

高さと軸圧縮力の変化を考慮せる単純ゲタの理論について

正員 室蘭工業大学 中村 作太郎

I. 緒 論

支間に比べ断面高さの比較的大きい単純ゲタについてはすでに Coker, Filon, 福原達三, Frocht, Wilson, Stokes, Boussinesq, Lamb などの諸氏によって種々研究されている。それらは、純然たる曲げを受ける初等単純ゲタ理論による表式の不合理なることを指摘し、これを半無限版の一部であると同様に取扱い、集中荷重の作用点から流出する応力の放射状態を初等単純応力の上に添え載せることによって理論を改良したところにその特徴がある。しかし、断面高さが支間に比べかなり大きい単純ゲタの基本理論に初等単純ゲタ理論を用いることは誠に不合理と考えられるので、著者は高さと軸圧縮力の変化とを考慮に入れた厳密なる単純ゲタ理論を初等理論の代わりに提案し、従来よりも一層合理的な理論について一考察を試みたものである。

そもそも、図-1 のような従来用いられてきている初等単純ゲタの理論には、次のような沢山の仮定を含んでいる。

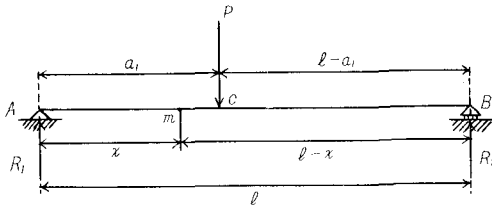


図-1 従来の初等単純ゲタの図

- (1) ゲタはまっすぐな 1 本の棒よりなり、中立軸線 1 本(断面積零)によってこれを表わしうものとし、中立軸における伸縮は零と仮定される。
- (2) ゲタの支間は載荷の前後ともまったく等しく変わらないものと仮定される。
- (3) ゲタは外力によってきわめて微少の彎曲を受けるものと仮定され、大きな変形を受けるものは取扱わないこととする。
- (4) 初等単純ゲタの理論は静定構造として取扱われるもので一端が固定鉸、他端が移動鉸で、自由に伸縮しうものと仮定され、両支点の曲げモーメントは零で、軸力はまったく妨がないものとされ、微少変形の影響による応力もまた無視されるものである。

上記の仮定は、底部に支点を有し、支間に比べかなりの

断面高さを有する実際の単純ゲタにおいては、当然満足されないから、模型実験によって正しい変形、応力の現象を把握し、最も合理的な理論を見出さなければならない。

著者は、先にスパンに比べ断面高さの種々異なるエポキシ樹脂の単純支持模型バリについて光弾性実験¹⁾によって断面応力度とタワミを求め、その現象を明白ならしめた。すなわち、任意の垂直荷重を受ける単純バリには曲げモーメントやせん断力による断面応力度のほか余分に断面軸圧縮力が発生し、荷重点において最大で、支点に近づくに従いだんだん減少し、支点上においては零となる傾向があり、特に断面高さの大きい単純バリ程その現象の顕著なことを発見した。

そこで、著者は任意の集中荷重を受ける単純ゲタの最も合理的で実際に合うと思われる理論を確立するため、ゲタには曲げモーメントやせん断力による断面応力度のほか、余分に発生する断面軸圧縮力を、荷重点において最大、支点において零なる正規確率密度関数²⁾に比例分布するものと仮定して作用させ、高級単純ゲタの基礎微分方程式を誘導した。なお、この厳密理論に用いた主なる仮定を列挙すれば次のとおりである。

- (1) ゲタの断面高さと中心線の微少変形による影響を考慮する。
- (2) 支点がゲタの底部にあるため、垂直荷重を受ける際ゲタの中心線は縮み、曲げモーメントやせん断力による断面応力度のほか、余分に断面軸圧縮力が発生する。
- (3) 断面軸圧縮力は、集中荷重の載荷点の断面にて最大で、端部に行くに従い減少し、支点においては零とする。なお、その分布曲線は正規確率密度関数に比例するものと仮定する。
- (4) 荷重の載荷前、 l であった支間は、載荷後 l' に変化し、 $\delta = l - l'$ だけ縮小するものと仮定する。

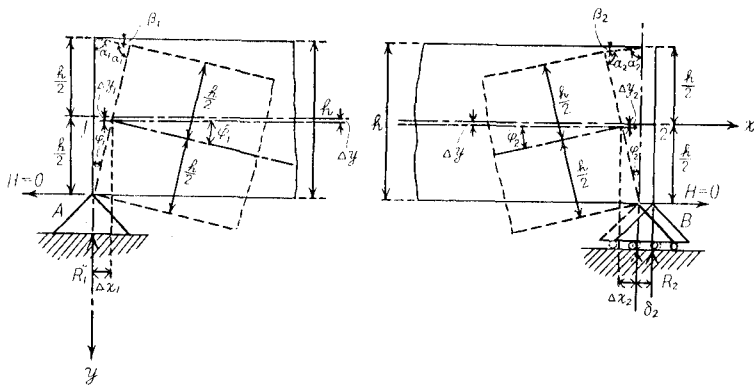
II. 高さと軸圧縮力の変化を考慮せる単純ゲタの厳密理論

1. 基礎微分方程式の誘導

外部より一定の軸圧縮力を、垂直荷重と同時に作用せしめた単純ゲタの厳密理論は、Timoschenko³⁾, Westergaard, Byerly, Osgood, 竹山謙三郎⁴⁾, 久田俊彦などの諸氏によって取扱われたものがあるが、単純ゲタの内部に軸圧縮力が発生すると考察した論文は著者の知るところではまった

ある。

図-2 高さと軸圧縮力の変化を考慮せる液密理論による単純ゲタの図



図—3 高さと軸圧縮力の変化を考慮せる厳密理論による
単純ゲタの支点付近における図

いま、図-3において

$$\left. \begin{aligned} Ax_1 &= \frac{h}{2} \sin \varphi_1 & \alpha_1 &= \frac{\pi - \varphi_1}{2} \\ Ax_2 &= \frac{h}{2} \sin \varphi_2 & \beta_1 &= \frac{\pi}{2} - \alpha_1 = \frac{\varphi_1}{2} \\ Ay_1 &= \frac{h}{2} (1 - \cos \varphi_1) & \alpha_2 &= \frac{\pi - \varphi_2}{2} \\ Ay_2 &= \frac{h}{2} (1 - \cos \varphi_1) & \beta_2 &= \frac{\varphi_2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} l &= l' + (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \delta_2) = l' + \delta \\ [\delta_2 = 0 \Rightarrow l &= l' + (\Delta x_1 + \Delta x_2)] \\ \Delta y &= \frac{h}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cos \varphi_1 - \left(\frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 \right\} \\ y &= y_1 + \Delta y \\ \eta &= h_m - y = \frac{h}{2} - y \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

しかるに、ケタの一般基本微分方程式⁶⁾は次のとおり表示される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= -\frac{M}{KI} \\ K &= E + \frac{X_x}{A} = E \left(1 + \frac{X_x}{EA} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

そこで、支間 l 、弾性係数 E 、ケタの断面幅 b 、断面高さ h 、断面積 A 、慣性モーメント I が一定の単純ケタ AB の支点より距離 a_1 に集中荷重 P が載るものとすれば、ケタ内部に発生する軸圧縮力を (4) のように仮定し、任意の点における曲げモーメントの表示より、基本微分方程式の誘導を行なうことができる。

すなわち、荷重点 C' の直下で中心軸線上の C 点におけ

る軸圧縮力を X_c とすれば、任意の点 x における軸圧縮力 X_x は正規確率密度関数²⁾ に比例分布するものと仮定し

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x \leq a_1 \text{ において} \\ X_x = e^{-\frac{12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}} X_c = 3 \cdot e^{-\frac{12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}} X_m \\ a_1 \leq x \leq l \text{ において} \\ X_x = e^{-\frac{12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}} X_c = 3 \cdot e^{-\frac{12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}} X_m \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに、 X_m = 平均断面軸圧縮力

そこで、任意の点 x における曲げモーメント M_x は

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x \leq a_1 \text{ において} \\ M_x = R_1 x + X_x (y_1 + \Delta y) \\ a_1 \leq x \leq l \text{ において} \\ M_x = R_2 (l-x) + X_x (y_1 + \Delta y) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ゆえに、(3) 式の微分方程式は次のとおりになる。

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq a_1 \text{ において} \\ \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{KI} \{ R_1 x + X_x (y_1 + \Delta y) \} = 0 \quad (6) \\ \therefore \frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{e^{-\frac{12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}} X_c}{KI} y_1 + \frac{1}{KI} \left[R_2 (l-x) \right. \\ \left. + \frac{h}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cos \varphi_1 - \left(\frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 \right\} \right. \\ \left. + e^{-\frac{12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}} X_c \right] + \frac{d^2 \Delta y}{dx^2} = 0 \end{aligned}$$

Δy は微小なるゆえ $\frac{d^2 \Delta y}{dx^2} \div 0$ とし消略すれば、上式は次のとおりになる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{e^{-\frac{12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}} X_c}{KI} y_1 + \frac{1}{KI} \left[R_2 (l-x) + \frac{h}{2} \right. \\ \left. \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cos \varphi_1 - \left(\frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 \right\} e^{-\frac{12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}} X_c \right] = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

また、 $a_1 \leq x \leq l$ において

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{KI} \{ R_2 (l-x) + X_x (y_1 + \Delta y) \} = 0 \quad (8) \\ \therefore \frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{e^{-\frac{12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}} X_c}{KI} y_1 + \frac{1}{KI} \left[R_2 (l-x) \right. \\ \left. + \frac{h}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cos \varphi_1 - \left(\frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 \right\} \right. \\ \left. + e^{-\frac{12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}} X_c \right] + \frac{d^2 \Delta y}{dx^2} = 0 \end{aligned}$$

前同様、 $\frac{d^2 \Delta y}{dx^2}$ は微小なるゆえ消略し次の式をうる。

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{e^{-\frac{12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}} X_c}{KI} y_1 + \frac{1}{KI} \left[R_2 (l-x) \right.$$

$$\left. + \frac{h}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cos \varphi_1 - \left(\frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 \right\} \right. \\ \left. + e^{-\frac{12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}} X_c \right] = 0 \quad (9)$$

以上の式において

X_c = 荷重点 C' における断面の軸方向応力度 σ_x のグラフの代数的総和に断面積を乗じたもの

$$(\text{軸方向圧縮力}) = b \int_{y=-h/2}^{y=+h/2} \sigma_x dy \quad (10)$$

いま、(7)、(9) 式において

$$y_1 = v \cdot w \quad (v, w \text{ は } x \text{ の関数}) \quad (11)$$

とすれば、

$$\frac{e^{-\frac{12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}} X_c}{KI}, \frac{e^{-\frac{12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}} X_c}{KI}$$

などを $Q(x)$ で表わし

$$\begin{aligned} -\frac{1}{KI} \left[R_1 x + \frac{h}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cos \varphi_1 \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 \right\} e^{-\frac{12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}} \cdot X_c \right], -\frac{1}{KI} \left[R_2 (l-x) \right. \\ \left. + \frac{h}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cos \varphi_1 \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 \right\} e^{-\frac{12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}} \cdot X_c \right] \end{aligned}$$

などを $R(x)$ で表示せる基本微分方程式^{7,8)} は次のとおりになる。

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + Q(x) \cdot y_1 = R(x) \quad (12)$$

いま、

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= \frac{d(v, w)}{dx} = v \frac{dw}{dx} + w \frac{dv}{dx} \\ \frac{d^2 y_1}{dx^2} &= \frac{d^2(v, w)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(v \frac{dw}{dx} + w \frac{dv}{dx} \right) \\ &= v \frac{d^2 w}{dx^2} + w \frac{d^2 v}{dx^2} \end{aligned}$$

となり、(12) 式は次のとおりになる。

$$\begin{aligned} v \frac{d^2 w}{dx^2} + w \frac{d^2 v}{dx^2} + Q(x) (v, w) = R(x) \\ \therefore w \frac{d^2 v}{dx^2} + \left\{ \frac{d^2 w}{dx^2} + Q(x) \cdot w \right\} v = R(x) \quad (13) \end{aligned}$$

(13) 式において、

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + Q(x) \cdot w = 0 \quad (14)$$

とすれば、

$$\begin{aligned} w \frac{d^2 v}{dx^2} &= R(x) \\ \therefore \frac{d^2 v}{dx^2} &= \frac{R(x)}{w} \quad (15) \end{aligned}$$

(14) 式は元の方程式の右辺を 0 にしたものであるから、次のとおりに表わされう。

$0 \leq x \leq a_1$ においては

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + e^{\frac{-12.5(a_1-x)^2}{(l-a_1)^2}} \frac{X_c}{KI} y_1 = 0 \quad (16)$$

$a_1 \leq x \leq l$ においては

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + e^{\frac{-12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}} \frac{X_c}{KI} y_1 = 0 \quad (17)$$

(16) 式において、荷重点 $x = a_1$ では次式がえられる。

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \left(\frac{X_c}{KI} \right) y_1 = 0 \quad (18)$$

いま、 $\sqrt{\frac{X_c}{KI}} = \xi$ とすれば、(18) 式は次のとおりになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dx^2} + \xi^2 y_1 &= 0 \\ \text{ここに、} \xi > 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

これを解いて次式を得る。

$$y_1 = C_1 \sin(\xi x + C_2) \quad (20)$$

(20) 式は (16) 式の特解であり、 $y_1 = w$ で表わす。

いま、(15) 式に相当する式を作れば次のとおりになる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v}{dx^2} &= \frac{1}{w} \frac{-1}{KI} \left[R_1 x + \frac{h}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cos \varphi_1 - \left(\frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 \right\} e^{\frac{-12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}} \cdot X_c \right] \\ \therefore \frac{d^2 v}{dx^2} &= \frac{-X_c}{KI \{ C_1 \sin(\xi x + C_2) \}} \left[R_1 x + \frac{h}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cos \varphi_1 - \left(\frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 \right\} e^{\frac{-12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}} \right] \quad (21) \\ \therefore v &= \iint \frac{-\xi}{C_1 \sin(\xi x + C_2)} \left[R_1 x + \frac{h}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cos \varphi_1 - \left(\frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 \right\} \cdot e^{\frac{-12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}} \right] dx^2 + C_3 x + C_4 \quad (22) \end{aligned}$$

そこで

$$\begin{aligned} y_1 = v \cdot w &= C_1 \sin(\xi x + C_2) \left[\iint \frac{-\xi}{C_1 \sin(\xi x + C_2)} \left[R_1 x + \frac{h}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cos \varphi_1 - \left(\frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 \right\} e^{\frac{-12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}} \right] \right. \\ &\quad \left. dx^2 + C_3 x + C_4 \right] \quad (23) \end{aligned}$$

これが y_1 の一般解である。

同様に、 $a_1 \leq x \leq l$ においてはやはり

$$\begin{aligned} y_1 &= w = C_1 \sin(\xi x + C_2) \text{ となり} \\ v &= \iint \frac{-\xi}{C_1 \sin(\xi x + C_2)} \left[R_2(l-x) + \frac{h}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cos \varphi_1 - \left(\frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 \right\} \cdot e^{\frac{-12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}} \right] dx^2 + C_3 x + C_4 \quad (24) \end{aligned}$$

で表示されるから、 y_1 の一般解は次のとおりになる。

$$\begin{aligned} y_1 = v \cdot w &= C_1 \sin(\xi x + C_2) \left[\iint \frac{-\xi}{C_1 \sin(\xi x + C_2)} \left[R_2(l-x) + \frac{h}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cos \varphi_1 - \left(\frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 \right\} e^{\frac{-12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}} \right] \right. \\ &\quad \left. dx^2 + C_3 x + C_4 \right] \quad (25) \end{aligned}$$

したがって x 軸よりの総合垂直変位 y は次のとおりになる。 $0 \leq x \leq a_1$ において

$$\begin{aligned} y = y_1 + \Delta y &= C_1 \sin(\xi x + C_2) \left[\iint \frac{-\xi}{C_1 \sin(\xi x + C_2)} \left[R_1 x + \frac{h}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cos \varphi_1 - \left(\frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 \right\} e^{\frac{-12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}} \right] \right. \\ &\quad \left. dx^2 + C_3 x + C_4 \right] + \frac{h}{2} \left\{ \frac{x}{l} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) + (1 - \cos \varphi_1) \right\} \quad (26) \end{aligned}$$

また、 $a_1 \leq x \leq l$ において

$$\begin{aligned} y = y_1 + \Delta y &= C_1 \sin(\xi x + C_2) \left[\iint \frac{-\xi}{C_1 \sin(\xi x + C_2)} \left[R_2(l-x) + \frac{h}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cos \varphi_1 - \left(\frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. e^{\frac{-12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}} \right] dx^2 + C_3 x + C_4 \right] + \frac{h}{2} \left\{ \frac{x}{l} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) + (1 - \cos \varphi_1) \right\} \quad (27) \end{aligned}$$

A 支点直上 1 点では、 $0 \leq x \leq a_1$ において

$$\left. \begin{aligned} x=0, \quad y_1 &= 0 \\ x=0, \quad \frac{dy_1}{dx} &= \varphi_1 \\ \text{B 支点直上 2 点では、} \quad a_1 \leq x \leq l \text{ において} \\ x=l, \quad y_1 &= 0 \\ x=l, \quad \frac{dy_1}{dx} &= -\varphi_2 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

これらの境界条件より C_1, C_2, C_3, C_4 を求めることができる。

A 支点直上 1 点の条件： $0 \leq x \leq a_1$ において (23) 式より $x=0, y_1=0$ の条件を求めると次のとおりになる。

$$\begin{aligned} \sin C_2 \left[\iint \frac{-\xi}{\sin(\xi x + C_2)} \left[R_1 x + \frac{h}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cos \varphi_1 - \left(\frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 \right\} e^{\frac{-12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}} \right] dx^2 \right] + C_1 \cdot C_4 \cdot \sin C_2 &= 0 \quad (29) \end{aligned}$$

また、(23) 式より、 $x=0, \frac{dy_1}{dx} = \varphi_1$ の条件を求めると (30) 式が得られる。

$$\begin{aligned} \sin C_2 \left[\int \frac{-\xi}{\sin(\xi x + C_2)} \left[R_1 x + \frac{h}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cos \varphi_1 - \left(\frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 \right\} \cdot e^{\frac{-12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}} \right] dx \right] + \xi \cos C_2 \\ \left[\iint \frac{-\xi}{\sin(\xi x + C_2)} \left[R_1 x + \frac{h}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cos \varphi_1 \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$-\left(\frac{x}{l}\right)\cos\varphi_2\left\}e^{\frac{-12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}}\right]dx^2\Big]_{x=0}+C_3\cdot C_4\cdot\sin C_2 \\ +C_1\cdot C_4\cdot\xi\cos C_2=\varphi_1 \quad (30)$$

B 支点の直上 2 点の条件: $a_1\leq x\leq l$ において (25) 式より, $x=l$, $y_1=0$ の条件を求めると次のとおりになる。

$$\sin(\xi l+C_2)\left[\iint\frac{-\xi}{\sin(\xi x+C_2)}\left[R_2(l-x)+\frac{h}{2}\left\{1-\left(1-\frac{x}{l}\right)\cos\varphi_1-\left(\frac{x}{l}\right)\cos\varphi_2\right\}e^{\frac{-12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}}\right]dx^2\right]_{x=l} \\ +C_1(C_3+C_4)\cdot\sin(\xi l+C_2)=0 \quad (31)$$

また, (25) 式より, $x=l$, $\frac{dy_1}{dx}=-\varphi_2$ の条件を求めると (32) 式が得られる。

$$\sin(\xi l+C_2)\left[\iint\frac{-\xi}{\sin(\xi x+C_2)}\left[R_2(l-x)+\frac{h}{2}\left\{1-\left(1-\frac{x}{l}\right)\cos\varphi_1-\left(\frac{x}{l}\right)\cos\varphi_2\right\}e^{\frac{-12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}}\right]dx\right]_{x=l} \\ +\xi\cdot\cos(\xi l+C_2)\left[\iint\frac{-\xi}{\sin(\xi x+C_2)}\left[R_2(l-x)+\frac{h}{2}\left\{1-\left(1-\frac{x}{l}\right)\cos\varphi_1-\left(\frac{x}{l}\right)\cos\varphi_2\right\}e^{\frac{-12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}}\right]dx^2\right] \\ +C_1\cdot C_3\cdot\sin(\xi l+C_2)+C_1(C_3+C_4)\cdot\xi\cdot\cos(\xi l+C_2)=-\varphi_2 \quad (32)$$

(29), (30), (31), (32) の 4 式より, 積分定数 C_1, C_2, C_3, C_4 が求まるから, これらを (26), (27) 式に代入すれば, タワミ y が得られる。

2. 曲げモーメント M_x の解式

任意の点の曲げモーメント M_x は次のとおりである。

$0\leq x\leq a_1$ において (5) 式より

$$M_x=R_1x+X_x(y_1+\Delta y)=R_1x+e^{\frac{-12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}}X_e\cdot C_1\sin(\xi x+C_2)\left[\iint\frac{-\xi}{C_1\sin(\xi x+C_2)}\left[R_1x+\frac{h}{2}\left\{1-\left(1-\frac{x}{l}\right)\cos\varphi_1-\left(\frac{x}{l}\right)\cos\varphi_2\right\}e^{\frac{-12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}}\right]dx^2+C_3x+C_4\right] \\ +e^{\frac{-12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}}X_e\cdot\frac{h}{2}\left\{\frac{x}{l}(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)+(1-\cos\varphi_1)\right\} \quad (33)$$

$a_1\leq x\leq l$ において (5) 式より

$$M_x=R_2(l-x)+X_x(y_1+\Delta y)=R_2(l-x)+e^{\frac{-12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}}X_e\cdot C_1\sin(\xi x+C_2)\left[\iint\frac{-\xi}{C_1\sin(\xi x+C_2)}\left[R_2(l-x)+\frac{h}{2}\left\{1-\left(1-\frac{x}{l}\right)\cos\varphi_1-\left(\frac{x}{l}\right)\cos\varphi_2\right\}e^{\frac{-12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}}\right]dx^2\right] \\ +C_3x+C_4\Big]+e^{\frac{-12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}}X_e\cdot\frac{h}{2}\left\{\frac{x}{l}(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)-(1-\cos\varphi_1)\right\} \quad (34)$$

3. 垂直反力, R_1, R_2 の算定式

垂直反力とモーメントの釣合条件より普通の単純ゲタの理論と同様に次式が得られる。

$$\Sigma V=0 \text{ より, } R_1+R_2-P=0 \quad (35)$$

$$\text{また, } \Sigma M=0 \text{ より, } R_1l-P(l-a_1)=0 \quad (36)$$

$$(36) \text{ 式より, } R_1=\frac{P(l-a_1)}{l} \quad (37)$$

(37) 式を (35) 式に代入し

$$R_2=P-\frac{P(l-a_1)}{l}=\frac{Pa_1}{l} \quad (38)$$

4. 支点の直上 1, 2 点のタワミ角 φ_1, φ_2 の算定法

集中荷重の載荷点の直下 C においては, タワミ角 φ_c ならびに, タワミ y_c の AC, CB 両側について求めた式が相等しいという条件から支点のタワミ角 φ_1, φ_2 を求めるための 2 式が得られる。

C 点におけるタワミ角の式

$0\leq x\leq a_1$ (A~C 間) では, (26) 式を dx について微分し,

$$\frac{dy}{dx}=\sin(\xi x+C_2)\left[\iint\frac{-\xi}{\sin(\xi x+C_2)}\left[R_1x+\frac{h}{2}\left\{1-\left(1-\frac{x}{l}\right)\cos\varphi_1-\left(\frac{x}{l}\right)\cos\varphi_2\right\}e^{\frac{-12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}}\right]dx\right] \\ +\xi\cos(\xi x+C_2)\left[\iint\frac{-\xi}{\sin(\xi x+C_2)}\left[R_1x+\frac{h}{2}\left\{1-\left(1-\frac{x}{l}\right)\cos\varphi_1-\left(\frac{x}{l}\right)\cos\varphi_2\right\}e^{\frac{-12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}}\right]dx^2\right] \\ +C_3\cdot C_4\sin(\xi x+C_2)+C_1\cdot C_4\xi\cos(\xi x+C_2) \quad (39)$$

$a_1\leq x\leq l$ (C~B 間) では, (27) 式を dx について微分し,

$$\frac{dy}{dx}=\sin(\xi x+C_2)\left[\iint\frac{-\xi}{\sin(\xi x+C_2)}\left[R_2(l-x)-\frac{h}{2}\left\{1-\left(1-\frac{x}{l}\right)\cos\varphi_1-\left(\frac{x}{l}\right)\cos\varphi_2\right\}e^{\frac{-12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}}\right]dx\right] \\ +\xi\cos(\xi x+C_2)\left[\iint\frac{-\xi}{\sin(\xi x+C_2)}\left[R_2(l-x)+\frac{h}{2}\left\{1-\left(1-\frac{x}{l}\right)\cos\varphi_1-\left(\frac{x}{l}\right)\cos\varphi_2\right\}e^{\frac{-12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}}\right]dx^2\right] \\ +C_1\cdot C_3\sin(\xi x+C_2)+C_1(C_3-C_4)\xi\cos(\xi x+C_2) \quad (40)$$

荷重点の直下 C においては $x=a_1$ なるゆえ, (39) と (40) 式に $x=a_1$ を代入し, 相等しいとおき次式を得る。

$$\sin(\xi a_1+C_2)\left[\iint\frac{-\xi}{\sin(\xi x+C_2)}\left[R_1x+\frac{h}{2}\left\{1-\left(1-\frac{x}{l}\right)\cos\varphi_1-\left(\frac{x}{l}\right)\cos\varphi_2\right\}e^{\frac{-12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}}\right]dx\right]_{x=a_1}+\xi\cos(\xi a_1+C_2)\left[\iint\frac{-\xi}{\sin(\xi x+C_2)}\left[R_1x+\frac{h}{2}\left\{1-\left(1-\frac{x}{l}\right)\cos\varphi_1-\left(\frac{x}{l}\right)\cos\varphi_2\right\}e^{\frac{-12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}}\right]dx^2\right]_{x=a_1}+C_3\cdot C_4\sin(\xi a_1+C_2)+C_1\cdot C_4\xi\cos(\xi a_1+C_2)=\sin(\xi a_1+C_2)\left[\iint\frac{-\xi}{\sin(\xi x+C_2)}\right]$$

$$\left[R_2(l-x) - \frac{h}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 - \left(\frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 \right\} \right. \\ \left. e^{\frac{-12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}} \right] dx \Big|_{x=a_1} + \xi \cos(\xi a_1 + C_2) \left[\int \frac{-\xi}{\sin(\xi x + C_2)} \right. \\ \left. \left[R_2(l-x) + \frac{h}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cos \varphi_1 - \left(\frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 \right\} \right. \right. \\ \left. \left. e^{\frac{-12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}} \right] dx^2 \right]_{x=a_1} + C_1 \cdot C_3 \sin(\xi a_1 + C_2) + C_1(C_3 a_1 \\ - C_4) \xi \cos(\xi a_1 + C_2)$$

ゆえに

$$\sin(\xi a_1 + C_2) \left[\int \frac{\xi}{\sin(\xi x + C_2)} \left[R_1 x + \frac{h}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \cos \varphi_1 - \left(\frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 \right\} e^{\frac{-12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}} \right] dx \right]_{x=a_1} - \sin(\xi a_1 + C_2) \\ \left[\int \frac{\xi}{\sin(\xi x + C_2)} \left[R_2(l-x) - \frac{h}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cos \varphi_1 \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 \right\} e^{\frac{-12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}} \right] dx \right]_{x=a_1} + \xi \cos(\xi a_1 + C_2) \\ \left[\int \frac{\xi}{\sin(\xi x + C_2)} \left[R_1 x + \frac{h}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cos \varphi_1 \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 \right\} e^{\frac{-12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}} \right] dx^2 \right]_{x=a_1} - \xi \cos(\xi a_1 + C_2) \\ \left[\int \frac{\xi}{\sin(\xi x + C_2)} \left[R_2(l-x) + \frac{h}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cos \varphi_1 \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 \right\} e^{\frac{-12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}} \right] dx^2 \right]_{x=a_1} + (C_1 - C_4) C_3 \sin(\xi a_1 \\ + C_2) + C_1(C_3 a_1 - 2C_4) \xi \cos(\xi a_1 + C_2) \quad (41)$$

また、タワミの式(26)と(27)式において $x=a_1$ を代入し
相等しいとおけば次式を得る。

$$\left[\int \frac{\xi}{C_1 \sin(\xi x + C_2)} \left[R_1 x + \frac{h}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cos \varphi_1 \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 \right\} e^{\frac{-12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}} \right] dx^2 \right]_{x=a_1} \\ - \left[\int \frac{\xi}{C_1 \sin(\xi x + C_2)} \left[R_2(l-x) + \frac{h}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \cos \varphi_1 - \left(\frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 \right\} e^{\frac{-12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}} \right] dx^2 \right]_{x=a_1} = 0 \quad (42)$$

(41)と(42)式より φ_1, φ_2 を求めることができる。

4. 軸圧縮力 X_x を求める解式

$$X_x = e^{\frac{-12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}} X_c = 3 \cdot e^{\frac{-12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}} X_m \cdots \cdots 0 \leq x \leq a_1 \\ X_x = e^{\frac{-12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}} X_c = 3 \cdot e^{\frac{-12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}} X_m \cdots \cdots a_1 \leq x \leq l$$

ここに、 X_m = 平均断面軸圧縮力((4)式参照)

しかるに、

$$X_m = \frac{A}{l} \left\{ \int_0^{a_1} \frac{y}{2} M_x dx + \int_{a_1}^l \frac{y}{2} M_x dx \right\} \quad (43)$$

そこで、 $0 \leq x \leq a_1$ においては

$$\frac{y}{2} M_x = \frac{y}{2} \{ R_1 x + X_x(y_1 + dy) \} = \frac{y}{2} R_1 x + \frac{3y}{2}$$

$$e^{\frac{-12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}} X_m \cdot C_1 \sin(\xi x + C_2) \left[\int \frac{-\xi}{C_1 \sin(\xi x + C_2)} \right. \\ \left. \left[R_1 x + \frac{h}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cos \varphi_1 - \left(\frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 \right\} \right. \right. \\ \left. \left. e^{\frac{-12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}} \right] dx^2 + C_3 x + C_4 \right] + \frac{3y}{4} e^{\frac{-12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}} X_m \\ h \left\{ \frac{x}{l} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) + (1 - \cos \varphi_1) \right\} \quad (44)$$

$a_1 \leq x \leq l$ においては

$$\frac{y}{2} M_x = \frac{y}{2} \{ R_2(l-x) + X_x(y_1 + dy) \} = \frac{y}{2} R_2(l-x) \\ + \frac{3}{2} e^{\frac{-12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}} X_m \cdot C_1 \sin(\xi x + C_2) \left[\int \frac{-\xi}{C_1 \sin(\xi x + C_2)} \right. \\ \left. \left[R_2(l-x) + \frac{h}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cos \varphi_1 - \left(\frac{x}{l} \right) \cos \varphi_2 \right\} \right. \right. \\ \left. \left. e^{\frac{-12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}} \right] dx^2 + C_3 x + C_4 \right] + \frac{3}{4} e^{\frac{-12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}} X_m \cdot \\ h \left\{ \frac{x}{l} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) - (1 - \cos \varphi_1) \right\} \quad (45)$$

(44), (45) 式より $\int_0^{a_1} \frac{y}{2} M_x dx$ および $\int_{a_1}^l \frac{y}{2} M_x dx$ を
求め、(43) 式によって X_m を求めることができる。

すなわち

$$X_m = \frac{A}{l} \left[\int_0^{a_1} \frac{(y_1 + dy)}{2} \{ R_1 x + X_x(y_1 + dy) \} dx + \right. \\ \left. \int_{a_1}^l \frac{(y_1 + dy)}{2} \{ R_2(l-x) + X_x(y_1 + dy) \} dx \right] = \frac{A}{l} \\ \left[\int_0^{a_1} \frac{(y_1 + dy)}{2} \{ R_1 x + 3e^{\frac{-12.5(a_1-x)^2}{a_1^2}} X_m(y_1 + dy) \} dx \right. \\ \left. + \int_{a_1}^l \frac{(y_1 + dy)}{2} \{ R_2(l-x) + 3e^{\frac{-12.5(x-a_1)^2}{(l-a_1)^2}} X_m(y_1 + dy) \} \right. \\ \left. dx \right] \quad (46)$$

(46) 式はきわめて複雑な関数方程式となり、 X_m は $\xi = \sqrt{\frac{3X_m}{KI}}$ と相対的に変化するため試索法によって(46)式を
満足する X_m を求めなければならない。 X_m が得られれば
任意の点の X_x は(4)式によって容易に求めることができる。
また、 X_x が求めれば、両支点直上1, 2点のタワミ角
 φ_1, φ_2 ; 任意の点のタワミ y ならびに任意の点の曲げモー
メント M_x が計算できる。

III. 高さと軸圧縮力の変化を考慮する単純ゲタの 二次元的応力度の合成組合せ算定法

集中荷重の作用点から流出する応力の放射状態を厳密理
論による単純ゲタ応力組成の上に添え載せることによって
合成応力度が得られる。すなわち、図-4のように集中荷重
の影響による応力成分は半無限版の上に作用する集中荷重
 P によって展開される矩形の応力成分すなわち、Rectangu-
lar Stress Components の解式⁹⁾で誘導される次のような

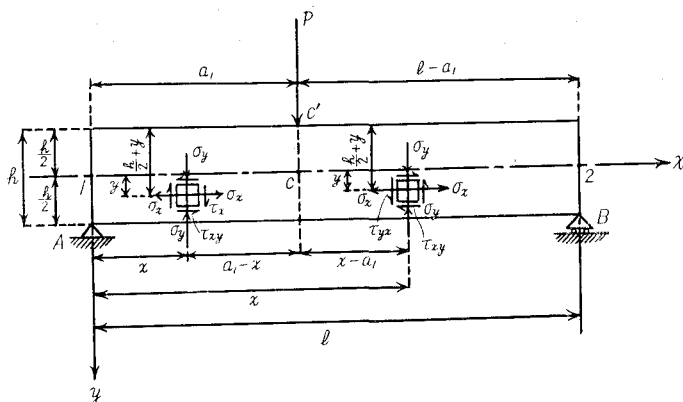


図-4 Rectangular Stress Components の理論を用いた単純ゲタの図

σ'_x , σ'_y および τ'_{yx} によって表示されることがすでに知られるところである。

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_y &= -\frac{2P}{\pi t} \frac{\left(\frac{h}{2} + y\right)^3}{\left\{\left(\frac{h}{2} + y\right)^2 + (a_1 - x)^2\right\}^2} \\ \sigma'_x &= -\frac{2P}{\pi t} \frac{\left(\frac{h}{2} + y\right)(a_1 - x)^2}{\left\{\left(\frac{h}{2} + y\right)^2 + (a_1 - x)^2\right\}^2} \\ \tau'_{yx} &= -\frac{2P}{\pi t} \frac{\left(\frac{h}{2} + y\right)(a_1 - x)}{\left\{\left(\frac{h}{2} + y\right)^2 + (a_1 - x)^2\right\}^2} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

ゆえに、合成組合わせ応力度は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{2P}{\pi t} \frac{\left(\frac{h}{2} + y\right)^3}{\left\{\left(\frac{h}{2} + y\right)^2 + (a_1 - x)^2\right\}^2} \\ \sigma_x &= \frac{M_x \cdot y}{I} - \frac{2P}{\pi t} \frac{\left(\frac{h}{2} + y\right)(a_1 - x)^2}{\left\{\left(\frac{h}{2} + y\right)^2 + (a_1 - x)^2\right\}^2} \\ &= \frac{12M_x \cdot y}{th^3} - \frac{2P}{\pi t} \frac{\left(\frac{h}{2} + y\right)(a_1 - x)^2}{\left\{\left(\frac{h}{2} + y\right)^2 + (a_1 - x)^2\right\}^2} \\ \tau_{yx} &= \frac{Q}{tI} \int_{y_1}^{h/2} by dy - \frac{2P}{\pi t} \frac{\left(\frac{h}{2} + y\right)^2(a_1 - x)}{\left\{\left(\frac{h}{2} + y\right)^2 + (a_1 - x)^2\right\}^2} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{th} \left\{1 - \left(\frac{2y_1}{h}\right)^2\right\} - \frac{2P}{\pi t} \frac{\left(\frac{h}{2} + y\right)^2(a_1 - x)}{\left\{\left(\frac{h}{2} + y\right)^2 + (a_1 - x)^2\right\}^2} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

ゆえに、

$$\sigma_y - \sigma_x = -\frac{2P}{\pi t} \frac{\left(\frac{h}{2} + y\right)^3}{\left\{\left(\frac{h}{2} + y\right)^2 + (a_1 - x)^2\right\}^2} \quad (49)$$

$$\left. -\frac{M_x \cdot y}{I} + \frac{2P}{\pi t} \cdot \frac{\left(\frac{h}{2} + y\right)(a_1 - x)^2}{\left\{\left(\frac{h}{2} + y\right)^2 + (a_1 - x)^2\right\}^2} \right\}$$

ゆえに、最大せん断応力度 $\tau_{\max}$ は

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{yx}^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\left[-\frac{M_x y}{I} + \frac{2P}{\pi t} \frac{\left(\frac{h}{2} + y\right)(a_1 - x)^2}{\left\{\left(\frac{h}{2} + y\right)^2 + (a_1 - x)^2\right\}^2}\right]^2} \\ &\quad + \left[\frac{3Q}{th} \left\{1 - \left(\frac{2y_1}{h}\right)^2\right\} - \frac{4P}{\pi t} \frac{\left(\frac{h}{2} + y\right)^2(a_1 - x)}{\left\{\left(\frac{h}{2} + y\right)^2 + (a_1 - x)^2\right\}^2}\right]^2} \end{aligned} \quad (50)$$

(47), (48), (49), (50) 式において

σ'_x , σ'_y : x 軸および y 軸方向の Rectangular Stress Components の理論による 2 次元的断面応力度
 τ'_{yx} : Rectangular Stress Components の理論による 2 次元的の垂直せん断応力度 (y 軸方向のもの)
 σ_x , σ_y : x 軸および y 軸方向のゲタ全体としての合成断面応力度
 τ_{yx} : ゲタ全体としての垂直せん断応力度 (y 軸方向のもの)

IV. 結 論

上述の (48)~(51) 式は Rectangular Stress Components の理論を用いた解式と単純ゲタの高さと軸圧縮力の変化を考慮せる厳密理論による解式とを合成組合せたものであり、従来の初等単純ゲタ理論との組合わせによる解式に比べ合理的でありはるかに優れていると思う。

そもそも垂直横荷重を受ける単純ゲタに曲げモーメントとせん断力による断面応力度のほかに軸圧縮力が発生するという理論は従来なく、実際と初等理論との不一致を二次

元的応力度と集中荷重の局部応力度の影響^{3,9,10)}を加味することだけによって説明つけていたのである。しかし、できるだけ、ゲタ全体の現象として取扱うほうが理論をすっきりと明確ならしめるものであると思う。

また単純な曲げを受けるハリのタワミと断面応力度との関係は曲げと軸圧縮力を同時に受けるハリのタワミと断面応力度との関係に比べ、かなり相異なるものであるが、この点、底部に支点を有し、支間に比べ断面高さの比較的大きな単純ゲタが垂直横荷重を受ける場合の現象は、曲げと軸圧縮力を同時に受けるハリの現象に似かよっていることが光弾性実験の結果より証明されるところである。なお、今後とも一層単純ゲタの完全な理論を追究する考えである。本論文が稍かでも単純ゲタの応力現象の理論的研究に貢献するところあらば誠に幸いである。ハリに関する一連の研究には北大工学部酒井忠明教授に時々御高言を賜ったことを付し敬意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) 中村作太郎・番匠勲： 高さを考慮せる単純ゲタの光弾性模型実験によるタワミと応力度分布に関する研究

土木学会第 17 回年次学術講演会講演概要 I-78, 第 12 回応用力学連合講演会講演概要 I-124 (土木学会応用力学連合講演会, 1962).

- 2) 新数表シリーズ編集委員会： Table of Normal Distribution (コロナ社, 1961).
- 3) S. Timoschen: Theory of Elasticity (McGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1934).
- 4) 竹山謙三郎： 木構造 (丸善, 1954).
- 5) 中村作太郎： ゲタバリの理想タワミ公式と軸力の変化に関する数学的研究, 第 5 回応用力学連合講演会, 講演概要 I-105 (応用力学連合講演会, 1955).
- 6) 中村作太郎： ゲタバリのタワミ理論に関する基礎的研究 (I), (II), (III) 室蘭工業大学研究報告第 2 巻第 2 号第 3 号, 第 3 巻第 1 号 (室蘭工業大学, 1956, 1957, 1958).
- 7) 栗野保ほか 2 名共訳： フォーサイス微分方式上巻, 下巻 (朝倉, 1948, 1953).
- 8) 福原満洲雄： 微分方程式上巻, 下巻 (朝倉, 1960, 1959).
- 9) Max Mark Frocht: Photoelasticity Vol. 1, Vol. 2 (JOHN WILEY & SONS, INC. 1949, 1948).
- 10) E. G. Coker; L. N. G. Filon: A treatise on Photo-Elasticity (CAMBRIDGE 1957).