

開水路彎曲部の横断水面形について

正員 北海道開発局土木試験所 小川 芳 昭

§1. ま え が き

河川彎曲部などで、凹岸側の水面が凸岸より高まることはよく知られている事実である。一般には、築堤法線は大きな曲率を持たぬように計画するのが普通であるから、凹岸の水面上昇は無視してもよいであろう。しかし、特殊事情のため大きな曲率をとらねばならぬときは、左右岸の築堤高を変える必要があると考えられる。本文では、いくつかの実験値をもとにして、横断水面形を推定する方法を試みるとともに計算例を示してみた。

§2. 実 験 目 的

従来、彎曲部の損失係数や横断水面形については、多くの実験のあるには理論的な研究が行なわれてきたが、そのほとんどは、曲率半径と川幅の比が1に近く、水深と川幅の比も比較的大きなものであって、一般河川に適用するに

はまだ不十分のように考えられる。この実験では、彎曲の抵抗係数や流速の横断分布を明らかにして、河川彎曲部の水面形(とくに凹岸の水面上昇による築堤高の検討)を推定できるようにすることを目的とした。

§3. 実験結果とその考察

実験は表-1に示すような水路を用い、横断水面形、断面平均水深の縦断変化、等流状態の彎曲部での流速の横断分布などを測定した。表-2は実験結果の一覧である。

表-1 実験水路

水路長	m	9.0	曲率半径	m	1.5
" 前直線部	m	2.0	彎曲度	θ	225°
" 後直線部	m	1.1	水路底(固底)	mm	$d_m = 1.20$ 砂
" 曲線部	m	5.9	水路勾配		1/400
水路幅	m	0.5			

表-2 実験結果

Q (m^3/sec)	$\theta = 0$ (直 線 部)							$\theta = 60^\circ$			
	$\bar{h}_0$ (m)	$\bar{v}_0$ (m/sec)	$\bar{R}_0$ (m)	λ_0	$\bar{h}_0/B$	R_0/k_s	k_s (m)	$\bar{h}_{60}$	$\bar{v}_{60}$	$\bar{R}_{60}$	λ_{60}
0.0030	0.0266	0.226	0.0241	0.0928	0.0532	3.75	0.0064	0.0317	0.189	0.0281	0.1544
0.0060	0.0383	0.314	0.0332	0.0660	0.0766	8.75	0.0038	0.0436	0.275	0.0371	0.0964
0.0090	0.0486	0.370	0.0413	0.0588	0.0972	9.34	0.0044	0.0530	0.340	0.0438	0.0744
0.0096	0.0500	0.384	0.0417	0.0592	0.1000	11.03	0.0038	0.0543	0.354	0.0446	0.0700
0.0120	0.0610	0.394	0.0491	0.0620	0.1220	8.58	0.0057	0.0631	0.360	0.0504	0.0760
0.0135	0.0600	0.450	0.0484	0.0468	0.1200	16.63	0.0029	0.0645	0.418	0.0513	0.0576
0.0150	0.0656	0.457	0.0563	0.0488	0.1312	12.56	0.0045	0.0688	0.436	0.0540	0.0556
0.0320	0.1000	0.640	0.0714	0.0340	0.2000	41.62	0.0017	0.1046	0.612	0.0739	0.0384
平均 0.0042											
Q (m^3/sec)	$\theta = 60^\circ$		$\theta = 135^\circ$								
	$\bar{h}_{60}/B$	λ_{60}/λ_0	$\bar{h}_{135}$	$\bar{v}_{135}$	$\bar{R}_{135}$	λ_{135}	$\bar{h}_{135}/B$	λ_{135}/λ_0	n	$\bar{\delta}$	$\bar{h}_{135}/\bar{\delta}$
0.0030	0.0634	1.66	0.0287	0.208	0.0257	0.1124	0.057	1.21	1.00	0.0086	3.45
0.0060	0.0872	1.46	0.0402	0.298	0.0347	0.0764	0.080	1.16	1.07	0.0093	4.32
0.0090	0.1060	1.26	0.0500	0.360	0.0417	0.0628	0.100	1.07	1.05	0.0096	5.21
0.0096	0.1086	1.18	0.0524	0.368	0.0434	0.0628	0.105	1.06	1.00		
0.0120	0.1262	1.22	0.0620	0.387	0.0497	0.0648	0.124	1.05	0.95	0.0102	5.95
0.0135	0.1290	1.23	0.0625	0.432	0.0500	0.0524	0.125	1.12	0.95		
0.0150	0.1376	1.14	0.0663	0.453	0.0524	0.0500	0.134	1.03	0.88	0.0103	6.43
0.0320	0.2092	1.13	0.1022	0.627	0.0726	0.0364	0.204	1.07	0.73	0.0125	8.25

3-1 断面平均水深の縦断変化

図-1 は断面平均水深の縦断変化の一例である。このような変化は他の実験例も同様であって、この傾向から次のことがいえるであろう。

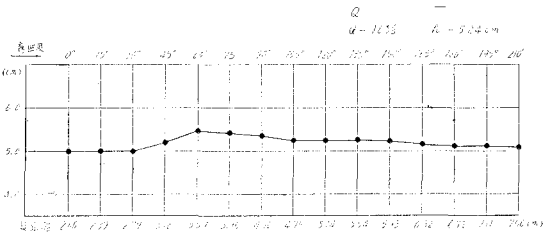


図-1 平均水深の縦断変化

- $\theta = 0^\circ \sim 60^\circ$ 彎曲による抵抗増加のため水深は次第にますが、流速の横断分布は自由渦の場合がなりたつ。
- $\theta = 60^\circ \sim 100^\circ$ 遠心力によって高められた外壁の水深増加により、外壁では下向きの流れ、底面では外壁から内壁へ向かう流れ、内壁では上向きの流れが(いわゆる二次流)次第に成長する。
- $\theta = 100^\circ \sim$ 二次流は十分発達して、流れはヘリカルではあるが定常状態となる。

図-2 は、 $\theta = 60^\circ$ と $\theta = 135^\circ$ での実測水面形と自由渦の仮定で求めた計算値を比較したもので、上の考えがほぼ成立することを示している。

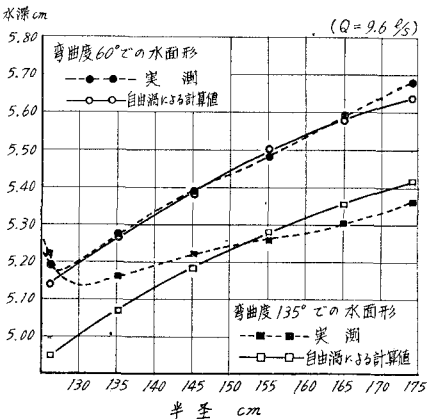


図-2 横断水面形の変化

3-2 損失係数

等流における損失係数を

$$\lambda = \frac{8gRS}{\bar{V}^2} \tag{1}$$

- λ : 損失係数
- S : 水面勾配
- R : 径 深

- g : 重力の加速度
- $\bar{V}$: 断面の平均流速

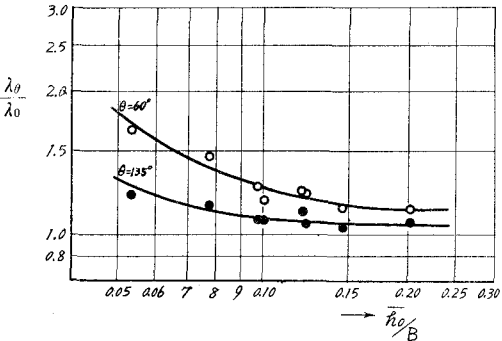


図-3 λ_θ/λ_0 と $\bar{h}_0/B$ の関係

で表わし、直線部、彎曲部の係数 $\lambda_0, \lambda_\theta$ を求め、 $\bar{h}_0/B$ との関係調べた (図-3)。これによると、みかけ上の彎曲部の抵抗は、いずれも直線部より大で、自由渦が成立する部分のほうが二次流の発達した部分より大きいようである。また $\bar{h}_0/B$ が大きくなると (水深が次第にますと)、 λ_θ/λ_0 の値は θ によって違うが、一定に近づく傾向がある。 λ_θ/λ_0 は曲率半径 r と川幅 B との比によっても異なるのであるが、Shukry によると $r/B \geq 2.5$ でかつ Reynolds 数 Re が十分大きければ、一定になるとしている。

したがって、一般河川の彎曲部では、 λ_θ/λ_0 については θ と $\bar{h}_0/B$ が大きな要素であると考えてよいであろう。

3-3 流速の横断分析

流速の横断分布を log-log 紙にプロットしてみると図-4

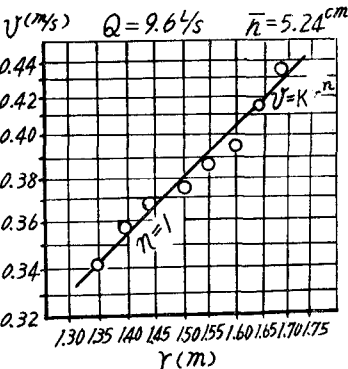


図-4 流速の横断分布

のように近似的に直線になるので、この勾配を n として分布式を表わすと

$$V = Kr^n \tag{2}$$

- V : 半径 r における流速
- r : 半 径
- K : 定 数

となる。定数 K は断面内で比エネルギーが一定であるという条件から

$$K = \frac{\bar{V}}{\sqrt{\frac{r_2^{2n+1} - r_1^{2n+1}}{(r_2 - r_1)(2n+1)}}} \quad (3)$$

$\bar{V}$: 断面の平均流速

r_2 : 外壁の曲率半径

r_1 : 内壁の曲率半径

で与えられる。彎曲部の平均曲率半径 r_c に対し、川幅 B が小さいときは、平均流速は水路中央に生ずるとして

$$K \doteq \frac{\bar{V}}{r_c^n} \quad (4)$$

によって求めて十分である。 n は二次流の発達した彎曲度の大きいところでは、図-5 のように $\bar{h}/B < 0.1$ であれば $n \doteq 1$ であり、 $\bar{h}/B$ がますます減少する。また、 $\theta = 60^\circ$ のところでは、自由渦の仮定が成立するようであるから $n = -1$ となる。

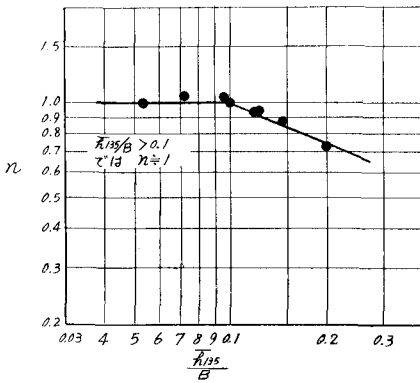


図-5 $\bar{h}/B$ と n (指数) の関係

§4. 横断水面形

彎曲部に生ずる横断勾配は

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{V^2}{gr} \quad (5)$$

で表わされる。ここで (2) (3) から流速分布が

$$V = \bar{V} \left(\frac{r}{r_c} \right)^n \quad (6)$$

で示されるから、(5) は

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{\bar{V}^2}{gr_c^{2n}} r^{2n-1} \quad (7)$$

これを積分して、

$$h = \bar{h} + \frac{\bar{V}^2}{2gnr_c^{2n}} (r^{2n} - r_c^{2n})$$

または

$$= \bar{h} + \frac{\bar{V}^2}{2gn} \left\{ \left(\frac{r}{r_c} \right)^{2n} - 1 \right\} \quad (8)$$

(8) は、 $n = -1$ とみることのできる $\theta \leq 90^\circ$ の範囲ではそのまま適用してよいが、 $\theta \geq 100^\circ$ になれば二次流(下流に向かって左廻りの流れ)が作用して横断配勾を減少させる。この流れの垂直成分を w とし、原点を水底にとつて考えると、

$$w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (9)$$

であるから、これを積分して $z = h$ で $P = 0$, $w = 0$ なる条件を入れて、

$$\frac{P}{\rho} = g(h - z) - \frac{1}{2} w^2$$

すなわち

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = g \frac{\partial h}{\partial r} - w \frac{\partial w}{\partial r} \quad (10)$$

また

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{V^2}{r}$$

であるから

$$g \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{V^2}{r} + w \frac{\partial w}{\partial r} \quad (11)$$

ここで、断面内の二次流が一定であるとし、水平流の境界層厚を δ 、流速を u および垂直流の境界層厚を B 、流速を w とすれば、 w と $\frac{\partial w}{\partial r}$ は逆の負号であるから、

$$w \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\delta}{B} u \frac{\delta}{B^2} u = - \left(\frac{\delta}{B} \right)^3 \frac{u}{\delta} = \alpha \frac{u}{\delta} \quad (12)$$

主流の半径方向の流速を U とすれば

$$u \cdot \delta = U \cdot h$$

であるから (12) は

$$w \frac{\partial w}{\partial r} = - \alpha \left(\frac{h}{\delta} \right)^3 \frac{U^2}{h} \quad (13)$$

一方、 $\theta > 100^\circ$ では、等流状態になるのであるから

$$g \cdot S = \frac{U}{r} \frac{\partial (V \cdot r)}{\partial r}$$

すなわち

$$U = \frac{gSr}{\frac{\partial (Vr)}{\partial r}} \quad (14)$$

したがって

$$w \frac{\partial w}{\partial r} = - \alpha \left(\frac{h}{\delta} \right)^3 \frac{1}{h} \left[\frac{g^2 S^2 r^2}{K^2 (n+1)^2 r^{2n}} \right] \quad (15)$$

平均値をもって (15) を表わし、(11) 式に入れて整理すると、横断水面形は

$$h = \bar{h} + \frac{K^2}{2gn} (r^{2n} - r_c^{2n}) - \frac{\alpha g S^2}{(n+1)(3-2n) K^2 \bar{h}} \left(\frac{\bar{h}}{\delta} \right)^3 (r^{3-2n} - r_c^{3-2n}) \quad (16)$$

で求められる。

α は、大体 $0.5 \sim 0.7 \times 10^{-3}$ であって定数とみてよく $\left(\frac{\bar{h}}{\delta}\right)$ は $(\bar{h}/B)$ によって変化するようで、図-6 のような傾向がある。図-7 は以上の結果を用いて計算したものと実験値とを比較したものでよく合致している。

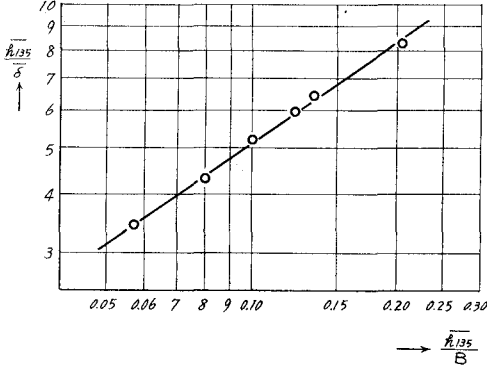


図-6 $\frac{\bar{h}}{\delta}$ と $\frac{\bar{h}}{B}$ の関係

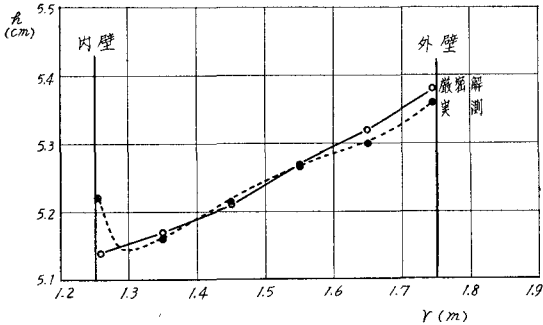


図-7 $\theta = 135^\circ$ の水面形 ($\theta = 9.6 \text{ } \ell/\text{s}$)

§5. 計算例

直線部において $B = 50 \text{ m}$, $\bar{h}_0 = 2.5 \text{ m}$, $Q = 250 \text{ m}^3/\text{s}$, $S = \frac{1}{900}$ である流れが、中心曲率半径 150 m で約 180° 彎曲したとき、 $\theta = 60^\circ$, $\theta = 135^\circ$ での凹岸の水面の高まりを求めよう。

5-1 λ の推定

直線部の λ は

$$\lambda_0 = \frac{8gR_0S}{V_0^3} = \frac{8gR_0S}{\left(\frac{Q}{A}\right)^3} = \frac{8 \times 9.8 \times \frac{50 \times 2.5}{50 + 5} \times \frac{1}{900}}{\left(\frac{250}{2.5 \times 50}\right)^3} = \frac{8 \times 9.8 \times 2.27}{4 \times 900} = 0.0496$$

参考のためこれをマンニングの粗度係数に換算すると

$$n = \left(\frac{\lambda}{8g} R^{1/3}\right)^{1/2} = 0.0285$$

となる。

図-3 から $\frac{\lambda_0}{\lambda_60}$ は、 $\bar{h}/B = \frac{2.5}{50} = 0.05$ であるから、 $\theta = 60^\circ$ で 1.60 , $\theta = 135^\circ$ で 1.32 となる。

したがって、 $\lambda_{60} = 0.0794$
 $\lambda_{135} = 0.0655$ を得る。

5-2 60° での水面の高まり

平均水深は

$$\lambda_{60} = \frac{8gRS}{V^2} = \frac{8g \frac{B\bar{h}}{B+2\bar{h}} \cdot \bar{h}^2 B^2 \cdot S}{V^2}$$

に各値を入れて整理すると

$$\bar{h}^3 - 0.91\bar{h} - 22.8 = 0$$

となるから、これをといて

$$\bar{h}_{60} = 2.98 \text{ m}$$

を得る。また、遠心力による水面の高まりは

$$\Delta h = \frac{\bar{V}^2}{2g} \left\{ 1 - \left(\frac{r_c}{r} \right)^2 \right\} = \frac{\left(\frac{250}{50 \times 2.98} \right)^2}{2 \times 9.8} \left\{ 1 - \left(\frac{150}{175} \right)^2 \right\} = \frac{2.82}{19.6} (1 - 0.735) = 0.04 \text{ m}$$

したがって全体の高まりは、 $0.48 + 0.04 = 0.50 \text{ m}$ である。

5-3 $\theta = 135^\circ$ での水面上昇

5-2 と同様にして、

$$0.0655 = \frac{8gRS}{V^2} \text{ から}$$

$$\bar{h}^3 - 0.75\bar{h} - 19.9 = 0$$

これをといて、 $\bar{h}_{135} = 2.80 \text{ m}$ を得る。

凹岸の水面上昇は図-5 によると、 $\bar{h}/B = 0.05$ であるから、指数 $n=1$ としてよく、図-6 から $\frac{2.8}{50}$ に対して $\frac{\bar{h}_{135}}{\delta} = 3.38$ を得る。したがって (16) を用いると

$$h = \bar{h} + \frac{\bar{V}^2}{2g} \left\{ \left(\frac{r}{r_c} \right)^2 - 1 \right\} - \frac{\alpha g S^2}{2K^2 \bar{h}} \left(\frac{\bar{h}}{\delta} \right)^3 (r - r_c) = 2.80 + \frac{3.2}{19.6} (1.37 - 1) - \frac{0.0006 \times 9.8 \times 225}{2 \times 3.2 \times 8100} (3.38)^3 \times 25 = 2.80 + 0.06 - 0.03 = 2.83 \approx 2.85 \text{ m}$$

となる。

遠心力による水面上昇の項は、流速の自乗に比例するから、洪水などで、上の計算例の 3 倍の流速がでたとすれば上昇高は約 10 倍となる。結局 $\theta = 60^\circ$ でも、 135° でも岸では、直線部より約 1 m 上昇することになる。

§6. むすび

以上の考察からレイノルズ数が十分大きく、 $\frac{r_c}{B} = 3$ で $\frac{H_0}{B}$ が小な水路について、次のことがいえよう。

i) 彎曲部のみかけの抵抗係数は、彎曲度と川幅に対する水深の比に影響され、 60° より大きな彎曲度を持つ普通河川では、直線部の抵抗係数の約 1.5 倍に達する。

この抵抗増加による水面上昇は、存外大きな値を持つから、設計・施工の際はこの点を十分検討する必要があるう。

ii) (16)式によって外壁(凹岸)の水面上昇を求めることができるが、計算例からわかるように、流速が小さいうちは抵抗増加による水位上昇($\bar{h}$ の増大)に比し遠心力による項は小であるが、 $\bar{V}$ が大となれば、第二項(遠心力による水位上昇)は、自乗の割合で大きくなり、第三項(補正項)は逆に自乗の割合で小となるから、全体として、大きな値を持つようになる。

iii) 曲率半径と川幅の比 r_c/B の大なときは、彎曲の抵抗増加はほとんどないから、考慮するに及ばないが、 r_c/B

<3 であれば、本文で述べたような考察を行なうべきであらう。

参 考 文 献

- 1) 石原藤次郎・本間仁編：応用水理学上・中 I, 丸善.
- 2) H. A. Einstein and J. A. Harder: Velocity distribution and the boundary layer at channel bends. Trans. AGU. Vol. 35, No. 1 (1954).
- 3) 本間 仁・安芸皎一編：物部水理学, 岩波.
- 4) 岸 力・小川芳昭：開水路彎曲部の二次流に関する研究, 土木学会水理講演会講演集 (1962, 10).