土木学会北海道支部　技術資料　第十八号

急勾配開水路関係模型実験における フルード相似律の意義について

正員　北海道大学工学部　工博　尾　崎　晃

要　旨

開水路の流れや，波などのように自由水面を有する水の運動を模型実験によって研究する場合に，フルード相似律が用いられるのは周知のごとくであるが，その場合には流体の粘性による勢力損失に関しては微小であるとして無視しているので，これの影響がある程度以上に達するような問題に対して，この法則を適用するに当ってはその現象をよく理解し，フルード相似律のなり立ちを根本から考えてみる必要がある。本項はこの点に関し考察を行なったものである。

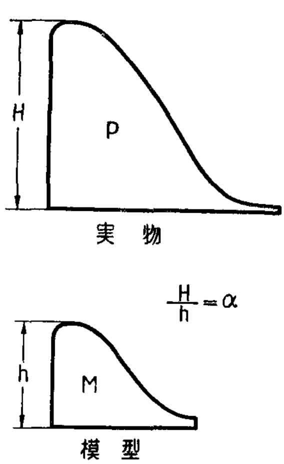
内　容

1. フルード相似律の成立条件

開水路の水流は重力の作用によって発生するものであるから，実物とそれの縮尺模型との相対応する点においてフルード数が等しくなるためには，次の条件がみたされなくてはならない。

i) 流体がまったく粘性のない理想流体であって，まさつ損失がない場合。

ii) 粘性を有する実在流体でも実物における energy loss の割合と，模型におけるそれとがまったく等しい場合。



図—1

この2項は次のようにして証明される。今図-1の P を実物，M を模型とすると，余水路末端における流速は，

実物　$v_p=\sqrt{2gH}$

模型　$v_m=\sqrt{2gh}$

$$\frac{v_p}{v_m}=\sqrt{\frac{H}{h}}=\alpha^{1/2} \qquad (1)$$

したがって模型が実物の $1/\alpha$ の縮尺の場合には

$$v_p=\alpha^{1/2}v_m$$

以上は，流体に粘性がまったくないと仮定した場合である。

次に実在流体の場合では粘性によるまさつ損失があるので，流速はそれぞれ

実物　$v_p=M\sqrt{2gH}$

模型　$v_m=m\sqrt{2gh}$

M および m は1より小さい係数

したがって

$$\frac{v_p}{v_m}=\frac{M}{m}\alpha^{1/2}$$

ゆえに $M=m$ の場合には，これは(1)式と同じになりフルードの相似律が成り立つ。もし $M\neq m$ の場合には $M/m=\beta$ とおけば，

$$\frac{v_p}{v_m}=\beta\alpha^{1/2} \qquad (2)$$

となり，フルード相似律によって模型から実物へ換算するに当っては β なる修正係数をかけなくてはならない。ここに M および m はそれぞれ，実物および模型の余水路上における種々の損失をすべて含む1より小さいある係数で，しかもその値は水路の始点から流下距離 x の関数として変化する値である。現実の問題として $\beta=1$ になることはまずあり得ない。$\beta=1$ は energy line の勾配が等しいことである。

今 $M/m\neq1$ の場合に，$M/m=\beta>1$ とすると，実物および模型の流量・流水断面積・流速を

実物　Q_p　A_p　v_p

模型　Q_m　A_m　v_m

とすると

$$v_p=\beta\alpha^{1/2}v_m \qquad (3)$$

$$A_p = \alpha^2 A_m \tag{4}$$

$$Q_p = A_p v_p = \beta\alpha^{5/2} A_m v_m = \beta\alpha^{5/2} Q_m \tag{5}$$

したがって

$$\frac{Q_p}{\alpha^{5/2}} = \beta Q_m \tag{6}$$

すなわち，粘性に基づく energy loss の存在する流れでは模型に流す流量は(6)式の関係により，普通のフルード相似律の換算による $Q_p/\alpha^{5/2}=Q_m$ よりも小さくしなくては，幾何学的相似が成立しない。

もし $Q_m=Q_p/\alpha^{5/2}$ をそのまま流した場合には

$$A_m = \frac{Q_m}{v_m} \frac{\frac{Q_p}{\alpha^{5/2}}}{\frac{v_p}{\beta\alpha^{1/2}}} = \frac{Q_p}{v_p}\frac{\beta\alpha^{1/2}}{\alpha^{5/2}} = A_p\frac{\beta}{\alpha^2}$$

$$A_p = B_p H_p = \alpha B_m \cdot \alpha H_m \quad (B\text{ は，水路幅})$$

$$\therefore \quad A_m = B_m H_m = \frac{\alpha B_m H_p \beta}{\alpha^2}$$

$$\therefore \quad H_m = \frac{\beta}{\alpha} H_p \tag{7}$$

すなわち，$Q_m=Q_p/\alpha^{5/2}$ の割合で模型余水路に通水した場合には，そのときの水深は実物の $1/\alpha$ よりも β 倍だけ大である。ここで M および m はおのおのの問題ごとに求めるべき性質のものである。

2. 急勾配開水路水流に関するフルード相似律に対する従来の考え方

ダム余水路などの急勾配開水路に関する数多くの水理模型実験報告書，その他同じ主題に関する内外の論文中に記載されている，フルード相似律の考え方をここで一つ一つ取り上げてみる。

これらのものより，フルード相似律をいままでどのように考えていたかが明らかになる。

まず電力技術研究所の「湯原堰堤洪水吐水理模型実験」[1]（昭和 28. 10）の中では以下のように述べてある。（本実験においては相似律法則としてはフルード数を取った。

すなわち $F=\dfrac{V}{\sqrt{gd}}$ を相似に取ったのである。跳水安定化のために Baffle pier を設けたのであり，そのような場合に粘性の問題などを無視することは危険と考えられるが，現段階では適当な相似法則が定まらず，今後の研究にまつものである。……）

猿谷ダム水理模型実験[2]（昭和 31 年 11 月）──建設省土木研究所報告──の中では（……模型は 1/25 とし，形状および流量，流速などの換算はフルードの相似律が成立するものと考えた。……（中略）……圧力の値を実物に換算する方法として，圧力の平均値はフルードの相似律によって行なったが，その頻度，平均よりの変動はフルードの相似律でよいかどうかは疑問があり，今後の問題として残る。）と述べている。以上いずれも成立するものと考えた，あるいは現段階では適当な相似法則が定まらず，などと表現しており，ここにおいてもこの法則成立の問題が，はっきりした理論的根拠により究明されていないことを示している。

次に岩崎敏夫氏は，「デフレクターによる流れの偏向機構について」[3] の中で（…… crest 上の head が小さい間は E/E_0'* の値が小さくなることから，crest より apron までのまさつ損失が実物に較べると模型においてはかなり大きい量に達して相似関係がなり立たないのではないかと思われる。このことよりすれば実物での jet の飛散範囲は，流量が小さい場合には模型実験によって示された範囲よりかなり遠くに及ぶのではないかと推定される。）と述べている。上記のようにまさつ損失が模型においてはかなり大きい量に達して……と言及しているが，これを数量的に取り扱うことが問題として残っている。

また，「田瀬堰堤の余水吐に関する模型実験」[4]（昭和 30.3）では（……本模型においては両者のうち，この場合影響がはるかに大きいと思われるフルード数を実物と模型とで一致させることにした。したがって当然実物と模型のレノーズ数は異なることになるが，この影響についてはまだ不分明の点が多いので，将来究明を要すると思う。……）（越流係数 C についてはフルード法則によれば，C の縮率は 1 である。よって粘性の影響を無視するときは，実物にそのまま適用できるが，実際には表面まさつが実物と模型とでかなり異なるはずであるから，いかに補正すべきかということは今後究明を要する重要な問題である……）と述べている。

under line のカ所のように，フルード数を実物と模型とで一致させることとしたというが，開水路の水流はさきにもいったように重力の作用による運動であるから，幾何学的相似な模型においては人為的に一致させることは困難である。

以上のようにこれらの問題はいずれもまだ未解決のまま残されている。

また，岩崎氏の「挊瀬ダム余水吐水理模型実験報告書」[5]（昭和 34. 3）においては以下のように述べている。（……最

* E：水タタキ上における水脈の実際の勢力，E_0'：同じく理論上の全勢力。

後に以上の模型実験の相似性について考えてみる。採用した相似律は，フルード相似法則であって，重力の作用が卓越したものとしてとられている。水路のまさつの影響は粗度係数が 表-1* の比率である限り，流れが乱流で Manning のまさつ公式が成立するとすれば，相似律が満足すると考えてよい。しかしすでに以前に考察したとおりに，模型はやや粗度が大き過ぎるから，実際の場合よりもまさつの影響が顕著に表われすぎる。しかしどの程度の補正をしたらよいかについては，この水路において二次元流を生ぜしめて測定しなければ正しい評価はできない。…・）と。

*表—1

量	換算式	換算比
粗度係数	$R_r = L_r^{1/6}$	1/1.979

以上のように全体としてはフルード相似律によるが，まさつ損失の分だけは Manning のまさつ公式によるという考え方で，この方法も実際に多く用いられている。しかし最初にも述べたように Manning の公式は完全な等速流状態に対して成立するものであるから，延長の短かい余水路に適用するには相当の無理がある。また模型はやや粗度が大き過ぎるからと述べているが，普通に用いられる縮尺(1/70～1/20 の範囲）の余水路模型では塗装仕上げによる滑面は完全な滑面として製作することが可能であって，(笹瀬ダム余水路模型の場合も，木製サンドペーパー磨きの上にラッカー仕上げをしたもの）むしろ小流量の場合には層流になるくらいであるから，粗度が大き過ぎるという考え方は妥当でないと思われる。実際の場合よりもまさつの影響が顕著に表われることは事実であるが，これは粗度の問題ではなくて，模型のレノーズ数が小さいことによるためのものと考えられる。

次に外国文献中にみられる同様の記述について 2•3 検討してみる。

Justin はその著書[6] の中で，(……模型の縮尺が適当に——1/10から1/100の範囲で—— 決定されたなら,その模型による実験で得られた結果を，それぞれのふさわしい比率を乗じて，実物に生じうると予想される量に換算する。模型実験は正規の状態で働いている実際の構造物上に生ずる状況を予見せしめ，定量的，または定性的な結果を与えるものである。）と述べている。しかしここで問題になるのは，模型実験で得られた結果に乗ずる“ふさわしい比率”(proper quantity ratios) であって，単にフルード相似律によって縮尺倍(長さ：L_r倍，速度：$L_r^{1/2}$倍，流量：$L_r^{5/2}$倍など）しただけでは実際と一致しない。特に模型の縮尺が小さくなればなるほど，この方法では差が著しくなる。

R. W. Powell[7] はその著書において，(問題の中には，まさつの影響はほとんど二次的で，それを無視しても差支えのないものが相当多い。この種の代表的なものは余水路の流れ (over flow spillway, side channel, morning geory type など)，および跳水の問題である。実物と幾何学的相似に作られたこれらの模型が，

$$F_r = \frac{u_m}{\sqrt{l_m g}} = \frac{u_p}{\sqrt{l_p g}} \tag{8}$$

式で表わされる動力学的相似にしたがうものと仮定するならば，ほとんど大部分の実際問題に対しては，長さ L_r 倍，速度 $L_r^{1/2}$ 倍などのフルード相似律で十分近似される。）といっている。

ここでも，(8) 式で表わされる動力学的相似にしたがうものと仮定すれば云々といっている。この点が問題なのであって，この仮定の成り立つ領域を量的に決めなくてはならない。また彼は続けて，(模型は可能な限り小縮尺のものを用いるほうが経済的に有利で望ましいが，その際にはレノーズ数は実物のそれに比べて非常に小さくなり，模型は実物の流況とまったく違ったものを示すようになる。）といっている。事実，層流境界層が発生する場合も起こるのであるから，これは妥当な見解である。しかしこの点については縮尺の限界を量的に論ずる必要があると考える。

R. Maitre and Obolensky 両氏はその論文中[8] で，(……これらの高速流に関する相似法則は流れが大流量であると同時に表面からの空気混入が少ない場合にはとくに有効である。相似法則に関する限り，ただ一つの困難は，実物と同じ割合の粗度を正しく模型上に表現することであって，粗度 ε (equivalent sand roughness) は境界層の発達に著しい影響を及ぼすものである。）と述べている。ここでいう相似法則とはもちろんフルード相似律のことである。

しかし以上のことについては次のような疑問が残る。すなわち実際の模型技術上の問題としては，粗度 ε を正しく縮尺に合わせて，模型上に作ることは不可能であると同時に，またたとえなんらかの方法によってそれができたとしても無意味なことのように考えられる。それは粗度 ε が，たとえば $\frac{\varepsilon u_*}{\nu}<5$ となればそれはもう境界層の中に埋もれて，粗度としての意味を持たなくなる。この点にも縮尺の限界を考える一つの要素がある。

Handbook of Applied Hydraulics[9] のなかで，G. H. Hickox は以下のように記述している。(……水工構造物の模型の縮尺の決定に当っては，期待する結果の精度，実験室の面積，ポンプの容量，経費をよく考慮しなくてはならないが，一般的にいって模型はできるだけ大縮尺のものが望ましい。フルード相似律が用いられる場合には，流量の比率は $Q_r = L_r^{5/2}$ となるが，これは実物と模型の両者における流れの状況はまったく相似であり，かつ両方の流量係数は等しいという仮定の上になり立っている。そしてこの

仮定の部分に関する検証は現在のところはなはだ心細いものである。模型実験の結果をそれの実物について定量的に比較した例によれば，模型上の水深が最小限 10 cm 以上ある場合には， その実験結果は 2〜3% の誤差で信頼できるということである。しかし小縮尺の模型ではまさつの影響はもう無視できなくなる。だがこれに対する補正の方法はまだみいだされていない。)ここにみられるように模型の縮尺と流れの状況 (pattern) との関係についての検証が未解決であると述べられているが，この点については模型水路の流れにおける境界層に層流領域・遷移領域・乱流領域が表われる限界を，模型の縮尺・流量・水路表面の性質との関係において検討すれば解決のできる問題である。

また同じく Handbook of Applied Hydraulics の spillway に関する模型実験の項では，(……。余水路模型は当然水タタキおよび下流河川の状態を実物と同じ条件にして行なわれるべきものである。したがって余水路から水タタキへ流入する水脈の状態を，実物と同じ条件にしてやらなければ，その実験で得られた結果は正しいものとはいわれない。) と述べられている。下流河川の水位，流況などが正しく見積られ，実物と同一条件になっていたとしても，余水路から突入する水脈の勢力の見積りが正しく行なわれなければ，すなわちまさつによる勢力損失の算定が正確でなければ，その実験結果は適当なものではないということになる。

3. フルード相似律の従来の考え方に対する批判

第2項において，主として余水路などのような急勾配開水路の模型実験に適用される場合のフルード相似律の取り扱い方に関する，内外の各研究者の考え方を実例をあげて説明し，またその都度簡単に著者の見解を述べてきたが，ここにそれらを今一度総括すると以下のとおりである。

i) ダム余水路の模型実験報告書の多くのものによれば，模型と実物とでフルード数を一致させるようにしたと述べられているが，これはどのような意味において可能となるのであろうか。レノーズ相似律による問題の場合，たとえば管水路の水流の相似を論ずるような場合には，小さい管においても大きな head をかけて流速を速めることにより，大きな管のレノーズ数に等しいレノーズ数を出現させることが，ある程度までは可能であるが，自然の落差による流れである開水路水流の場合には，長さの縮尺が決まれば，(すなわち幾何学的相似な模型においては)，流速もみずから定まって，レノーズ数の場合のように人工的に実物と模型とで等しいフルード数をつくることはできない。したがって，実物と模型とのフルード数を一致させるようにしたとか， または両者でフルード数が一致する (フルード相似律が成立するということ) と考えたなどというのは， 厳密にはなんら理論的根拠のないことである。

ii) まさつの影響はほとんど二次的であるので考慮しなくてもよいという点であるが， 1のようにフルード相似律がなり立つのはこの場合に限るのである。しかし比較的良好な近似でこれが適用されるのは，大縮尺の模型の場合だけであって，最も多く用いられる 1/20〜1/50 程度の縮尺にはもうあてはまらないのであるから，まさつの影響を無視することはできない。したがってこれに対するフルード相似律の補正を考えなくてはならない。

iii) 実物と相似な粗度を模型に再現しなくてはならないという考えは誤りであり，また仮に正しいとしてもそのようなことは技術的に不可能である。模型の粗度は，単に実物と模型の両者における流れの pattern を一致させる上においてのみ重要なのであって，実物の境界層が乱流ならば模型のそれもまた乱流になるようにする。また実物の流れが完全粗面の抵抗法則にしたがう領域にある場合には，模型の流れも同じく完全粗面領域になるように粗度を調整しなければならないが，しかしこれは粗度を幾何学的に相似にすることによっては解決されない。

iv) 模型におけるまさつ損失の比率 (全水頭に対する) 方が実物よりも大きいことは事実であるが，これは模型の粗度の縮尺が大き過ぎることによるものではない。純滑面の模型においてもまさつ損失の比率は実物よりも大である。これは模型のレノーズ数が実物のそれよりも小さいことに起因する。

要するにフルード相似律が近似的にもせよ，とにかくなり立つのは，skin friction flow の領域だけであって，臨界点以下の internal friction flow ではもう役に立たない。この後者に対しても他に適当な法則がないので用いられているが，その場合には (2) 式から (7) 式までの補正をほどこさなくてはならない。またこれは重要な点であるが，模型の $F_{r(m)}$ を実物と一致させるといっても実物の $F_{r(p)}$ がわからなくてはどうにもならない。実物の $F_{r(p)}$ はまさつを無視したり， 場合によっては Manning 式などでまさつ損失を見積ったりして計算されるものであるが，これは実物による実測値と照合することが肝要で，そのためにもこの種の研究を完成する上には実際の構造物についての観測がきわめて重要であるといえよう。

引 用 文 献

1) 電力技術研究所： 湯原 堰堤洪水吐水理 模型実験 (昭 28.10).
2) 村 幸雄・永田二生： 猿谷ダム水理模型実験，建設省土木研究所報告，第 96 号の 5.
3) 岩崎敏夫： デフレクターによる流れの 偏向機構 について，土木学会論文集第 33 号.

4) 村　幸雄・荒木正夫・森　正秋： 田瀬堰堤の余水路に関する模型実験，建設省土木研究所報告，第 89 号.
5) 岩崎敏夫： 皆瀬ダム余水吐水理模型実験報告，東北大学工学部土木教室 (昭 34. 3).
6) Justin, Hinds, Creager: Engineering for Dams (John Wiley & Sons).
7) R. W. Powell: Mechanics of Liquids (Macmilan).
8) R. Maitre and S. Obolensky: Study of Some Flow Characteristics in the Downstream Part of Spillways. La Houille Blanche No 4, 1954.
9) Davis: Handbook of Applied Hydraulics, 1942.