

合成ゲタのジベルに関する振動学的考察

正員 室蘭工業大学 教授 工博 能 町 純 雄

正員 北海道土木部 技師 工 藤 和 雄

○正員 室蘭工業大学 助教授 工修 尾 崎 詔

1. 緒 言

さきに筆者らはズレを考慮した有限個のジベルで結合された合成ゲタの静力学的挙動を明らかにし¹⁾、差分および Affinlastengruppe を用いて各種荷重に対するジベルせん断力あるいは合成ゲタ各部の応力を求め得ることを明らかにしたが²⁾、今回はこれの振動の問題を検討してみた。ただし、さきの研究の結果、連続したジベルで合成されていると仮定したものと大差のないことがわかったので、コンクリート床版と鋼ゲタはズレのある連続したジベルで結合されているものとして取り扱うことにする。

2. 基本式の誘導³⁾

いま、コンクリート床版と鋼ゲタが全スパンを通して同一のズレ定数をもったジベルで連続的に結合されていると仮定する。このとき x なる位置におけるジベルの単位せん断力 T_x はズレに比例すると考えると、ズレ定数 C を用いて

$$T_x = C \cdot \delta_x \quad (1)$$

ここで δ_x は x 位置におけるコンクリートと鋼との間のズレで、図-1にあるように

$$\delta_x = (dx + \Delta dx_s) - (dx + \Delta dx_b)$$

なる関係があるから、(1) 式は

$$\frac{dT_x}{dx} = C \left(\frac{\Delta dx_s}{dx} - \frac{\Delta dx_b}{dx} \right) \quad (2)$$

ただし、上式中 $\frac{\Delta dx_b}{dx}$ および $\frac{\Delta dx_s}{dx}$ は、それぞれコンクリート床版と鋼ゲタのヒズミで、つぎのように書ける。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta dx_b}{dx} &= -\frac{N}{E_b A_b} + \frac{M_b}{E_b I_b} \cdot \frac{d}{2} \\ \frac{\Delta dx_s}{dx} &= \frac{N}{E_s A_s} - \frac{M_s}{E_s I_s} \left(a - \frac{d}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

上式中、 E_b 、 E_s はそれぞれコンクリートおよび鋼の弾性係数、 A_b 、 A_s は同上断面積、 I_b 、 I_s は同上断面二次モーメント、 N は同上重心に作用する軸力、 M_b 、 M_s は同上重心に作用する曲げモーメント、 a は同上重心間の距離、 d はコンクリート床版の厚さである。

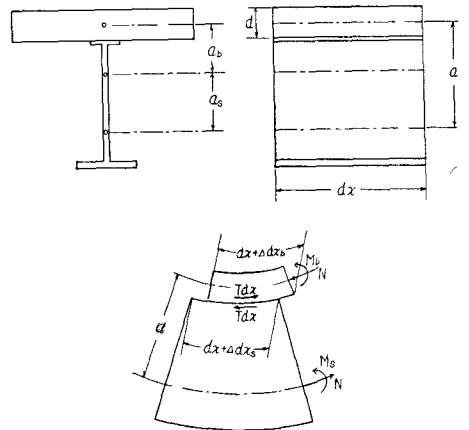


図-1 合成ゲタ断面と記号

一方、コンクリート床版と鋼ゲタが同じ曲率を有するとすれば、

$$\frac{M_b}{E_b I_b} = \frac{M_s}{E_s I_s} \quad (4)$$

したがって、(2)、(3) 式および $\frac{dT}{dx} = \frac{d^2 N}{dx^2}$ の関係を用いて

$$\frac{d^2 N}{dx^2} = CN \left(\frac{1}{E_b A_b} + \frac{1}{E_s A_s} \right) - aC \frac{M_b}{E_b I_b} \quad (5)$$

また外力のモーメント M との釣合から

$$M = N \cdot a + M_b + M_s \quad (6)$$

したがって、(4) 式は

$$\left. \begin{aligned} M_b &= \frac{E_b I_b}{E_b I_b + E_s I_s} (M - N \cdot a) \\ M_s &= \frac{E_s I_s}{E_b I_b + E_s I_s} (M - N \cdot a) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(5)、(7) 式より次のような基本式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 N}{dx^2} - \omega N &= -rM \\ \text{ただし} \\ \omega &= \frac{aIC}{a_b A_b E_b (I_b + nI_s)} \\ r &= \frac{aC}{E_b (I_b + nI_s)} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

上式中、 I はコンクリート換算の合成断面の断面二次モーメント、 ab は合成断面重心とコンクリート重心との距離、 n は弾性比である。

3. 自由振動について

さきに求めた基本式 (8) とモーメントの釣合の式 (6) とから

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \omega\right) \left(\frac{M}{a} - \frac{M_b + M_s}{a}\right) = -rM \quad (9)$$

両辺を x で二度微分して

$$\frac{1}{a} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \omega\right) \left\{ \frac{d^2 M}{dx^2} - \left(\frac{d^2 M_b}{dx^2} + \frac{d^2 M_s}{dx^2}\right) \right\} = -r \frac{d^2 M}{dx^2} \quad (10)$$

ここで

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{W}{g} \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$M_b = -E_b I_b \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$M_s = -E_s I_s \frac{d^2 y}{dx^2}$$

なる関係式を適用すればつぎのようになる。

$$\frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \omega\right) \left\{ \frac{W}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} (E_s I_s + E_b I_b) \right\} = -r \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot \frac{W}{g} \quad (11)$$

さて両端単純支持の場合 $p_m/2\pi$ を第 m 次の振動数とすれば、

$$y = Y_m \sin p_m \cdot t$$

とおくことができ、境界条件より

$$Y_m = A_m \sin \frac{m\pi}{l} x$$

であるから

$$\frac{1}{a} \left\{ \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \omega \right\} \left\{ \frac{W}{g} p_m^2 + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 (E_s I_s + E_b I_b) \right\} = r \cdot \frac{W}{g} p_m^2$$

ただし、

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

$$\therefore p_m^2 = \frac{E_b (I_b + n I_s) \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \left\{ \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \omega \right\}}{\frac{W}{g} \left\{ \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \omega - ar \right\}} \quad (12)$$

これに (8) 式の ω, r の値、および $ab = a \frac{n A_s}{A_b + n A_s}$ の関係を代入すると

$$p_m^2 = \frac{E_b (I_b + n I_s) \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 \left\{ \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \frac{a I C}{a_b A_b E_b I_b + n I_s} \right\}}{\frac{W}{g} \left\{ \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \frac{a C}{a_b A_b E_b} \right\}}$$

これを整理すればつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} p_m^2 &= \frac{E_b I \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4}{\frac{W}{g}} \times \frac{1 + \alpha_m \cdot \beta}{1 + \alpha_m} \\ \alpha_m &= \frac{a_b A_b E_b}{a C} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \\ \beta &= \frac{I_b + n I_s}{I} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここで

ところで、ズレのない完全合成ゲタの場合は

$$p_{0m}^2 = \frac{E_b I \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4}{\frac{W}{g}}$$

であるから、ズレを考慮した場合、ズレの影響係数を K_m とすれば、

$$p_m^2 = K_m \cdot p_{0m}^2 \quad (14)$$

で表わされ、ズレの影響係数はつぎのようになる。

$$K_m = \frac{1 + \alpha_m \cdot \beta}{1 + \alpha_m} \quad (15)$$

ところで、自由振動の場合、第 1 次の振動が常に優先するから、 $m=1$ について示せば、

$$\left. \begin{aligned} p^2 &= \frac{E_b I \left(\frac{\pi}{l}\right)}{\frac{W}{g}} \cdot K \\ K &= \frac{1 + \alpha \beta}{1 + \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

となり

なる値を示す。ただし、 α, β もつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{a_b A_b E_b}{a C} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \\ \beta &= \frac{I_b + n I_s}{I} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

4. 強制振動について

粘性を考慮し、強制力を $U \cdot \sin \mu t$ とおくと、

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{W}{g} \frac{d^2 y}{dt^2} + k \frac{dy}{dt} - U \sin \mu t \quad (18)$$

また

$$M_b = -E_b I_b \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad M_s = -E_s I_s \frac{d^2 y}{dx^2}$$

であるから、これらの関係式を (10) 式に適用すれば、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \omega + ar\right) \left\{ \frac{W}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + k \frac{\partial y}{\partial t} \right\} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \omega\right) \times \left(E_s I_s + E_b I_b\right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \omega + ar\right) U \sin \mu t \quad (19)$$

強制力を $q_m \sin \mu t \cdot \sin \frac{m\pi}{l} x$ で表わし、上式の $\sin$ 展開の第 m 項をとれば

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \omega - a\tau \right\} \left\{ \frac{W}{g} \frac{d^2 Y_m}{dt^2} + k \frac{dY_m}{dt} \right\} \\ & + \left\{ \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \omega \right\} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 (E_s I_s + E_b I_b) Y_m \\ & = \left\{ \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \omega - a\tau \right\} q_m \sin \mu t \end{aligned} \quad (20)$$

上式中、 $Y_m = F_m \sin \mu t + G_m \cos \mu t$ として代入すると、

$$\begin{aligned} & \frac{W}{g} \left\{ \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \omega - a\tau \right\} \left[\left\{ F_m (p_m^2 - \mu^2) - \frac{g}{W} k G_m \mu \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{g}{W} q_m \right\} \sin \mu t + \left\{ G_m (p_m^2 - \mu^2) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{g}{W} k F_m \mu \right\} \cos \mu t \right] = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

ただし、(12) 式からもわかるように、

$$p_m^2 = \frac{E_b (I_b + n I_s) \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 \left\{ \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \omega \right\}}{\frac{W}{g} \left\{ \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \omega - a\tau \right\}} \quad (22)$$

$$\begin{cases} F_m (p_m^2 - \mu^2) - G_m \frac{g}{W} k \mu = \frac{g}{W} q_m \\ G_m (p_m^2 - \mu^2) + F_m \frac{g}{W} k \mu = 0 \end{cases} \quad (23)$$

これを解いて

$$\begin{cases} F_m = \frac{g}{W} \frac{q_m (p_m^2 - \mu^2)}{(p_m^2 - \mu^2)^2 + 4\nu^2 \mu^2} \\ G_m = -\frac{g}{W} \frac{2q_m \nu \mu}{(p_m^2 - \mu^2)^2 + 4\nu^2 \mu^2} \end{cases} \quad (24)$$

ただし、

$$\nu = \frac{gk}{2W}$$

$$\begin{aligned} \therefore Y_m &= \frac{g}{W} \cdot \frac{q_m}{(p_m^2 - \mu^2)^2 + 4\nu^2 \mu^2} \left\{ (p_m^2 - \mu^2) \sin \mu t \right. \\ & \left. - 2\nu \mu \cos \mu t \right\} \\ &= \frac{g}{W} \frac{q_m}{\sqrt{(p_m^2 - \mu^2)^2 + 4\nu^2 \mu^2}} \sin (t - \xi_m) \mu \end{aligned} \quad (25)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \frac{p_m^2 - \mu^2}{\sqrt{(p_m^2 - \mu^2)^2 + 4\nu^2 \mu^2}} &= \cos \xi_m \mu \\ \frac{2\nu \mu}{\sqrt{(p_m^2 - \mu^2)^2 + 4\nu^2 \mu^2}} &= \sin \xi_m \mu \end{aligned}$$

つぎの (20) 式において

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \omega - a\tau \right\} \left\{ \frac{W}{g} \frac{d^2 Y_m}{dt^2} + k \frac{dY_m}{dt} \right\} \\ & + \left\{ \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \omega \right\} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 (E_s I_s + E_b I_b) Y_m = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

とおいた場合を計算する。

上式中、 $Y_m = A e^{i\mu t}$ において代入すると

$$\lambda^2 + \frac{g}{W} k \lambda + p_m^2 = 0 \quad (27)$$

ただし、

$$p_m^2 = \frac{E_b (I_b + n I_s) \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 \left\{ \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \omega \right\}}{\frac{W}{g} \left\{ \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \omega - a\tau \right\}}$$

これを解くと

$$\lambda = -\nu \pm \sqrt{\nu^2 - p_m^2}$$

ただし

$$\nu = \frac{gk}{2W}$$

$$\therefore Y_m = e^{-\nu t} (A_m \sin \sqrt{p_m^2 - \nu^2} t + B_m \cos \sqrt{p_m^2 - \nu^2} t) \quad (28)$$

したがって (25)、(28) 式からつぎの一般解が得られる。

$$\begin{aligned} y &= \sum_m \left\{ e^{-\nu t} (A_m \sin \sqrt{p_m^2 - \nu^2} t + B_m \cos \sqrt{p_m^2 - \nu^2} t) \right. \\ & \left. + \frac{g}{W} \frac{q_m}{\sqrt{(p_m^2 - \mu^2)^2 + 4\nu^2 \mu^2}} \sin (t - \xi_m) \mu \right\} \sin \frac{m\pi}{l} x \end{aligned} \quad (29)$$

上式において、第1項は自由減衰振動を、第2項は強制振動を表わしている。

5. 考 察

以上のようにして求めた不完全合成ゲタの振動に関する諸式を用いて、ジベルの合成効果を振動学的に求めることができる。

たとえば、振動実験によって固有振動数 p を直接求めた場合には、これからただちにズレの影響係数 K を知ることができる。また、強制振動の場合には、 μ を変化させるためにいくつかの異なった強制力を別々に与えることによって測定できる最大振幅あるいは最大加速度から p_m を計算することが可能であるから、これからもズレの係数 K_m を知ることができる。

この合成効果を示すズレ定数 K がわかればジベルのズレ定数 C は求まるのであるが、2, 3 の実例にて、この C と K との関係を示すと 図-2 のようになる。ここに実例としてあげたのは、表-1 および 表-2 のような諸値を有する実在バリの合成ゲタと 表-3 および 表-4 のような諸値を有する模型合成ゲタの4種である。

その結果は 図-2 にて見ればわかるように、実際の橋梁に用いられる合成ゲタではズレ定数 $C = 10,000 \text{ kg/cm}^2$ 以上の場合には完全結合と考えたものより約1%程度の減少しかみられないが、 $C = 1,000 \text{ kg/cm}^2$ では10%程度のズレの影響がでている。また、小スパンの模型ゲタでは $C = 10,000 \text{ kg/cm}^2$ 程度でも30%ものズレの影響を示しており、断面のえらび方によってはかなりの影響を示すので、この点を

表-1 スパン30m 合成ゲタの諸値

$l = 30 \text{ m},$	$A_b = 2,700 \text{ cm}^2,$	$I_b = 50,620 \text{ cm}^4,$	$a_b = 32.9 \text{ cm}$
$n = 10$	$A_s = 181.3 \text{ cm}^2,$	$I_s = 891,660 \text{ cm}^4,$	$a_s = 49.1 \text{ cm}$
$C\alpha = 249.7$	$\beta = 0.5519,$	$E_b = 210,000 \text{ kg/cm}^2,$	$a = 82.0 \text{ cm}$

表-2 スパン45m 合成ゲタの諸値

$l = 45 \text{ m},$	$A_b = 5,600 \text{ cm}^2,$	$I_b = 187,000 \text{ cm}^4,$	$a_b = 58.8 \text{ cm}$
$n = 7,$	$A_s = 543.4 \text{ cm}^2,$	$I_s = 3,839,700 \text{ cm}^4,$	$a_s = 86.6 \text{ cm}$
$C\alpha = 208.2,$	$\beta = 0.3300,$	$E_b = 300,000 \text{ kg/cm}^2,$	$a = 145.4 \text{ cm}$

表-3 スパン112cm の横型合成ゲタの諸値

$l = 112 \text{ cm},$	$A_b = 160 \text{ cm}^2,$	$I_b = 416 \text{ cm}^4,$	$a_b = 5.6 \text{ cm}$
$n = 10,$	$A_s = 19.8 \text{ cm}^2,$	$I_s = 800 \text{ cm}^4,$	$a_s = 4.5 \text{ cm}$
$C\alpha = 14,630,$	$\beta = 0.4815,$	$E_b = 210,000 \text{ cm}^4,$	$a = 10.1 \text{ cm}$

表-4 スパン250cm の横型合成ゲタの諸値

$l = 250 \text{ cm},$	$A_b = 264 \text{ cm}^2,$	$I_b = 1,058 \text{ cm}^4,$	$a_b = 6.35 \text{ cm}$
$n = 7,$	$A_s = 24 \text{ cm}^2,$	$I_s = 1,668 \text{ cm}^4,$	$a_s = 9.98 \text{ cm}$
$C\alpha = 4,861$	$\beta = 0.3176,$	$E_b = 300,000 \text{ cm}^4,$	$a = 16.33 \text{ cm}^2$

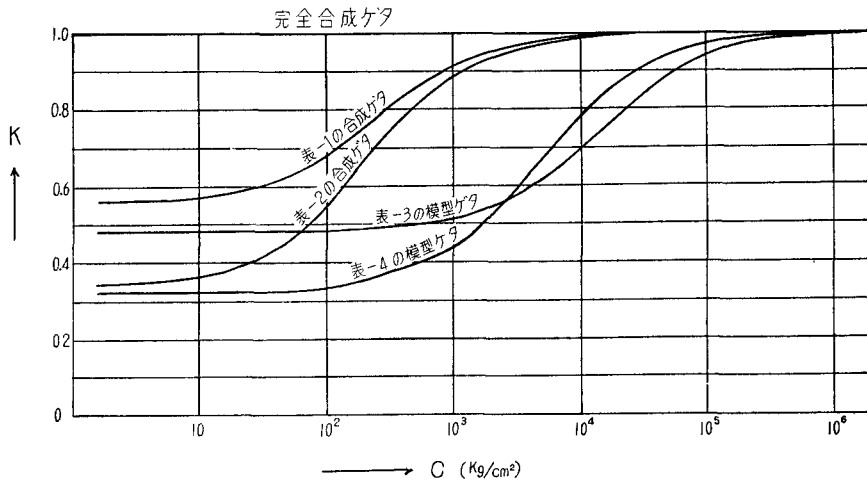


図-2 ズレの影響係数 K の値

利用して実際に使用するジベルのズレ定数を実験室の模型ゲタにて調べることもできる。

以上、ジベルのズレを考えた不完全合成ゲタの振動について述べたが、最近合成ゲタ橋の振動実験を網走土木現業所、三条橋にて実施しており、模型ゲタによる実験も近く行なうので、講演の際にはこの点にもふれたい。

なお、本研究は北海道科学研究費補助金を受けているものである。

文 献

- 1) 能町純雄・尾崎諒：数個所で結合されている合成桁について、土木学会第15回年次学術講演会概要(1960)。
- 2) 能町純雄・尾崎諒：合成桁のジベルについて、土木学会北海道支部技術資料、第17号(1961)。
- 3) Hawranek und Steinhardt: Theorie und Berechnung der Stahlbrücken, (1958)。
- 4) 能町純雄・尾崎諒：合成桁における個有値問題について、室蘭工業大学研究報告第3巻、第4号(1961)。