda_{1(n)}\cdot\sinh\lambda_{1(n)}}-\frac{\cos\lambda_{1(n)}}{\lambda_{1(n)}\cdot\sin\lambda_{1(n)}}\right)+\left(\frac{1}{\sin^2\lambda_{1(n)}}-\frac{1}{\sinh^2\lambda_{1(n)}}\right)\right\}\right.$$

$$\left.+\frac{l_2}{8}\left\{\left(\frac{\cosh\lambda_{2(n)}}{\lambda_{2(n)}\sinh\lambda_{2(n)}}-\frac{\cos\lambda_{2(n)}}{\lambda_{2(n)}\sin\lambda_{2(n)}}\right)+\left(\frac{1}{\sin^2\lambda_{2(n)}}-\frac{1}{\sinh^2\lambda_{2(n)}}\right)\right\}\right]^{-1} \tag{II·38}$$

特に

$l_1=l_2=l,\quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda$

の場合は，式(II·24)を用いて，次のようになる。

$$\mu_{(n)}=\frac{1}{2\int_0^l p_{x(n)}^2dx}$$

$$=\left[\frac{l}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\lambda_{(n)}}-\frac{1}{\sinh^2\lambda_{(n)}}\right)\right]^{-1} \tag{II·39}$$

このときは

$$\lambda_{(1)}=3.9265,\quad \lambda_{(2)}=\left(2+\frac{1}{4}\right)\pi=7.0686,$$

$$\lambda_{(3)}=\left(3+\frac{1}{4}\right)\pi=10.2102$$

であったから

$$\therefore\quad \int_0^l p_{x(1)}^2dx=\frac{l}{8}\left(\frac{1}{\sin^2 3.9265}-\frac{1}{\sinh^2 3.9265}\right)$$

$$=\frac{l}{8}\left(\frac{1}{0.707^2}-\frac{1}{25.367^2}\right)\fallingdotseq\frac{l}{4}$$

$$\int_0^l p_{x(2)}^2dx=\frac{l}{8}\left(\frac{1}{\sin^2\left(2+\frac{1}{4}\right)\pi}-\frac{1}{\sinh^2\left(2+\frac{1}{4}\right)\pi}\right)=\frac{l}{4}$$

$$\int_0^l p_{x(3)}^2dx=\frac{l}{8}\left(\frac{1}{\sin^2\left(3+\frac{1}{4}\right)\pi}-\frac{1}{\sinh^2\left(3+\frac{1}{4}\right)\pi}\right)=\frac{l}{4}$$

となり，

$$\mu_{(1)}=\mu_{(2)}=\mu_{(3)}=\frac{1}{2\times\frac{l}{4}}=\frac{2}{l} \tag{II·40}$$

となる。

III. 3径間連続鋼床板

1. 微分方程式の対称形の解と個有値

図 III·1 のような無限数横桁をもつ連続格子桁の解は各径間ごとに次のようになる。

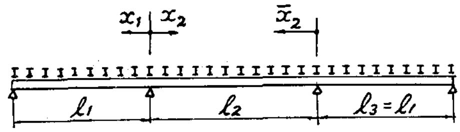

図 III·1

$$\left.\begin{aligned}y_{x_1}&=A_1\cos m_1x_1+B_1\sin m_1x_1\\&\quad+C_1\cosh m_1x_1+D_1\sinh m_1x_1\\y_{x_2}&=A_2\cos m_2x_2+B_2\sin m_2x_2\\&\quad+C_2\cosh m_2x_2+D_2\sinh m_2x_2\end{aligned}\right\} \tag{III·1 a, b}$$

連続桁の境界条件から次の8式をうる。

$$\left.\begin{aligned}&x_1=0,\ y_{x_1}=0\to 0=A_1+C_1\\&x_1=l_1,\ y_{x_1}=0\to 0=A_1\cos\lambda_1\\&\quad+B_1\sin\lambda_1+C_1\cosh\lambda_1+D_1\sinh\lambda_1\\&x_1=l_1,\ y_{x_1}''=0\to 0=-A_1\cos\lambda_1\\&\quad-B_1\sin\lambda_1+C_1\cosh\lambda_1+D_1\sinh\lambda_1\\&x_2=0,\ y_{x_2}=0\to 0=A_2+C_2\\&x_2=l_2,y_{x_2}=0\to 0=A_2\cos\lambda_2+B_2\sin\lambda_2\\&\quad+C_2\cosh\lambda_2+D_2\sinh\lambda_2\\&x_2=\frac{l_2}{2},\ y_{x_2}'=0\to 0=-A_2\sin\frac{\lambda_2}{2}\\&\quad+B_2\cos\frac{\lambda_2}{2}+C_2\sinh\frac{\lambda_2}{2}+D_2\cosh\frac{\lambda_2}{2}\\&x_1=x_2=0,\ y_{x_1}''=y_{x_2}''\to\\&\quad-A_1+C_1=-A_2+C_2\\&x_1=x_2=0,\ -y_{x_1}'=y_{2x}'\to\\&\quad-(B_1+D_1)=B_2+D_2\end{aligned}\right\} \tag{III·2 a–h}$$

これらの式から，

$$A=A_1=A_2=-C_1=-C_2$$

なる関係がえられ，次のように簡単化される。

$$\left.\begin{aligned}0&=A\cos\lambda_1+B_1\sin\lambda_1-A\cosh\lambda_1+D_1\sinh\lambda_1\\0&=-A\cos\lambda_1-B_1\sin\lambda_1-A\cosh\lambda_1+D_1\sinh\lambda_1\\0&=A\cos\lambda_2+B_2\sin\lambda_2-A\cosh\lambda_2+D_2\sinh\lambda_2\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&0=-A\sin\frac{\lambda_2}{2}+B_2\cos\frac{\lambda_2}{2}-A\sinh\frac{\lambda_2}{2}\\&\quad+D_2\cosh\frac{\lambda_2}{2}\\&\quad-(B_1+D_1)=B_2+D_2\end{aligned}\right\}\quad(\text{III}\cdot 3\text{ a–e})$$

$$(\text{III}\cdot 3\text{ a})+(\text{III}\cdot 3\text{ b})\to D_1=A\frac{\cosh\lambda_1}{\sinh\lambda_1}\quad(\text{III}\cdot 4)$$

$(\text{III}\cdot 3\text{ c})\times\cos\frac{\lambda_2}{2}-(\text{III}\cdot 3\text{ d})\times\sin\lambda_2\to$

$$D_2=A\frac{\left(-\cos\lambda_2\cdot\cos\frac{\lambda_2}{2}-\sin\lambda_2\cdot\sin\frac{\lambda_2}{2}+\cosh\lambda_2\cdot\cos\frac{\lambda_2}{2}-\sin\lambda_2\cdot\sinh\frac{\lambda_2}{2}\right)}{\sinh\lambda_2\cdot\cos\frac{\lambda_2}{2}-\sin\lambda_2\cdot\cosh\frac{\lambda_2}{2}}=A\frac{\cosh\lambda_2-1}{\sinh\lambda_2}=A\frac{\sinh\frac{\lambda_2}{2}}{\cosh\frac{\lambda_2}{2}}\quad(\text{III}\cdot 5)$$

式(III•4)を式(III•3 a)に，式(III•5)を式(III•c)に，式(III•5)を式(III•d)に，式(III•4)と(III•5)を式(III•3 e)に代入すれば，次式をうる。

$$\left.\begin{aligned}&0=A\cos\lambda_1+B_1\sin\lambda_1\\&0=-A\sin\frac{\lambda_2}{2}+B_2\cos\frac{\lambda_2}{2}\\&0=A\left(\frac{\sinh\frac{\lambda_2}{2}}{\cosh\frac{\lambda_2}{2}}+\frac{\cosh\lambda_1}{\sinh\lambda_1}\right)+B_1+B_2\end{aligned}\right\}\quad(\text{III}\cdot 6\text{ a–c})$$

$(\text{III}\cdot 6\text{ a})\times\sin\frac{\lambda_2}{2}+(\text{III}\cdot 6\text{ b})\times\sin\lambda_1\to$

$$B_2=-B_1\frac{\sin\lambda_1\cdot\sin\frac{\lambda_2}{2}}{\cos\lambda_1\cos\frac{\lambda_2}{2}}\quad(\text{III}\cdot 7)$$

式(III•6 a)より

$$B_1=-A\frac{\cos\lambda_1}{\sin\lambda_1}\quad(\text{III}\cdot 8)$$

結局，次式をうる。

$$\left.\begin{aligned}&0=A\cos\lambda_1+B_1\sin\lambda_1\\&0=A\left(\frac{\sinh\frac{\lambda_2}{2}}{\cosh\frac{\lambda_2}{2}}+\frac{\cosh\lambda_1}{\sinh\lambda_1}\right)\\&\quad+B\left(1-\frac{\sin\lambda_1\cdot\sin\frac{\lambda_2}{2}}{\cos\lambda_1\cdot\cos\frac{\lambda_2}{2}}\right)\end{aligned}\right\}\quad(\text{III}\cdot 9\text{ a, b})$$

(1) 第一の解

$A=0$ とおけば，式(III•3 a)と(III•3 b)より次式をうる。

$$\left.\begin{array}{ll}B_1 & D_1\\\hline\sin\lambda_1 & \sinh\lambda_1=0\\-\sin\lambda_1 & \sinh\lambda_1=0\end{array}\right\}\quad(\text{III}\cdot 10\text{ a, b})$$

この解は，2径間の場合と同様に

$$y_{x_1}=B_1\sin\frac{n\pi x_1}{l_1}\quad(\text{III}\cdot 11)$$

となり，個有値は

$$\lambda_{1(n)}=n\pi,\quad n=1,2,3,\cdots\quad(\text{III}\cdot 12)$$

である。

また，式(III•3 c)と(III•3 d)より次式をうる。

$$\left.\begin{array}{ll}B_2 & D_2\\\hline\sin\lambda_2 & \sinh\lambda_2=0\\\cos\frac{\lambda_2}{2} & \cosh\frac{\lambda_2}{2}=0\end{array}\right\}\quad(\text{III}\cdot 13\text{ a, b})$$

係数行列式を0とおくと

$$\cos\frac{\lambda_2}{2}\cosh\frac{\lambda_2}{2}\left(\sin\frac{\lambda_2}{2}-\sinh\frac{\lambda_2}{2}\right)=0$$

となり，$\lambda_2\neq 0$ では

$$\cosh\frac{\lambda_2}{2}\left(\sin\frac{\lambda_2}{2}-\sinh\frac{\lambda_2}{2}\right)\neq 0$$

であるから

$$\cos\frac{\lambda_2}{2}=0$$

となり，個有値は

$$\lambda_{2(n)}=n\pi,\quad n=1,3,5,\cdots\quad(\text{III}\cdot 14)$$

となる。さらに $x_2=l_2$ に対して

$$y_{x_2}=B_2\sin n\pi+D_2\sinh n\pi=0$$

であり，$D_2=0$ でなければならないから結局，解は

$$y_{x_2}=B_2\sin\frac{n\pi x_2}{l_2},\quad n=1,3,5,\cdots\quad(\text{III}\cdot 15)$$

となる。式(III•11)と(III•15)を，式III•2hに代入すれば，

$$\left.\begin{aligned}&x_1=x_2=0,\quad -y'_{x_1}=y'_{x_2}\to B_2=-B_1\frac{l_2}{l_1}\\&D_1=D_2=0\to B_2=-B_1\end{aligned}\right\}\quad(\text{III}\cdot 16\text{ a, b})$$

となり，

$$l_1=l_2\quad(\text{III}\cdot 17)$$

でなければならない。次に $x_1=l_1$ において，すべての n の値に対して

$$y_{x_1}=B_1\sin n\pi=0$$

であるから，未知数 B_1 には任意の値を与えることができる。従って，

$$B_1=\omega_{(n)},\quad B_2=-\omega_{(n)}$$

を与え，結局

$$l_1=l_2=l,\quad \lambda_{1(n)}=\lambda_{2(n)}=n\pi\ (n=1,3,5,\cdots)$$

の場合に

$$\left.\begin{aligned} y_{x_1(n)} &= \omega_{(n)} \sin \frac{n\pi}{l} x_1, \\ y_{x_2(n)} &= -\omega_{(n)} \sin \frac{n\pi}{l} x_2, \quad n=1,3,5,\cdots \end{aligned}\right\} \text{(III·18 a, b)}$$

なる解をうる。

従って

$$\left.\begin{aligned} p_{x_1(n)} &= \sin \frac{n\pi}{l} x_1 = {}_1r_{v_1(n)}, \\ p_{x_2(n)} &= -\sin \frac{n\pi}{l} x_2 = {}_1r_{v_2(n)}, \quad n=1,3,5,\cdots \end{aligned}\right\} \text{(III·19 a, b)}$$

$$\left.\begin{aligned} {}_1M_{x_1(n)} &= \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \sin \frac{n\pi x_1}{l} \\ {}_1M_{x_2(n)} &= -\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \sin \frac{n\pi x_2}{l} \end{aligned}\right\} \quad \text{(III·20 a, b)}$$

をうる。 これらを図示すれば図 III·5 a, c および図 III·6 a,c のとおりである。

(2) 第二の解

式 (III·9 a, b) より次式をうる。

$$\left.\begin{array}{cc} A & B \\ \hline \cos\lambda_1 & \sin\lambda_1 \\ \left(\dfrac{\sinh\dfrac{\lambda_2}{2}}{\cosh\dfrac{\lambda_2}{2}} + \dfrac{\cosh\lambda_1}{\sinh\lambda_1}\right) & \left(1-\dfrac{\sin\lambda_1\cdot\sin\dfrac{\lambda_2}{2}}{\cos\lambda_1\cdot\cos\dfrac{\lambda_2}{2}}\right)=0 \end{array}\right\} \text{(III·21 a, b)}$$

係数列式を 0 とおくと

$$\cos\lambda_1\left(1-\frac{\sin\lambda_1\cdot\sin\dfrac{\lambda_2}{2}}{\cos\lambda_1\cdot\cos\dfrac{\lambda_2}{2}}\right) -\sin\lambda_1\left(\frac{\sinh\dfrac{\lambda_2}{2}}{\cosh\dfrac{\lambda_2}{2}}+\frac{\cosh\lambda_1}{\sinh\lambda_1}\right)=0$$

となり，

$l_1 \neq l_2, \quad \sin\lambda_1 \neq 0 \ (\lambda_1 \neq n\pi)$

に対して，次の条件式をうる。

$$\frac{\cosh\lambda_1}{\sinh\lambda_1}-\frac{\cos\lambda_1}{\sin\lambda_1}=-\left(\frac{\sin\dfrac{\lambda_2}{2}}{\cos\dfrac{\lambda_2}{2}}+\frac{\sinh\dfrac{\lambda_2}{2}}{\cosh\dfrac{\lambda_2}{2}}\right) \quad \text{(III·22)}$$

特に

$l_1 = l_2 = l, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

の場合には

$$\frac{\sin\lambda\cdot\cosh\lambda-\cos\lambda\cdot\sinh\lambda}{\sin\lambda\cdot\sinh\lambda} = -\frac{\sin\dfrac{\lambda}{2}\cosh\dfrac{\lambda}{2}+\cos\dfrac{\lambda}{2}\sinh\dfrac{\lambda}{2}}{\cos\dfrac{\lambda}{2}\cosh\dfrac{\lambda}{2}} \quad \text{(III·23)}$$

なる条件が存在する。いま

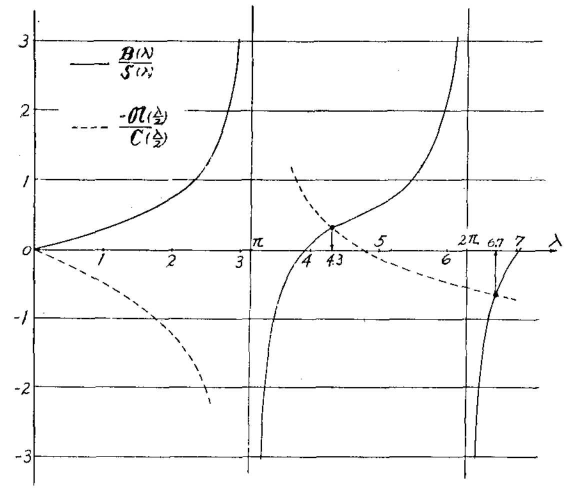

図 III·2

$$\left.\begin{aligned} &\sin\lambda\cdot\cosh\lambda-\cos\lambda\cdot\sinh\lambda=\mathfrak{B}(\lambda) \\ &\sin\lambda\cdot\sinh\lambda=S(\lambda) \\ &\sin\frac{\lambda}{2}\cosh\frac{\lambda}{2}+\cos\frac{\lambda}{2}\sinh\frac{\lambda}{2}=\mathfrak{A}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \\ &\cos\frac{\lambda}{2}\cdot\cosh\frac{\lambda}{2}=C\left(\frac{\lambda}{2}\right) \end{aligned}\right\} \text{(III·24 a, d)}$$

とおけば式 (III·23) は

$$\frac{\mathfrak{B}(\lambda)}{S(\lambda)}=-\frac{\mathfrak{A}\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)}{C\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)} \quad \text{(III·25)}$$

となり，$\mathfrak{B}(\lambda)$, $\mathfrak{S}(\lambda)$, $\mathfrak{A}(\lambda)$, $\mathfrak{C}(\lambda)$ の関数表は，文献 [4] から引用することが出来，式 (III·25) と図 III·2 より

$$\lambda_{(1)}=4.3, \quad \lambda_{(2)}=6.7 \quad \text{(III·26)}$$

なる固有値をうる。

次に，式 (III·21 a, b) で

$$A=\frac{1}{2}\omega_{(n)}$$

とおけば，

$$B_1=-\frac{\omega_{(n)}}{2}\,\frac{\cos\lambda_1}{\sin\lambda_1} \quad \text{(III·27 a)}$$

となり，さらに

$$\left.\begin{aligned} &A_1=A_2=\frac{\omega_{(n)}}{2}, \quad C_1=C_2=-\frac{\omega_{(n)}}{2}, \\ &D_1=\frac{\omega_{(n)}\cosh\lambda_1}{2\sinh\lambda_1}, \quad D_2=\frac{\omega_{(n)}\sinh\dfrac{\lambda_2}{2}}{2\cosh\dfrac{\lambda_2}{2}}, \\ &B_2=\frac{\omega_{(n)}\sin\dfrac{\lambda_2}{2}}{2\cos\dfrac{\lambda_2}{2}} \end{aligned}\right\} \text{(III·27 b, f)}$$

となり，結局

$$\left.\begin{aligned}
y_{x_1(n)} &= \frac{\omega_{(n)}}{2}\left\{\cos m_{1(n)}x_1-\left(\frac{\cos\lambda_{1(n)}}{\sin\lambda_{1(n)}}\right)\sin m_{1(n)}x_1-\cosh m_{1(n)}x_1+\left(\frac{\cosh\lambda_{1(n)}}{\sinh\lambda_{1(n)}}\right)\sinh m_{1(n)}x_1\right\}\\
&= \omega_{(n)}\left\{-\frac{\sinh(\lambda_{1(n)}-m_{1(n)}x_1)}{2\sinh\lambda_{1(n)}}+\frac{\sin(\lambda_{1(n)}-m_{1(n)}x_1)}{2\sin\lambda_{1(n)}}\right\}\\
y_{x_2(n)} &= \frac{\omega_{(n)}}{2}\left\{\cos m_{2(n)}x_2+\left(\frac{\sin\frac{\lambda_{2(n)}}{2}}{\cos\frac{\lambda_{2(n)}}{2}}\right)\sin m_{2(n)}x_2-\cosh m_{2(n)}x_2+\left(\frac{\sinh\frac{\lambda_{2(n)}}{2}}{\cosh\frac{\lambda_{2(n)}}{2}}\right)\sinh m_{2(n)}x_2\right.\\
&= \omega_{(n)}\left[\left\{-\frac{\sinh(\lambda_{2(n)}-m_{2(n)}x_2)}{2\sinh\lambda_{2(n)}}+\frac{\sin(\lambda_{2(n)}-m_{2(n)}x_2)}{2\sin\lambda_{2(n)}}\right\}\right.\\
&\quad\left.+\left\{-\frac{\sinh(\lambda_{2(n)}-m_{2(n)}\bar{x}_2)}{2\sinh\lambda_{2(n)}}+\frac{\sin(\lambda_{2(n)}-m_{2(n)}\bar{x}_2}{2\sin\lambda_{2\ n)}}\right\}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (\text{III}\cdot 28\,\text{a, b})$$

なる解をうる。従って

$$\left.\begin{aligned}
p_{x_1(n)} &= -\frac{\sinh(\lambda_{1(n)}-m_{1(n)}x_1)}{2\sinh\lambda_{1(n)}}+\frac{\sin(\lambda_{1(n)}-m_{1(n)}x_1)}{2\sin\lambda_{1(n)}}={}_2r_{v_1(n)}\\
p_{x_2(n)} &= \left\{-\frac{\sinh(\lambda_{2(n)}-m_{2(n)}x_2)}{2\sinh\lambda_{2(n)}}+\frac{\sin(\lambda_{2(n)}-m_{2(n)}x_2)}{2\sin\lambda_{2(n)}}\right\}\\
&\quad+\left\{-\frac{\sinh(\lambda_{2(n)}-m_{2(n)}\bar{x}_2)}{2\sinh\lambda_{2(n)}}+\frac{\sin(\lambda_{2(n)}-m_{2(n)}\bar{x}_2)}{2\sin\lambda_{2(n)}}\right\}={}_2r_{v_2(n)}
\end{aligned}\right\} \quad (\text{III}\cdot 29\,\text{a, b})$$

$$\left.\begin{aligned}
{}_2M_{x_1(n)} &= \frac{1}{m^2_{1(n)}}\left\{\frac{\sinh(\lambda_{1(n)}-m_{1(n)}x_1)}{2\sinh\lambda_{1(n)}}+\frac{\sin(\lambda_{1(n)}-m_{1(n)}x_1)}{2\sin\lambda_{1(n)}}\right\}\\
{}_2M_{x_2(n)} &= \frac{1}{m^2_{2(n)}}\left[\left\{\frac{\sinh(\lambda_{2(n)}-m_{2(n)}x_2)}{2\sinh\lambda_{2(n)}}+\frac{\sin(\lambda_{2(n)}-m_{2(n)}x_2)}{2\sin\lambda_{2(n)}}\right\}\right.\\
&\quad\left.+\left\{\frac{\sinh(\lambda_{2(n)}-m_{2(n)}\bar{x}_2)}{2\sinh\lambda_{2(n)}}+\frac{\sin(\lambda_{2(n)}-m_{2(n)}\bar{x}_2)}{2\sin\lambda_{2(n)}}\right\}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (\text{III}\cdot 30\,\text{a, b})$$

となる。ここで，x_1，x_2 および $\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$ は図 III•1 のようにとる。

特に $l_1=l_2=l$,　$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，の場合には

$$\left.\begin{aligned}
y_{x_1(n)} &= \omega_{(n)}\left\{-\frac{\sinh(\lambda_{(n)}-m_{(n)}x_1)}{2\sinh\lambda_{(n)}}+\frac{\sin(\lambda_{(n)}-m_{(n)}x_1)}{2\sin\lambda_{(n)}}\right\}\\
y_{x_2(n)} &= \omega_{(n)}\left[\left\{-\frac{\sinh(\lambda_{(n)}-m_{(n)}x_2)}{2\sinh\lambda_{(n)}}+\frac{\sin(\lambda_{(n)}-m_{(n)}x_2)}{2\sin\lambda_{(n)}}\right\}\right.\\
&\quad\left.+\left\{-\frac{\sinh(\lambda_{(n)}-m_{(n)}\bar{x}_2)}{2\sinh\lambda_{(n)}}+\frac{\sin(\lambda_{(n)}-m_{(n)}\bar{x}_2)}{2\sin\lambda_{(n)}}\right\}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (\text{III}\cdot 31\,\text{a, b})$$

$$\left.\begin{aligned}
p_{x_1(n)} &= -\frac{\sinh(\lambda_{(n)}-m_{(n)}x_1)}{2\sinh\lambda_{(n)}}+\frac{\sin(\lambda_{(n)}-m_{(n)}x_1)}{2\sin\lambda_{(n)}}={}_2r_{v_1(n)}\\
p_{x_2(n)} &= \left\{-\frac{\sinh(\lambda_{(n)}-m_{(n)}x_2)}{2\sinh\lambda_{(n)}}+\frac{\sin(\lambda_{(n)}-m_{(n)}x_2)}{2\sin\lambda_{(n)}}\right\}\\
&\quad+\left\{-\frac{\sinh(\lambda_{(n)}-m_{(n)}\bar{x}_2)}{2\sinh\lambda_{(n)}}+\frac{\sin(\lambda_{(n)}-m_{(n)}\bar{x}_2)}{2\sin\lambda_{(n)}}\right\}={}_2r_{v_2(n)}
\end{aligned}\right\} \quad (\text{III}\cdot 32\,\text{a, b})$$

$$\left.\begin{aligned}
M_{x_1(n)} &= \frac{1}{m^2_{(n)}}\left\{\frac{\sinh(\lambda_{(n)}-m_{(n)}x_1)}{2\sinh\lambda_{(n)}}+\frac{\sin(\lambda_{(n)}-m_{(n)}x_1)}{2\sin\lambda_{(n)}}\right\}\\
M_{x_2(n)} &= \frac{1}{m^2_{(n)}}\left[\left\{\frac{\sinh(\lambda_{(n)}-m_{(n)}x_2)}{2\sinh\lambda_{(n)}}+\frac{\sin(\lambda_{(n)}-m_{(n)}x_2)}{2\sin\lambda_{(n)}}\right\}\right.\\
&\quad\left.+\left\{\frac{\sinh(\lambda_{(n)}-m_{(n)}\bar{x}_2)}{2\sinh\lambda_{(n)}}+\frac{\sin(\lambda_{(n)}-m_{(n)}\bar{x}_2)}{2\sin\lambda_{(n)}}\right\}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (\text{III}\cdot 33\,\text{a, b})$$

となる。そして個有値は，式(III•26)である。これらを図示すれば，図 III•7 a, b および図 III•8 a, b のとおりである。

2. 微分方程式の逆対称形の解と個有値

(1) 第一の解

$l_1=l_2=l_3=l$

の場合には前記とまったく同様な理論により，次のような解が存在する(図 III•3 a, b)。

$$\left.\begin{aligned}
y_{x_1(n)} &= \omega_{(n)}\sin\frac{n\pi x_1}{l},\\
y_{x_2(n)} &= -\omega_{(n)}\sin\frac{n\pi x_2}{l},\quad n=2,4,6,\cdots
\end{aligned}\right\} \quad (\text{III}\cdot 34\,\text{a, b})$$

従って

$$\left.\begin{aligned}
p_{x_1(n)} &= \sin\frac{n\pi x_1}{l},\\
p_{x_2(n)} &= -\sin\frac{n\pi x_2}{l},\quad n=2,4,6,\cdots
\end{aligned}\right\} \quad (\text{III}\cdot 35\,\text{a, b})$$

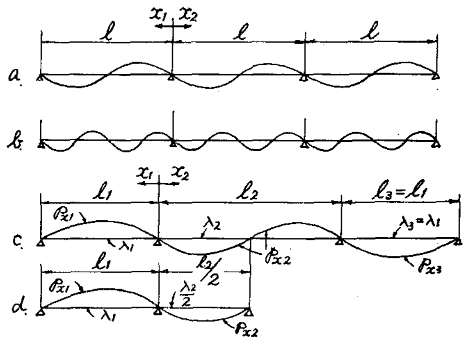

図 III·3 a-d

$$\left.\begin{aligned} {}_1M_{x_1(n)} &= \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \sin\frac{n\pi x_1}{l}, \\ {}_1M_{x_2(n)} &= -\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \sin\frac{n\pi x_2}{l}, \\ & \qquad n=2,4,6,\cdots \end{aligned}\right\} \quad \text{(III·36 a, b)}$$

となる。

これらを図示すれば，図 III·5 b, d および 図 III·6 b, d のとおりである。

(2)　第二の解

図 III·3 c のような 3 径間連続鋼床板は，図 III·3 d のような 2 径間連続鋼床板と同様であるから，次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} y_{x_1(n)} &= \omega_{(n)}\left\{-\frac{\sinh(\lambda_{1(n)}-m_{1(n)}x_1)}{2\sinh\lambda_{1(n)}}+\frac{\sin(\lambda_{1(n)}-m_{1(n)}x_1)}{2\sin\lambda_{1(n)}}\right\}, \\ y_{x_2(n)} &= \omega_{(n)}\left\{-\frac{\sinh\left(\frac{\lambda_{2(n)}}{2}-m_{2(n)}x_2\right)}{2\sinh\frac{\lambda_{2(n)}}{2}}+\frac{\sin\left(\frac{\lambda_{2(n)}}{2}-m_{2(n)}x_2\right)}{2\sin\frac{\lambda_{2(n)}}{2}}\right\}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(III·37 a, b)}$$

$$\left.\begin{aligned} p_{x_1(n)} &= -\frac{\sinh(\lambda_{1(n)}-m_{1(n)}x_1)}{2\sinh\lambda_{1(n)}}+\frac{\sin(\lambda_{1(n)}-m_{1(n)}x_1)}{2\sin\lambda_{1(n)}}, \\ p_{x_2(n)} &= -\frac{\sinh\left(\frac{\lambda_{2(n)}}{2}-m_{2(n)}x_2\right)}{2\sinh\frac{\lambda_{2(n)}}{2}}+\frac{\sin\left(\frac{\lambda_{2(n)}}{2}-m_{2(n)}x_2\right)}{2\sin\frac{\lambda_{2(n)}}{2}} \end{aligned}\right\} \quad \text{(III·38 a, b)}$$

$$\left.\begin{aligned} {}_2M_{x_1(n)} &= \frac{1}{m^2_{1(n)}}\left\{\frac{\sinh(\lambda_{1(n)}-m_{1(n)}x_1)}{2\sinh\lambda_{1(n)}}+\frac{\sin(\lambda_{1(n)}-m_{1(n)}x_1)}{2\sin\lambda_{1(n)}}\right\} \\ {}_2M_{x_2(n)} &= \frac{1}{m^2_{2(n)}}\left\{\frac{\sinh\left(\frac{\lambda_{2(n)}}{2}-m_{2(n)}x_2\right)}{2\sinh\frac{\lambda_{2(n)}}{2}}+\frac{\sin\left(\frac{\lambda_{2(n)}}{2}-m_{2(n)}x_2\right)}{2\sin\frac{\lambda_{2(n)}}{2}}\right\} \end{aligned}\right\} \quad \text{(III·39 a, b)}$$

ここで，式 (II·24) により次の条件がある。

$$\frac{\cos\lambda_1}{\sin\lambda_1}-\frac{\cosh\lambda_1}{\sinh\lambda_1}=-\left(\frac{\cos\frac{\lambda_2}{2}}{\sin\frac{\lambda_2}{2}}-\frac{\cosh\frac{\lambda_2}{2}}{\sinh\frac{\lambda_2}{2}}\right) \quad \text{(III·40)}$$

特に，$l_1=l_2=l_3=l$，　$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda$ の場合には，次式をうる。

$$\left.\begin{aligned} y_{x_1(n)} &= \omega_{(n)}\left\{-\frac{\sinh(\lambda_{(n)}-m_{(n)}x_1)}{2\sinh\lambda_{(n)}}+\frac{\sin(\lambda_{(n)}-m_{(n)}x_1)}{2\sin\lambda_{(n)}}\right\} \\ y_{x_2(n)} &= \omega_{(n)}\left\{-\frac{\sinh\left(\frac{\lambda_{(n)}}{2}-m_{(n)}x_2\right)}{2\sinh\frac{\lambda_{(n)}}{2}}+\frac{\sin\left(\frac{\lambda_{(n)}}{2}-m_{(n)}x_2\right)}{2\sin\frac{\lambda_{(n)}}{2}}\right\} \end{aligned}\right\} \quad \text{(III·41 a, b)}$$

$$\left.\begin{aligned} p_{x_1(n)} &= -\frac{\sinh(\lambda_{(n)}-m_{(n)}x_1)}{2\sinh\lambda_{(n)}}+\frac{\sin(\lambda_{(n)}-m_{(n)}x_1)}{2\sin\lambda_{(n)}}={}_2r_{v_1(n)} \\ p_{x_2(n)} &= -\frac{\sinh\left(\frac{\lambda_{(n)}}{2}-m_{(n)}x_2\right)}{2\sinh\frac{\lambda_{(n)}}{2}}+\frac{\sin\left(\frac{\lambda_{(n)}}{2}-m_{(n)}x_2\right)}{2\sin\frac{\lambda_{(n)}}{2}}={}_2r_{v_2(n)} \end{aligned}\right\} \quad \text{(III·42 a, b)}$$

$$\left.\begin{aligned} {}_2M_{x_1(n)} &= \frac{1}{m^2_{(n)}}\left\{\frac{\sinh(\lambda_{(n)}-m_{(n)}x_1)}{2\sinh\lambda_{(n)}}+\frac{\sin(\lambda_{(n)}-m_{(n)}x_1)}{2\sin\lambda_{(n)}}\right\} \\ {}_2M_{x_2(n)} &= \frac{1}{m^2_{(n)}}\left\{\frac{\sinh\left(\frac{\lambda_{(n)}}{2}-m_{(n)}x_2\right)}{2\sinh\frac{\lambda_{(n)}}{2}}+\frac{\sin\left(\frac{\lambda_{(n)}}{2}-m_{(n)}x_2\right)}{2\sin\frac{\lambda_{(n)}}{2}}\right\} \end{aligned}\right\} \quad \text{(III·43 a, b)}$$

ここで，式 (III·40) より次の条件が存在している。

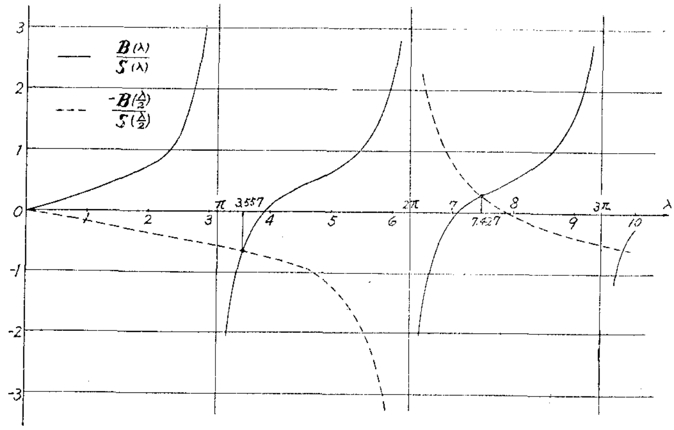

図 III・4

$$\frac{\cos\lambda}{\sin\lambda}-\frac{\cosh\lambda}{\sinh\lambda}=-\left(\frac{\cos\frac{\lambda}{2}}{\sin\frac{\lambda}{2}}-\frac{\cosh\frac{\lambda}{2}}{\sinh\frac{\lambda}{2}}\right) \qquad \text{(III・44)}$$

あるいは

$$\frac{\cos\lambda\cdot\sin\lambda-\sin\lambda\cdot\cosh\lambda}{\sin\lambda\cdot\sinh\lambda}=-\frac{\cos\frac{\lambda}{2}\sinh\frac{\lambda}{2}-\sin\frac{\lambda}{2}\cosh\frac{\lambda}{2}}{\sin\frac{\lambda}{2}\cdot\sinh\frac{\lambda}{2}} \qquad \text{(III・45)}$$

いま

$$\left.\begin{aligned}&\sin\lambda\cdot\sinh\lambda=S(\lambda)\\&\sin\lambda\cdot\cosh\lambda-\cos\lambda\cdot\sinh\lambda=\mathfrak{B}(\lambda)\\&\sin\frac{\lambda}{2}\sinh\frac{\lambda}{2}=S\left(\frac{\lambda}{2}\right)\\&\sin\frac{\lambda}{2}\cdot\cosh\frac{\lambda}{2}-\cos\frac{\lambda}{2}\sinh\frac{\lambda}{2}=\mathfrak{B}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\end{aligned}\right\} \qquad \text{(III・46 a, d)}$$

とおけば，式 (III・45) は

$$\frac{\mathfrak{B}(\lambda)}{S(\lambda)}=-\frac{\mathfrak{B}\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{S\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \qquad \text{(III・47)}$$

となる。

$S(\lambda)$ および $\mathfrak{B}(\lambda)$ の関数表は，文献[4]から引用することができ，式 (III・47) と図 III・4 より

$$\lambda_{(3)}=3.55674,\quad \lambda_{(4)}=7.427 \qquad \text{(III・48)}$$

なる個有値をうる。式 (III・48) の値を式 (III・42) および (III・43) に代入すれば図 III・7 c, d および図 III・8 c, d となる。

3. $\int p_x^2 dx$, μ の計算

(1) 対称形，逆対称形の第一の解

$l_1=l_2=l_3$ の場合である。

$$p_{x_1(n)}=\sin\frac{n\pi x_1}{l},\quad p_{x_2(n)}=-\sin\frac{n\pi x_2}{l},$$
$$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\cdots$$

$$p_{x_1(n)}^2=p_{x_2(n)}^2=\sin^2\frac{n\pi x}{l}$$

$$\int_0^l p_{x_1(n)}^2dx=\int_0^l p_{x_2(n)}^2dx=\int_0^l\sin^2\frac{n\pi x}{l}dx=\int_0^l\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{l}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{l}\right]_0^l=\frac{l}{2} \qquad \text{(III・49)}$$

$$\mu_{(n)}=\frac{1}{\int_0^{l_1}p_{x_1(n)}^2dx+\int_0^{l_2}p_{x_2(n)}^2dx+\int_0^{l_3}p_{x_3(x)}^2dx}=\frac{1}{3\int_0^l p_{x_1(n)}^2dx}=\frac{1}{\frac{3l}{2}}=\frac{2}{3l} \qquad \text{(III・50)}$$

(2) 対称形の第二の解

図 III・1 のような $l_1=l_3\neq l_2$ の場合である。

$$p_{x_1}=-\frac{\sinh(\lambda_1-m_1x_1)}{2\sinh\lambda_1}+\frac{\sin(\lambda_1-m_1x_1)}{2\sin\lambda_1}$$

$$\int_0^l p_x^2dx=\int_0^l\frac{\sinh^2(\lambda-mx)}{4\sinh^2\lambda}dx+\int_0^l\frac{\sin^2(\lambda-mx)}{4\sin^2\lambda}dx-\int_0^l\frac{\sinh(\lambda-mx)\cdot\sin(\lambda-mx)}{2\sinh\lambda\cdot\sin\lambda}dx=\frac{1}{8\sinh^2\lambda}\int_0^l\{\cosh2(\lambda-mx)-1\}dx+\frac{1}{4\sin^2\lambda}\int_0^l\sin^2(\lambda-mx)dx-\frac{1}{2\sinh\lambda\cdot\sin\lambda}\int_0^l\sinh(\lambda-mx)\times\sin(\lambda-mx)dx=\frac{1}{2\sinh^2\lambda}\left[\frac{\sinh2(\lambda-mx)}{-2m}-x\right]_0^l+\frac{1}{4\sin^2\lambda}\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{4m}\sin2(\lambda-mx)\right]_0^l-\frac{1}{2\sinh\lambda\cdot\sin\lambda}\left[\frac{1}{2m}\{\cos(\lambda-mx)\cdot\sinh(\lambda-mx)-\sin(\lambda-mx)\cosh(\lambda-mx)\}\right]_0^l=\frac{1}{8\sinh^2\lambda}\left(\frac{\sinh2\lambda}{2m}-l\right)+\frac{1}{4\sin^2\lambda}\left(\frac{l}{2}-\frac{\sin2\lambda}{4m}\right)-\frac{1}{2\sinh\lambda\cdot\sin\lambda}\left\{\frac{1}{2m}(-\cos\lambda\sinh\lambda+\sin\lambda\cosh\lambda)\right\}=\frac{2\sinh\lambda\cosh\lambda}{16m\sinh^2\lambda}-\frac{l}{8\sinh^2\lambda}+\frac{l}{8\sin^2\lambda}-\frac{2\sin\lambda\cos\lambda}{16m\sin^2\lambda}$$

$$+\frac{1}{4m}\left(\frac{\cos\lambda}{\sin\lambda}-\frac{\cosh\lambda}{\sinh\lambda}\right)=\frac{\cosh\lambda}{8m\sinh\lambda}-\frac{\cos\lambda}{8m\sin\lambda}-\frac{l}{8\sinh^2\lambda}+\frac{l}{8\sin^2\lambda}+\frac{1}{4m}\left(\frac{\cos\lambda}{\sin\lambda}-\frac{\cosh\lambda}{\sinh\lambda}\right)$$

$$=\frac{\cos\lambda}{8m\sin\lambda}-\frac{\cosh\lambda}{8m\sinh\lambda}-\frac{l}{8\sinh^2\lambda}+\frac{l}{8\sin\lambda^2}=\frac{l}{8}\left(\frac{\cos\lambda}{\lambda\sin\lambda}-\frac{\cosh\lambda}{\lambda\sinh\lambda}-\frac{1}{\sinh^2\lambda}+\frac{1}{\sin^2\lambda}\right).$$

$$\therefore\quad \int_0^{l_1}p_{x_1}^2\,dx=\frac{l_1}{8}\left(\frac{\cos\lambda_1}{\lambda_1\sin\lambda_1}-\frac{\cosh\lambda_1}{\lambda_1\sinh\lambda_1}-\frac{1}{\sinh^2\lambda_1}+\frac{1}{\sin^2\lambda_1}\right).\tag{III•51}$$

$$p_{x_2}=\left\{-\frac{\sinh(\lambda_2-m_2x_2)}{2\sinh\lambda_2}+\frac{\sin(\lambda_2-m_2x_2)}{2\sin\lambda_2}\right\}+\left\{-\frac{\sinh(\lambda_2-m_2\bar{x}_2)}{2\sinh\lambda_2}+\frac{\sin(\lambda_2-m_2\bar{x}_2)}{2\sin\lambda_2}\right\}\equiv\bar{x}\left(\lambda_2,\frac{x_2}{l_2}\right)+\bar{x}\left(\lambda_2,\frac{\bar{x}_2}{l_2}\right)$$

と便宜上記しておく。

$$p_{x_2}^2=\left\{\bar{x}\left(\lambda_2,\frac{x_2}{l_2}\right)\right\}^2+\left\{\bar{x}\left(\lambda_2,\frac{\bar{x}_2}{l_2}\right)\right\}^2+2\left\{\bar{x}\left(\lambda_2,\frac{x_2}{l_2}\right)\right\}\left\{\bar{x}\left(\lambda_2,\frac{\bar{x}_2}{l_2}\right)\right\},\tag{III•52}$$

式(III•51)より，式(III•52)の右辺の第一，第二項は

$$\int_0^l\left\{\bar{x}\left(\lambda,\frac{x}{l}\right)\right\}^2dx=\int_0^l\left\{\bar{x}\left(\lambda,\frac{\bar{x}}{l}\right)\right\}^2dx=\frac{l}{8}\left(\frac{\cos\lambda}{\lambda\sin\lambda}-\frac{\cosh\lambda}{\lambda\sinh\lambda}-\frac{1}{\sinh^2\lambda}+\frac{1}{\sin^2\lambda}\right).$$ となる。

また，式(III•52)の右辺の第三項は次のようになる。

$$\left\{\bar{x}\left(\lambda,\frac{x}{l}\right)\right\}\left\{\bar{x}\left(\lambda,\frac{\bar{x}}{l}\right)\right\}=\left\{-\frac{\sinh(\lambda-mx)}{2\sinh\lambda}+\frac{\sin(\lambda-mx)}{2\sin\lambda}\right\}\left\{-\frac{\sinh(\lambda-m\bar{x})}{2\sinh\lambda}+\frac{\sin(\lambda-m\bar{x})}{2\sin\lambda}\right\}$$

$$=\left\{-\frac{\sinh(\lambda-mx)}{2\sinh\lambda}+\frac{\sin(\lambda-mx)}{2\sin\lambda}\right\}\left[-\frac{\sinh\{\lambda-m(l-x)\}}{2\sinh\lambda}+\frac{\sin\{\lambda-m(l-x)\}}{2\sin\lambda}\right]$$

$$=\left\{-\frac{\sinh(\lambda-mx)}{2\sinh\lambda}+\frac{\sin(\lambda-mx)}{2\sin\lambda}\right\}\left\{-\frac{\sinh mx}{2\sinh\lambda}+\frac{\sin mx}{2\sin\lambda}\right\}=\frac{\sinh(\lambda-mx)\cdot\sinh mx}{4\sinh^2\lambda}$$

$$+\frac{\sin(\lambda-mx)\cdot\sin mx}{4\sin^2\lambda}-\frac{\sin(\lambda-mx)\cdot\sinh mx}{4\sin\lambda\cdot\sinh\lambda}-\frac{\sinh(\lambda-mx)\cdot\sin mx}{4\sin\lambda\cdot\sinh\lambda}$$

$$=\frac{1}{4\sinh^2\lambda}(\sinh\lambda\cdot\cosh mx\cdot\sinh mx-\cosh\lambda\cdot\sinh^2 mx)+\frac{1}{4\sin^2\lambda}(\sin\lambda\cdot\sin mx\cdot\cos mx$$

$$-\cos\lambda\cdot\sin^2 mx)-\frac{1}{4\sin\lambda\cdot\sinh\lambda}(\sin\lambda\cdot\cos mx\cdot\sinh mx-\cos\lambda\cdot\sin mx\cdot\sinh mx)$$

$$-\frac{1}{4\sin\lambda\cdot\sinh\lambda}(\sinh\lambda\cdot\cosh mx\cdot\sin mx-\cosh\lambda\cdot\sinh mx\cdot\sin mx).$$

ここで次の8個の積分公式を用いる。

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^l\cosh mx\cdot\sinh mx\,dx=\left[\frac{1}{2m}\cosh^2 mx\right]_0^l=\frac{1}{2m}\left(\cosh^2\lambda-1\right).\\
&\int_0^l\sinh^2 mx\,dx=\left[\frac{\sinh 2mx}{4m}-\frac{x}{2}\right]_0^l=\frac{1}{4m}\sinh 2\lambda-\frac{l}{2}.\\
&\int_0^l\sin mx\cdot\cos mx\,dx=\left[\frac{1}{2m}\sin^2 mx\right]_0^l=\frac{1}{2m}\sin^2\lambda.\\
&\int_0^l\sin^2 mx\,dx=\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{4m}\sin 2mx\right]_0^l=\frac{l}{2}-\frac{1}{4m}\sin 2\lambda.\\
&\int_0^l\cos mx\cdot\sinh mx\,dx=\left[\frac{1}{2m}\left(\sin mx\cdot\sinh mx+\cos mx\cdot\cosh mx\right)\right]_0^l=\frac{1}{2m}\left(\sin\lambda\cdot\sinh\lambda+\cos\lambda\cdot\cosh\lambda-1\right)\\
&\int_0^l\cosh mx\cdot\sin mx\,dx=\left[\frac{1}{2m}\left(\sin mx\cdot\sinh mx-\cos mx\cdot\cosh mx\right)\right]_0^l=\frac{1}{2m}\left(\sin\lambda\cdot\sinh\lambda-\cos\lambda\cdot\cosh\lambda+1\right)\\
&\int_0^l\cos mx\cdot\cosh mx\,dx=\left[\frac{1}{2m}\left(\sin mx\cdot\cosh mx+\cos mx\cdot\sinh mx\right)\right]_0^l=\frac{1}{2m}\left(\sin\lambda\cdot\cosh\lambda+\cos\lambda\cdot\sinh\lambda\right)\\
&\int_0^l\sin mx\cdot\sinh mx\,dx=\left[\frac{1}{2m}\left(\sin mx\cdot\cosh mx-\cos mx\cdot\sinh mx\right)\right]_0^l=\frac{1}{2m}\left(\sin\lambda\cdot\cosh\lambda-\cos\lambda\cdot\sinh\lambda\right)
\end{aligned}\right\}$$

$$\therefore\quad\int_0^l\left\{\bar{x}\left(\lambda,\frac{x}{l}\right)\right\}\left\{\bar{x}\left(\lambda,\frac{\bar{x}}{l}\right)\right\}dx=\frac{1}{4\sinh^2\lambda}\left\{\frac{\sinh\lambda}{2m}(\cosh^2\lambda-1)-\cosh\lambda\left(\frac{1}{4m}\sinh 2\lambda-\frac{l}{2}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{4\sin^2\lambda}\left\{\frac{\sin\lambda}{2m}\sin^2\lambda-\cos\lambda\left(\frac{l}{2}-\frac{1}{4m}\sin 2\lambda\right)\right\}-\frac{1}{4\sin\lambda\cdot\sinh\lambda}\left\{\frac{\sin\lambda}{2m}(\sin\lambda\cdot\sinh\lambda\right.$$

$$\left.+\cos\lambda\cdot\cosh\lambda-1)-\frac{\cos\lambda}{2m}(\sin\lambda\cosh\lambda-\cos\lambda\cdot\sinh\lambda)\right\}-\frac{1}{4\sin\lambda\cdot\sinh\lambda}\left\{\frac{\sinh\lambda}{2m}\right.$$

$$\left.\times(\sin\lambda\cdot\sinh\lambda-\cos\lambda\cdot\cosh\lambda+1)-\frac{\cosh\lambda}{2m}(\sin\lambda\cosh\lambda-\cos\lambda\sinh\lambda)\right\}=\frac{1}{4\sinh^2\lambda}\left(\frac{-\sinh\lambda}{2m}+\frac{l}{2}\cosh\lambda\right)$$

$$+\frac{1}{4\sin^2\lambda}\left(\frac{\sin\lambda}{2m}-\frac{l}{2}\cos\lambda\right)-\frac{1}{4\sin\lambda\cdot\sinh\lambda}\left(\frac{\sinh\lambda}{m}-\frac{\sin\lambda}{m}\right)=\frac{1}{8m\sinh\lambda}-\frac{1}{8m\sin\lambda}$$

$$+\frac{l}{8}\left(\frac{\operatorname{cssh}\lambda}{\sinh^2\lambda}-\frac{\cos\lambda}{\sin^2\lambda}\right)=\frac{l}{8\lambda}\left(\frac{1}{\sinh\lambda}-\frac{1}{\sin\lambda}\right)+\frac{l}{8}\left(\frac{\cosh\lambda}{\sinh^2\lambda}-\frac{\cos\lambda}{\sin^2\lambda}\right)$$

$$\therefore\ \int_0^{l_2}p_{x_2}^2\,dx=2\left\{\frac{l_2}{8}\left(\frac{\cos\lambda_2}{\lambda_2\sin\lambda_2}-\frac{\cosh\lambda_2}{\lambda_2\sinh\lambda_2}-\frac{1}{\sinh^2\lambda_2}+\frac{1}{\sin^2\lambda_2}\right)+\frac{l_2}{8\lambda_2}\left(\frac{1}{\sinh\lambda_2}-\frac{1}{\sin^2\lambda_2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{l_2}{8}\left(\frac{\cosh\lambda_2}{\sinh^2\lambda_2}-\frac{\cos\lambda_2}{\sin^2\lambda_2}\right)\right\}=\frac{l_2}{4}\left(\frac{\cos\lambda_2-1}{\lambda_2\sin\lambda_2}-\frac{\cosh\lambda_2-1}{\lambda_2\sinh\lambda_2}+\frac{\cosh\lambda_2-1}{\sinh^2\lambda_2}-\frac{\cos\lambda_2-1}{\sin^2\lambda_2}\right)\tag{III・53}$$

式(III・51)と(III・53)より

$$\mu_{(n)}=\frac{1}{2\int_0^{l_1}p_{x_1(n)}^2\,dx+\int_0^{l_2}p_{x_2(n)}^0\,dx}=\left\{\frac{l_1}{4}\left(\frac{\cos\lambda_{1(n)}}{\lambda_{1(n)}\sin\lambda_{1(n)}}-\frac{\cosh\lambda_{1(n)}}{\lambda_{1(n)}\sinh\lambda_{1(n)}}-\frac{1}{\sinh^2\lambda_{1(n)}}+\frac{1}{\sin^2\lambda_{1(n)}}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{l_2}{4}\left(\frac{\cos\lambda_{2(n)}-1}{\lambda_{2(n)}\sin\lambda_{2(n)}}-\frac{\cosh\lambda_{2(n)}-1}{\lambda_{2(n)}\sinh\lambda_{2(n)}}+\frac{\cosh\lambda_{2(n)}-1}{\sinh^2\lambda_{2(n)}}-\frac{\cos\lambda_{2(n)}-1}{\sin^2\lambda_{2(n)}}\right)\right\}^{-1}\tag{III・54}$$

特に $l_1=l_2=l_3=l$, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda$ の場合は次のようになる

$$\mu_{(n)}=\left\{\frac{l}{4}\left(\frac{2\cos\lambda_{(n)}-1}{\lambda_{(n)}\sin\lambda_{(n)}}-\frac{2\cosh\lambda_{(n)}-1}{\lambda_{(n)}\sinh\lambda_{(n)}}+\frac{\cosh\lambda_{(n)}-2}{\sinh^2\lambda_{(n)}}-\frac{\cos\lambda_{(n)}-2}{\sin^2\lambda_{(n)}}\right\}^{-1}.\tag{III・55}$$

このとき図III・2により, $\lambda_{(1)}=4.3$, $\lambda_{(2)}=6.7$ であったから

$$\int_0^{l_1}p_{x_1(1)}^2\,dx=\frac{l_1}{8}\left(\frac{\cos\lambda_{1(1)}}{\lambda_{1(1)}\sin\lambda_{1(1)}}-\frac{\cosh\lambda_{1(1)}}{\lambda_{1(1)}\sinh\lambda_{1(1)}}-\frac{1}{\sinh^2\lambda_{1(1)}}+\frac{1}{\sin^2\lambda_{1(1)}}\right)$$

$$=\frac{l_1}{8}\left(\frac{\cos 4.3}{4.3\sin 4.3}-\frac{\cosh 4.3}{4.3\sinh 4.3}-\frac{1}{\sinh^2 4.3}+\frac{1}{\sin^2 4.3}\right)$$

$$=\frac{l_1}{8}\left\{\frac{-0.4}{4.3(-0.9179)}-\frac{28.139}{4.3\times 36.843}-\frac{1}{36.843^2}+\frac{1}{(-0.9179)^2}\right\}=\frac{l_1}{8}\times 1.1099=l_1\times 0.1387\tag{III・56}$$

$$\int_0^{l_2}p_{x2(1)}^2\,dx=\frac{l_2}{4}\left(\frac{\cos\lambda_{2(1)}-1}{\lambda_{2(1)}\sin\lambda_{2(1)}}-\frac{\cosh\lambda_{2(1)}-1}{\lambda_{2(1)}\sinh\lambda_{2(1)}}+\frac{\cosh\lambda_{2(1)}-1}{\sinh^2\lambda_{2(1)}}-\frac{\cos\lambda_{2(1)}-1}{\sin^2\lambda_{2(1)}}\right)$$

$$=\frac{l_2}{4}\left(\frac{\cos 4.3-1}{4.3\sin 4.3}-\frac{\cosh 4.3-1}{4.3\sinh 4.3}+\frac{\cosh 4.3-1}{\sinh^2 4.3}-\frac{\cos 4.3-1}{\sin^2 4.3}\right)$$

$$=\frac{l_2}{4}\left\{\frac{-0.400-1}{4.3(-0.9179)}-\frac{28.139-1}{4.3\times 36.843}+\frac{28.139-1}{36.843^2}-\frac{-0.400-1}{(-0.9179)^2}\right\}=\frac{l_2}{4}\times 1.8650=l_2\times 0.4662\tag{III・57}$$

$$\therefore\ \mu_{(1)}=\frac{1}{\int_0^{l_1}p_{x_1(1)}^2\,dx+\int_0^{l_2}p_{x_2(1)}^2\,dx+\int_0^{l_3}p_{x_3(1)}^2\,dx}=\frac{1}{2\int_0^{l_1}p_{x_1(1)}^2\,dx+\int_0^{l_2}p_{x_2(1)}^2\,dx}$$

$$=\frac{1}{2\times 0.1387\,l_1+0.4662\,l_2}\tag{III・58}$$

$$\int_0^{l_1}p_{x_1(2)}^2\,dx=\frac{l_1}{8}\left(\frac{\cos\lambda_{1(2)}}{\lambda_{1(2)}\sin\lambda_{1(2)}}-\frac{\cosh\lambda_{1(2)}}{\lambda_{1(2)}\sinh\lambda_{1(2)}}-\frac{1}{\sinh^2\lambda_{1(2)}}+\frac{1}{\sin^2\lambda_{1(2)}}\right)$$

$$=\frac{l_1}{8}\left(\frac{\cos 6.7}{6.7\sin 6.7}-\frac{\cosh 6.7}{6.7\sinh 6.7}-\frac{1}{\sinh^2 6.7}+\frac{1}{\sin^2 6.7}\right)$$

$$=\frac{l_1}{8}\left(\frac{0.9143}{6.7\times 0.4050}-\frac{1}{6.7}+\frac{1}{0.1640}\right)=\frac{l_1}{8}\times 6.2842=l_1\times 0.7855\tag{III・59}$$

$$\int_0^{l_2}p_{x_2(2)}^2\,dx=\frac{l_2}{4}\left(\frac{\cos\lambda_{2(2)}-1}{\lambda_{2(2)}\sin\lambda_{2(2)}}-\frac{\cosh\lambda_{2(2)}-1}{\lambda_{2(2)}\sinh\lambda_{2(2)}}+\frac{\cosh\lambda_{2(2)}-1}{\sinh^2\lambda_{2(2)}}-\frac{\cos\lambda_{2(2)}-1}{\sin^2\lambda_{2(2)}}\right)$$

$$=\frac{l_2}{4}\left(\frac{\cos 6.7-1}{6.7\sin 6.7}-\frac{\cosh 6.7-1}{6.7\sinh 6.7}+\frac{\cosh 6.7-1}{\sinh^2 6.7}-\frac{\cos 6.7-1}{\sin^2 6.7}\right)$$

$$=\frac{l_2}{4}\left(\frac{0.9143-1}{6.7\times 0.4050}-\frac{1}{6.7}+\frac{1}{400}-\frac{0.9143-1}{0.1640}\right)=\frac{l_2}{4}\times 0.3441=l_2\times 0.0860\tag{III・60}$$

$$\therefore\ \mu_{(2)}=\frac{1}{\int_0^{l_1}p_{x_1(2)}^2\,dx+\int_0^{l_2}p_{x_2(2)}^2\,dx+\int_0^{l_3}p_{x_3(2)}^2\,dx}=\frac{1}{2\int_0^{l_1}p_{x_1(2)}^2\,dx+\int_0^{l_2}p_{x_2(2)}^2\,dx}$$

$$=\frac{1}{2\times 0.7855\,l_1+0.0860\,l_2}\tag{III・61}$$

(3) 逆対称形の第二の解

図 III･3 d のような $l_1=l_3\neq l_2$ の場合である。

$$\left.\begin{aligned}
p_{x_1}&=-\frac{\sinh(\lambda_1-m_1x_1)}{2\sinh\lambda}+\frac{\sin(\lambda-m_1x_1)}{2\sin\lambda_1},\\
p_{x_2}&=-\frac{\sinh\left(\frac{\lambda_2}{2}-m_2x_2\right)}{2\sinh\frac{\lambda_2}{2}}+\frac{\sin\left(\frac{\lambda_2}{2}-m_2x_2\right)}{2\sin\frac{\lambda_2}{2}}
\end{aligned}\right\}$$

式 (III･51) より次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^{l_1}p_{x_1}^2\,dx&=\frac{l_1}{8}\left(\frac{\cos\lambda_1}{\lambda_1\sin\lambda_1}-\frac{\cosh\lambda_1}{\lambda_1\sinh\lambda_1}-\frac{1}{\sinh^2\lambda_1}+\frac{1}{\sin^2\lambda_1}\right),\\
\int_0^{\frac{l_2}{2}}p_{x_2}^2\,dx&=\frac{\frac{l_2}{2}}{8}\left(\frac{\cos\frac{\lambda_2}{2}}{\frac{\lambda_2}{2}\sin\frac{\lambda_2}{2}}-\frac{\cosh\frac{\lambda_2}{2}}{\frac{\lambda_2}{2}\sinh\frac{\lambda_2}{2}}-\frac{1}{\sinh^2\frac{\lambda_2}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{\lambda_2}{2}}\right)
\end{aligned}\right\}$$

$$\therefore\quad \mu_{(n)}=\frac{1}{2\left\{\int_0^{l_1}p_{x_1(n)}^2\,dx+\int_0^{\frac{l_2}{2}}p_{x_2(n)}^2\,dx\right\}}=\left[\frac{l_1}{8}\left(\frac{\cos\lambda_{1(n)}}{\lambda_{1(n)}\sin\lambda_{1(n)}}-\frac{\cosh\lambda_{1(n)}}{\lambda_{1(n)}\sinh\lambda_{1(n)}}-\frac{1}{\sinh^2\lambda_{1(n)}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\sin^2\lambda_{1(n)}}\right)+\frac{l_2}{16}\left(\frac{\cos\frac{\lambda^2{}_{(n)}}{2}}{\frac{\lambda_{2(n)}}{2}\sin\frac{\lambda_{2(n)}}{2}}-\frac{\cosh\frac{\lambda_{2(n)}}{2}}{\frac{\lambda_{2(n)}}{2}\sinh\frac{\lambda_{2(n)}}{2}}-\frac{1}{\sinh^2\frac{\lambda_{2(n)}}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{\lambda_{2(n)}}{2}}\right)\right]^{-1}\tag{III･62}$$

特に $l_1=l_2=l_3=l$ の場合には次のようになる。

$$\mu_{(n)}=\left[\frac{l}{8}\left\{\left(\frac{\cos\lambda_{(n)}}{\lambda_{(n)}\sin\lambda_{(n)}}-\frac{\cosh\lambda_{(n)}}{\lambda_{(n)}\sinh\lambda_{(n)}}-\frac{1}{\sinh^2\lambda_{(n)}}+\frac{1}{\sin^2\lambda_{(n)}}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\cos\frac{\lambda_{(n)}}{2}}{\lambda_{(n)}\sin\frac{\lambda_{(n)}}{2}}-\frac{\cosh\frac{\lambda_{(n)}}{2}}{\lambda_{(n)}\sinh\frac{\lambda_{(n)}}{2}}-\frac{1}{2\sinh^2\frac{\lambda_{(n)}}{2}}+\frac{1}{2\sin^2\frac{\lambda_{(n)}}{2}}\right)\right\}\right]^{-1}\tag{III･63}$$

このときは，図 III･4 より $\lambda_{(3)}=3.557$，$\lambda_{(4)}=7.427$ であったから，

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{l_2}{2}}p_{x_2(3)}^2\,dx&=\frac{\frac{l_2}{2}}{8}\left(\frac{\cos\frac{\lambda_{2(3)}}{2}}{\frac{\lambda_{2(3)}}{2}\sin\frac{\lambda_{2(3)}}{2}}-\frac{\cosh\frac{\lambda_{2(3)}}{2}}{\frac{\lambda_{2(3)}}{2}\sinh\frac{\lambda_{2(3)}}{2}}-\frac{1}{\sinh^2\frac{\lambda_{2(3)}}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{\lambda_{2(3)}}{2}}\right)\\
&=\frac{\frac{l_2}{2}}{8}\left(\frac{-0.2079}{1.778\times0.9781}-\frac{3.0493}{1.778\times2.8806}-\frac{1}{2.8806^2}+\frac{1}{0.9781^2}\right)=\frac{\frac{l_2}{2}}{8}\times0.2106=\frac{l_2}{2}\times0.0263
\end{aligned}\tag{III･64}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{l_1}p_{x_1(3)}^2\,dx&=\frac{l_1}{8}\left(\frac{\cos\lambda_{1(3)}}{\lambda_{1(3)}\sin\lambda_{1(3)}}-\frac{\cosh\lambda_{1(3)}}{\lambda_{1(3)}\sinh\lambda_{1(3)}}-\frac{1}{\sinh^2\lambda_{1(3)}}+\frac{1}{\sin^2\lambda_{1(3)}}\right)\\
&=\frac{l_1}{8}\left(\frac{\cos3.557}{3.557\sin3.557}-\frac{\cosh3.557}{3.557\sinh3.557}-\frac{1}{\sinh^2 3.557}+\frac{1}{\sin^2 3.557}\right)\\
&=\frac{l_1}{8}\left\{\frac{-0.9135}{3.557(-0.4067)}-\frac{17.421}{3.557\times17.567}-\frac{1}{17.567^2}+\frac{1}{(-0.4067)^2}\right\}=\frac{l_1}{8}\times6.3957=l_1\times0.7994
\end{aligned}\tag{III･65}$$

$$\therefore\quad \mu_{(3)}=\frac{1}{2\left\{\int_0^{l_1}p_{x_1(3)}^2\,dx+\int_0^{\frac{l_2}{2}}p_{x_2(3)}^2\,dx\right\}}=\frac{1}{2\left(0.7994\,l_1+0.0263\times\frac{l_2}{2}\right)}\tag{III･66}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{l_1}p_{x_1(4)}^2\,dx&=\frac{l_1}{8}\left(\frac{\cos\lambda_{1(4)}}{\lambda_{1(4)}\sin\lambda_{1(4)}}-\frac{\cosh\lambda_{1(4)}}{\lambda_{1(4)}\sinh\lambda_{1(4)}}-\frac{1}{\sinh^2\lambda_{1(4)}}+\frac{1}{\sin^2\lambda_{1(4)}}\right)\\
&\frac{l_1}{8}\left(\frac{\cos7.427}{7.427\times\sin7.427}-\frac{\cosh7.427}{7.427\sinh7.427}-\frac{1}{\sinh^2 7.427}+\frac{1}{\sin^2 7.427}\right)\\
&=\frac{l_1}{8}\left(\frac{0.4384}{7.427\times0.8988}-\frac{1}{7.4}+\frac{1}{0.8988^2}\right)=\frac{l_1}{8}\times1.1686=l_1\times0.1461
\end{aligned}\tag{III･67}$$

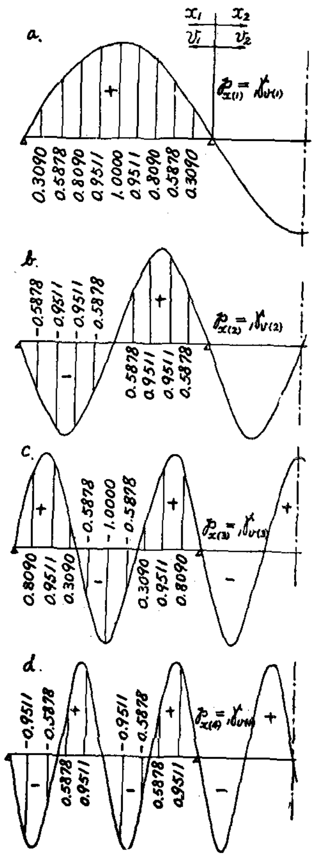

図 III•5 a–d

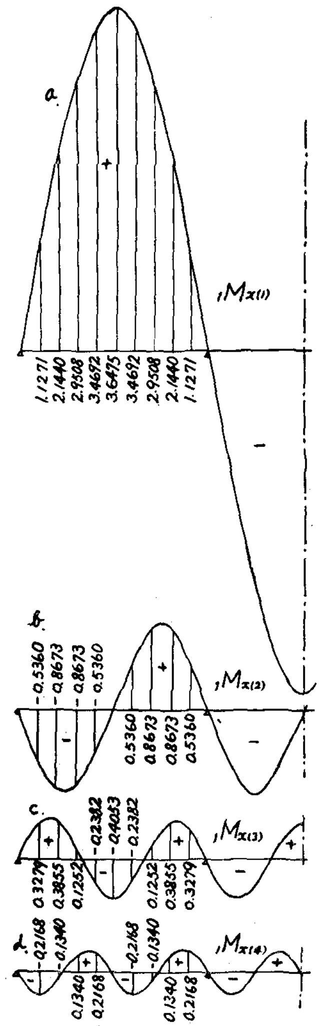

図 III•6 a–d

$$\int_0^{\frac{l_2}{2}} p^2_{x_2(4)}\,dx = \frac{\frac{l_2}{2}}{8}\left(\frac{\cos\frac{\lambda_{2(4)}}{2}}{\frac{\lambda_{2(4)}}{2}\sin\frac{\lambda_{2(4)}}{2}} - \frac{\cosh\frac{\lambda_{2(4)}}{2}}{\frac{\lambda_{2(4)}}{2}\sinh\frac{\lambda_{2(4)}}{2}} - \frac{1}{\sinh^2\frac{\lambda_{2(4)}}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{\lambda_{2(4)}}{2}}\right)$$

$$= \frac{\frac{l_2}{2}}{8}\left(\frac{\cos 3.713}{3.713\times\sin 3.713} - \frac{\cosh 3.713}{3.713\sinh 3.713} - \frac{1}{\sinh^2 3.713} + \frac{1}{\sin^2 3.713}\right)$$

$$= \frac{\frac{l_2}{2}}{8}\left\{\frac{-0.8480}{3.713(-0.5299)} - \frac{20.236}{3.713\times 20.211} - \frac{1}{408.4845} + \frac{1}{0.2808}\right\} = \frac{\frac{l_2}{2}}{8}\times 3.7207 = \frac{l_2}{2}\times 0.4651 \qquad \text{(III•68)}$$

$$\therefore\quad \mu_{(4)} = \frac{1}{2\left\{\int_0^{l_1} p^2_{x_1(4)}\,dx + \int_0^{\frac{l_2}{2}} p^2_{x_2(4)}\,dx\right\}} = \frac{1}{2\left(0.1461\,l_1 + 0.4651\times\frac{l_2}{2}\right)} \qquad \text{(III•69)}$$

4. 曲げ格子剛度 $z_{(n)}$ の計算

図 III•9 のような横リブ，縦リブをもつ鋼床板を考える。

$$z = \left(\frac{l}{2a}\right)^3\frac{I_Q}{bI},\quad z_{(n)} = \frac{48EI_Q}{(2a)^3}\,\omega_{(n)} = \frac{48EI_Q}{(2a)^3}\,\frac{1}{m^4_{(n)}EI}$$

$$\therefore\quad z_{(n)} = \frac{48}{m^4_{(n)}l^3}\,z = \frac{48\,l}{m^4_{(n)}l^4}\,z = \frac{48\,l}{\lambda^4_{(n)}}\,z \qquad \text{(III•70)}$$

$$z_{(n)} = \frac{48\,l}{\lambda^4_{(n)}}\,z = \frac{48\,l}{\lambda^4_{(n)}}\left(\frac{l}{2a}\right)^3\frac{I_Q}{bI} = \frac{6\,l^4}{\lambda^4_{(n)}a^3}\,\frac{I_Q}{bI}$$

$$= \frac{6\,l^4}{\lambda^4_{(n)}a^4}\,\frac{aI_Q}{bI} = \frac{6\,l^4}{\lambda^4_{(n)}a^4}\,\frac{\bar{I}_Q}{\bar{I}} \qquad \text{(III•71)}$$

$\bar{I}_Q = \dfrac{2580}{0.3}$,　$\bar{I} = \dfrac{139600}{2.0}$　　式 (III•71) より

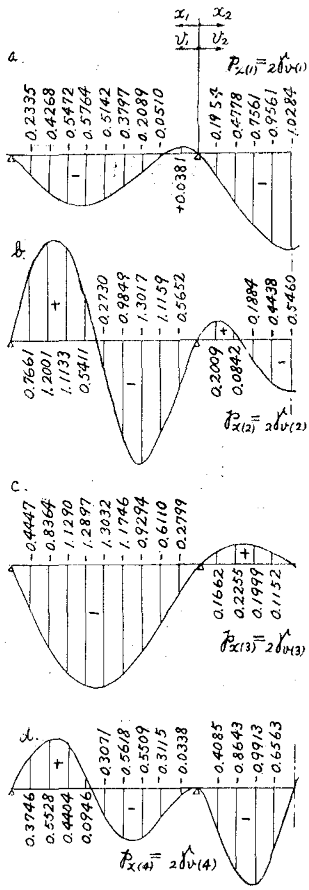

図 **III·7 a–d**

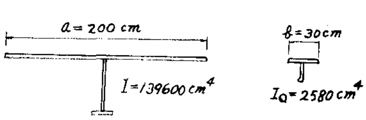

図 **III·9**

$$z_{(n)}=\frac{6\times6^4}{\lambda^4_{(n)}\times2^4}\times\frac{2580\times2.0}{0.3\times139600}=\frac{60.25}{\lambda^4_{(n)}} \qquad \text{(III·72)}$$

(1) 第一の解

$\lambda_{(1)}=\pi,\ \lambda_{(2)}=2\pi,\ \lambda_{(3)}=3\pi,\ \lambda_{(4)}=4\pi$

であったから

$$z_{(1)}=\frac{60.25}{\lambda^4_{(1)}}=\frac{60.25}{\pi^4}=0.625,$$

$$z_{(2)}=\frac{60.25}{\lambda^4_{(2)}}=\frac{60.25}{(2\pi)^4}=0.039,$$

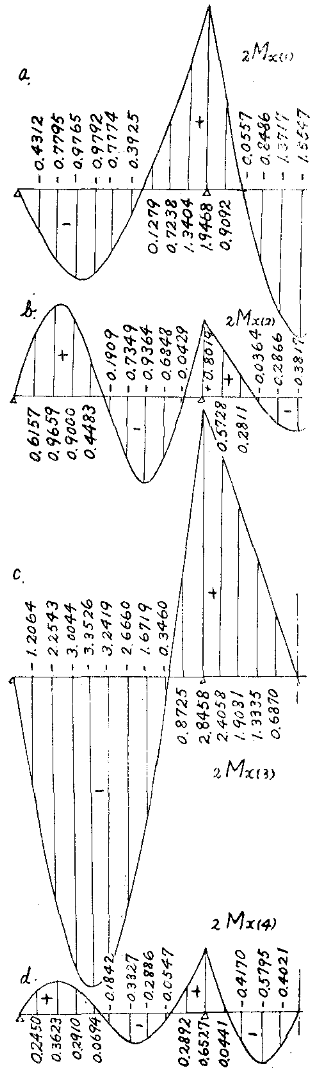

図 **III·8 a–d**

$$z_{(3)}=\frac{60.25}{\lambda^4_{(3)}}=\frac{60.25}{(3\pi)^4}=0.008,$$

$$z_{(4)}=\frac{60.25}{\lambda^4_{(4)}}=\frac{60.25}{(4\pi)^4}=0.002.$$

(2) 第二の解

$\lambda_{(1)}=4.3,\ \lambda_{(2)}=6.7,\ \lambda_{(3)}=3.557,\ \lambda_{(4)}=7.427$

であっから

$$z_{(1)}=\frac{60.25}{\lambda^4_{(1)}}=\frac{60.25}{4.3^4}=0.176,$$

$$z_{(2)}=\frac{60.25}{\lambda^4_{(2)}}=\frac{60.25}{6.7^4}=0.030,$$

$$z_{(3)}=\frac{60.25}{\lambda^4_{(3)}}=\frac{60.25}{3.557^4}=0.375,$$

$$z_{(4)}=\frac{60.25}{\lambda^4_{(4)}}=\frac{60.25}{7.427^4}=0.020.$$

5. 弾性沈下可能の無限数支点をもつ連続桁の支点反力 B_{ik} と曲げモーメント $\dfrac{M_{ik}}{a}$

すべての支点が同一バネ常数をもつ場合には，支点反力の間に次の関係がある。

$$\left.\begin{array}{l} B_{ik}=B_{ki},\ C_{ik}=C_{ki},\ \sum B_{ik}=1, \\ \sum C_{ik}=0,\ B_{ik}=C_{ik}\quad i\neq k, \\ C_{ii}=B_{ii}-1 \end{array}\right\} \quad \text{(III・73 a–f)}$$

B_{ik} および $\dfrac{M_{ik}}{a}$ の値は，文献[3]の頁149より直接拾うことができる。すなわち，次のようになる。

(1) 第一の解

表-III・1

$z_{(n)}$	C_{aa}	C_{ab}	C_{ac}	M_{aa}/a	M_{ab}/a	M_{ac}/a
$z_{(1)}=0.625$	-0.394	+0.228	-0.009	+0.144	-0.053	-0.022
$z_{(2)}=0.039$	-0.074	+0.053	-0.019	+0.023	-0.014	+0.002
$z_{(3)}=0.008$	-0.020	+0.015	-0.006	+0.006	+0.001	0.000

(2) 第二の解

表-III・2

$z_{(n)}$	C_{aa}	C_{ab}	C_{ac}	M_{aa}/a	M_{ab}/a	M_{ac}/a
$z_{(1)}=0.176$	-0.223	+0.149	-0.035	+0.074	-0.038	+0.000
$z_{(2)}=0.030$	-0.057	+0.041	-0.014	+0.018	-0.011	+0.002
$z_{(3)}=0.375$	-0.324	+0.200	-0.026	+0.089	-0.046	-0.007
$z_{(4)}=0.020$	-0.038	+0.027	-0.010	+0.012	-0.001	+0.001

6. 鋼床板の横リブ中央 $\left(x_2=\dfrac{l_2}{2}\right)$ の曲げモーメント影響面の計算 (図 III・10)

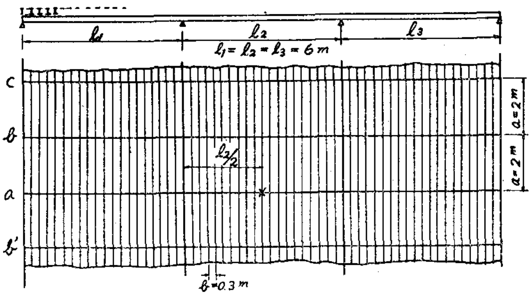

図 III・10

横リブ中央 $\left(x_2=\dfrac{l_2}{2}\right)$ の曲げモーメント影響面は式(I・11)により次式より求まる。

$$M_{a\frac{l_2}{2},kv}=M^0_{a\frac{l_2}{2},av}+\sum\mu_{(n)}M_{\frac{l_2}{2}(n)}\gamma_{(v)n}C_{ak(n)}$$

$$m_{a\frac{l_2}{2},kv}=\frac{M_{a\frac{l_2}{2},kv}}{a}=\frac{1}{a}$$
$$\times\left\{M^0_{a\frac{l_2}{2},av}+\sum\mu_{(n)}M_{\frac{l_2}{2}(n)}\gamma_{v(n)}C_{ak(n)}\right\}$$

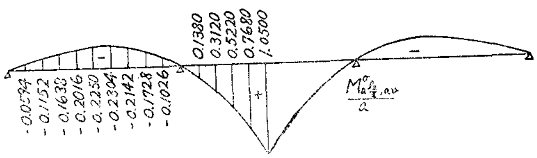

図 III・11

ここで $M^0_{a\frac{l_2}{2},av}$ は横桁のない3径間連続桁の影響線であり文献[5]より直接図 III・11 のように求まる。

図 III・11, III・6, III・8 および 表 III・1, III・2 より，次式をうる。

$$m_{a\frac{l_2}{2},av}=\frac{1}{a}\left\{M^0_{a\frac{l_2}{2},av}+\sum\mu_{(n)}M_{\frac{l_2}{2}(n)}\gamma_{v(n)}C_{aa(n)}\right\}$$

$$=\frac{1}{a}\left[M^0_{a\frac{l_2}{2},av}+\left\{\frac{1}{9}(-3.6475)\,{}_1\gamma_{v(1)}(-0.394)+\frac{1}{9}\times 0.405\,{}_1\gamma_{v(3)}(-0.020)\right\}\right.$$
$$\left.+\left\{0.2241\times(-1.5547)\,{}_2\gamma_{v(1)}(-0.223)+0.1006(-0.3817)\,{}_2\gamma_{v(2)}(-0.057)\right\}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left\{M^0_{a\frac{l_2}{2},av}+\left\{0.1597\,{}_1\gamma_{v(1)}-0.009\,{}_1\gamma_{v(3)}\right\}+\left\{0.0078\,{}_2\gamma_{v(1)}+0.0022\,{}_2\gamma_{v(2)}\right\}\right]$$

$$m_{a\frac{l_2}{2},bv}=\frac{1}{a}\sum\mu_{(n)}M_{\frac{l_2}{2}(n)}\gamma_{v(n)}C_{ab(n)}=\frac{1}{a}\left[\left\{\frac{1}{9}\times(-3.6475)\,{}_1\gamma_{v(1)}\times 0.228+\frac{1}{9}\times 0.4053\,{}_1\gamma_{v(3)}\times 0.015\right\}\right.$$
$$\left.+\left\{0.2241(-1.5547)\,{}_2\gamma_{v(1)}\times 0.149+0.1006(-0.3817)\,{}_2\gamma_{v(2)}\,0.041\right\}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left\{-0.0924\,{}_1\gamma_{v(1)}+0.007\,{}_1\gamma_{v(3)}\right\}+\left\{-0.0519\,{}_2\gamma_{v(1)}-0.0016\,{}_2\gamma_{v(2)}\right\}\right]$$

$$m_{a\frac{l_2}{2},cv}=\frac{1}{a}\sum\mu_{(n)}M_{\frac{l_2}{2}(n)}\gamma_{v(n)}C_{ac(n)}=\frac{1}{a}\left[\left\{\frac{1}{9}(-3.6475)\,{}_1\gamma_{v(1)}(-0.009)+\frac{1}{9}\times 0.4053\,{}_1\gamma_{v(1)}(-0.006)\right\}\right.$$
$$\left.+\left\{0.2241(-1.5547)\,{}_2\gamma_{v(1)}(-0.035)+0.1006(-0.3817)\,{}_2\gamma_{v(2)}(-0.014)\right\}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left\{0.0036\,{}_1\gamma_{v(1)}-0.0003\,{}_1\gamma_{v(3)}\right\}+\left\{0.0122\,{}_2\gamma_{v(1)}+0.0005\,{}_2\gamma_{v(2)}\right\}\right]$$

これに図 III・5, III・7 の γ_v の縦距の各値を代入して計算すれば，横リブの曲げモーメント影響面 $m_{a\frac{l_2}{2},kv}$ として，図 III・12 をうる。

7. 鋼床板の横リブ中央位置 $\left(x_2=\frac{l_2}{2}\right)$ における縦リブの曲げモーメント影響面の計算 (図 III·10)

横リブ中央位置 $\left(x_2=\frac{l_2}{2}\right)$ における縦リブの曲げモーメント影響面は，式 (I·18) により次式より求まる。

$$M_{\frac{l_2}{2}a,vk}=b\sum\mu_{(n)}p_{\frac{l_2}{2}(n)}r_{v(n)}M_{ak(n)}\quad m_{\frac{l_2}{2}a,vk}=\frac{M_{\frac{l_2}{2}a,vk}}{b}=\frac{b}{b}\sum\mu_{(n)}p_{\frac{l_2}{2}(n)}r_{v(n)}M_{ak(n)}=a\sum\mu_{(n)}p_{\frac{l_2}{2}(n)}r_{v(n)}\frac{M_{ak(n)}}{a}.$$

図 III·6, III·8 および表 III·1, III·2 より次式をうる。

$$m_{\frac{l_2}{2}a,va}=a\left[\left\{\frac{1}{9}(-1.0)_1r_{v(1)}\times0.144+\frac{1}{9}\times1.0\,{}_1r_{v(3)}\times0.006\right\}+\left\{0.2241(-1.0284)_2r_{v(1)}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times0.074+0.1006(-0.5460)_2r_{v(2)}\times0.018\right\}\right]=2\left[\left\{-0.0160_1r_{v(1)}+0.0007_1r_{v(3)}\right\}+\left\{-0.0171_2r_{v(1)}-0.0010_2r_{v(2)}\right\}\right]$$

$$m_{\frac{l_2}{2}a,vb}=a\left[\left\{\frac{1}{9}(-1.0)_1r_{v(1)}\times(-0.053)+\frac{1}{9}\times1.0_1r_{v(3)}\times0.001\right\}+\left\{0.2241(-1.0284)_2r_{v(1)}(-0.038)\right.\right.$$
$$\left.\left.+0.1006(-0.5460)_2r_{v(2)}\times(-0.011)\right\}\right]=2\left[\left\{0.0059_1r_{v(1)}+0.0001_1r_{v(3)}\right\}+\left\{0.0088_2r_{v(1)}+0.0006_2r_{v(2)}\right\}\right]$$

$$m_{\frac{l_2}{2}a,vc}=a\left[\left\{\frac{1}{9}(-1.0)_1r_{v(1)}(-0.022)+\frac{1}{9}\times1.0_1r_{v(3)}\times0.000\right\}+\left\{0.2241(-1.0284)_2r_{v(1)}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times0.000+0.1006(-0.5460)_2r_{v(2)}\times0.002\right\}\right]=2\left[\left\{0.0024_1r_{v(1)}\right\}+\left\{-0.0001_2r_{v(2)}\right\}\right]$$

これに図 III·5, III·7 の r_v の縦距の各値を代入して計算すれば，縦リブの曲げモーメント影響面 $m_{\frac{l_2}{2}a,vk}$ として図 III·13 をうる。

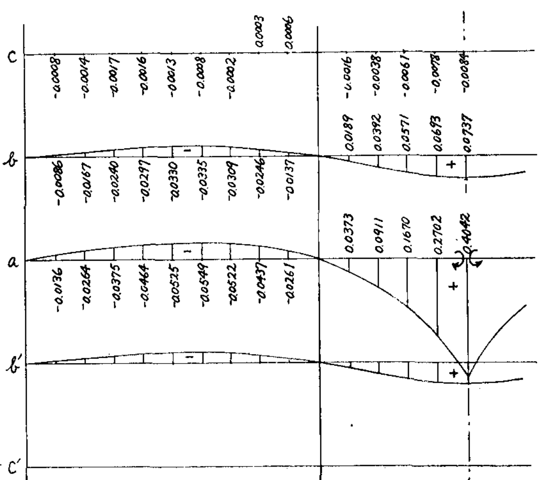

図 III·12

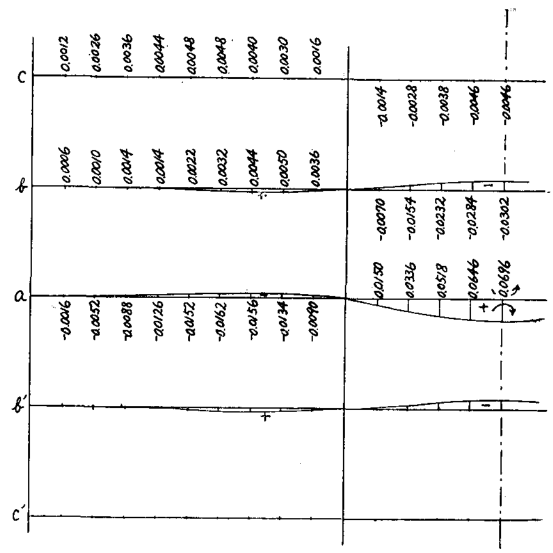

図 III·13

8. あとがき

ここでは，2径間および3径間の連続鋼床板の任意点の曲げモーメント，せん断力，撓みなどの影響面を求める一般理論式とその計算に必要な理論値とを整備した。数値計算例については，3径間連続鋼床板の横リブ中央位置の横リブ曲げモーメントと縦リブ曲げモーメントの場合のみを取扱ったが，2径間および3径間連続鋼床板の任意点の曲げモーメント，せん断力，撓みなどの影響面の計算は，この数値計算例と全く同様にして計算することができる。なお $\lambda_{(n)}=n\pi$ なる固有値をもつ微分方程式の第一の解の場合は，$l_1=l_2$ あるいは $l_1=l_2=l_3$ の等径間連続鋼床板の場合のみに存在することに留意を要する。

参考文献

[1] Hawranek u. Steinhardt: Theorie und Berechnung der Stahlbrücken.

[2] Homberg: Kreuzwerke.

[3] Homberg u. Weinmeister: Einflußflächen für Kreuzwerke.

[4] Hohenemser u. Prager: Dynamik der Stabwerke.

[5] Anger: Zehnteilige Einflußlinien für durchlaufende Träger.