

ポリゴン線形を有する連続バリについて

正員 室蘭工業大学教授 工博 能 町 純 雄

1. は し が き

線形を重視して橋梁をその一部と考えるのは最近の常識であるが、このため単純な円弧はもちろんクロソイド線形をもつ連続バリなども要求されるわけで、円弧橋などではケタそのものを曲線形に作製しているものもあるが、製作上はその曲線に内、外接するポリゴンとするのが簡単で無理な製作上の初期応力も避けられるから主ゲタはポリゴンとし床板をその線形に合わせて形成すれば実用上差支はなく便利と思われる。このような見地から支点を頂点とするポリゴン線形の連続バリの応力解析を次に試みる次第である。

2. 仮定と予備公式

まず計算に先立って次の仮定を設ける。同一径間で断面は一定とする。支点におけるハリの交角はすべて一定とする。ハリのネジレに対してはサンベナンのネジレ抵抗のみを考え曲げネジレについての考慮は行なわない。支点における交角の二等分線を法線方向としこれと直角な直線を切線方向とする。したがって接線とハリとのなす角はすべて等しくこれを α とおく、支点は0から始まり n で終わる。ハリは1から始まり n で終わる。支点 r におけるハリ $r+1$ の軸方向とこれと直角方向の角変化 φ_r^r , $\bar{\varphi}_r^r$ とする。下の添字は支点の位置、上の添字は支点の右を示す。同じく支点 r におけるハリ r の軸方向ごとに直角方向の角変化を φ_r^r , $\bar{\varphi}_r^r$ と表わす。

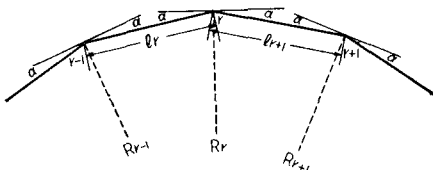
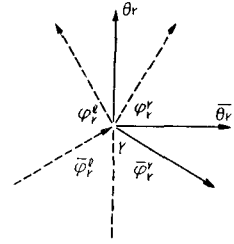


図-1 連続バリの線形

上の添字 l は支点の左を示す。また r 点の法線方向の角と接線方向の角を θ_r , $\bar{\theta}_r$ とする。これは図-2のようなベクトルで示され、

$$\left. \begin{aligned} \varphi_r^l &= \theta_r \xi + \bar{\theta}_r \eta \\ \bar{\varphi}_r^l &= \theta_r \xi - \bar{\theta}_r \eta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

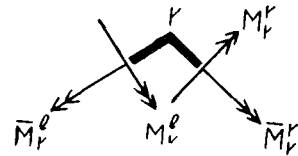

図-2 r 支点のタワミ角のベクトル

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_r^r &= -\theta_r \eta + \bar{\theta}_r \xi \\ \varphi_r^r &= \theta_r \eta + \bar{\theta}_r \xi \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

上式中

$$\xi = \cos \alpha, \quad \eta = \sin \alpha$$

まったく同様に支点モーメントについても M_r^l , M_r^r , r 点に集まるハリの左側、右側の端曲げモーメント, $\bar{M}_r^l$, $\bar{M}_r^r$


図-3 r 支点の端モーメント

を同端ネジレモーメントとすればハリ r を単純バリと仮定したときの支点 r の荷重によるタワミ角をそれぞれ i_r^l , i_r^r とすれば

$$\left. \begin{aligned} M_r^l &= -K_r (2\varphi_r^l + \varphi_{r-1}^r) - C_{r,r-1} + 3\beta_r K_r \\ M_r^r &= K_{r+1} (2\varphi_r^r + \varphi_{r+1}^l) - C_{r,r+1} - 3\beta_{r+1} K_{r+1} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ゆえに

$$\left. \begin{aligned} M_r^l &= -K_r (2\theta_r \xi + 2\bar{\theta}_r \eta + \theta_{r-1} \xi - \bar{\theta}_{r-1} \eta) \\ &\quad - C_{r,r-1} + 3\beta_r K_r \\ M_r^r &= K_{r+1} (2\theta_r \xi - 2\bar{\theta}_r \eta + \theta_{r+1} \xi + \bar{\theta}_{r+1} \eta) \\ &\quad - C_{r,r+1} - 3\beta_{r+1} K_{r+1} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

上式中 β_r , β_{r+1} は支点 r のタワミ δ_r によって

$$\beta_r = \frac{\delta_r - \delta_{r-1}}{l_r}, \quad \beta_{r+1} = \frac{\delta_{r+1} - \delta_r}{l_{r+1}}$$

ように表わされる。また

$$K_r = \frac{2EI_r}{l_r}, \quad C_{r,r-1} = -2i_r^l - i_{r-1}^r,$$

$$C_{r,r+1} = 2i_r^* + i_{r+1}^*$$

I_r ははり r の断面二次モーメント, l_r は同径間長で, $C_{r,r-1}$, $C_{r,r+1}$ はラーメンのタワミ角タワミ度法における荷重項と同じものである。

次にはり r のネジレの釣合は曲げネジレ剛さを考慮しなければ

$$D_r (\bar{\varphi}_{r+1} - \bar{\varphi}_r) = \bar{M}_r \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_{r+1} &= -\bar{M}_r + m_r^* l_{r+1} \\ \bar{M}_r^* &= -\bar{M}_r - m_r^* l_r \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

上式中 $m_r^* l_{r+1}$, $m_r^* l_r$ は両端単純支持の場合の各はりのネジレ荷重による反力端ネジレモーメントで, 上の添字は r が支点の右, l が同左を表わす。また $D_r = GJ_r/l_r$ で J_r はネジレに関する定数で断面により一定である。

3. 支点の条件

直線の連続バリと異なって支点で斜に交わる連続バリではヒンジの回転軸の方向によって大体次の三種の場合が代表的なものと考えられる。図-4 参照。

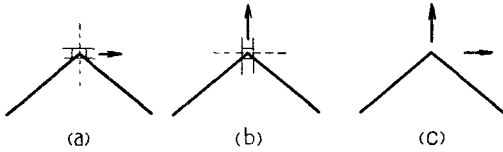


図-4 支点における支持条件
矢印は可動方向を示す

図-4 の (a) は, 切線方向に可動し法線方向の軸のまわりに回転できる。すなわち法線方向にベクトルを有する外力の曲げモーメントは存在しないような構造である。

図-4 の (b) は, 法線方向に可動し切線方向の軸のまわりに回転できる場合で, すなわち切線方向にベクトルを有する外力の曲げモーメントは存在しないような構造である。

図-4 の (c) は, あらゆる方向に可動できあらゆる方向に回転できるもので, 法線方向と切線方向とも外力の曲げモーメントは存在しないような構造である。

4. 節点回転角に関する方程式

(a) 切線方向に可動支持の場合

この場合法線方向に回転できないので

$$\bar{\theta}_r = 0$$

$$\therefore \varphi_r^* = \varphi_r^* = \theta_r \xi, \quad \bar{\varphi}_r^* = -\theta_r \eta, \quad \bar{\varphi}_r^* = \theta_r \eta \quad (7)$$

また法線方向軸のモーメントの釣合から

$$\xi (M_r^* - M_r^*) - \eta (\bar{M}_r^* + \bar{M}_r^*) = 0 \quad (8)$$

上式に (4), (5), (6) の関係を代入して θ のみで表わせば

$$\theta_{r-1} (\xi^2 K_r + \eta^2 D_r) + \theta_r \{ 2\xi^2 (K_r + K_{r+1})$$

$$+ \eta^2 (D_r + D_{r+1}) \} + \theta_{r+1} (\xi^2 K_{r+1} + \eta^2 D_{r+1})$$

$$= \xi (-C_{r,r-1} + C_{r,r+1} + 3\beta_r K_r + 3\beta_{r+1} K_{r+1}) + \eta T_r \quad (9)$$

ただし

$$C_{r,r-1} = -K_r (2i_r^* + i_{r-1}^*)$$

$$C_{r,r+1} = K_{r+1} (i_{r+1}^* + 2i_r^*)$$

$$T_r = m_r^* - m_r^*$$

両端 0, n が単純支持の場合

$$\left. \begin{aligned} 2\theta_0 + \theta_1 &= i_1^* + 2i_0^* + 3\beta_1 \\ 2\theta_n + \theta_{n-1} &= 2i_n^* + i_{n-1}^* + 3\beta_n \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

両端 0, n が固定の場合

$$\theta_0 = \theta_n = 0 \quad (11)$$

公式 (9), (10) あるいは (11) から開いているポリゴン状連続バリを解くことができる。また閉じた形の場合は (9) 式のみから解くことができる。

(b) 法線方向に可動支持の場合

この場合切線方向に回転できないので

$$\theta_r = 0$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} \varphi_r^* &= \bar{\theta}_r \eta, \quad \varphi_r^* = -\bar{\theta}_r^* \eta \\ \bar{\varphi}_r^* &= \bar{\varphi}_r^* = \bar{\theta}_r \xi \end{aligned} \right\}$$

また円環体における Umstülpung²⁾ を無視すれば, 切線と軸とする外力のモーメントはないから

$$\eta (M_r^* + M_r^*) + \xi (\bar{M}_r^* - \bar{M}_r^*) = 0 \quad (12)$$

前式と同じように, (12) 式を $\bar{\theta}_r$ で表わせば

$$-\bar{\theta}_{r-1} (\eta^2 K_r + \xi^2 D_r) + \bar{\theta}_r \{ 2\eta^2 (K_r + K_{r+1}) + \xi^2 (D_r + D_{r+1}) \}$$

$$-\bar{\theta}_{r+1} (\eta^2 K_{r+1} + \xi^2 D_{r+1}) = \eta \{ -C_{r,r-1} - C_{r,r+1} + 3\beta_r K_r - 3\beta_{r+1} K_{r+1} \} - \xi T_r^* \quad (13)$$

上式中

$$T_r^* = m_r^* + m_r^*$$

両端 0, n が単純支持の場合

$$\left. \begin{aligned} -2\bar{\theta}_0 \eta + \bar{\theta}_1 \eta &= C_{0,1} + 3\beta_1 \\ 2\bar{\theta}_n \eta - \bar{\theta}_{n-1} \eta &= C_{n,n-1} + 3\beta_n \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

両端 0, n が固定の場合

$$\bar{\theta}_0 = \bar{\theta}_1 = 0 \quad (15)$$

公式 (13) を境界条件 (14), (15) を満足するように解くことができる。

(c) 支点があらゆる方向に回転し得る場合

この場合法線方向と切線方向の外力の曲げモーメントは存在しないから次の公式を導びくことができる。

$$\theta_{r-1} (\xi^2 K_r + \eta^2 D_r) + \theta_r \{ 2\xi^2 (K_r + K_{r+1}) + \eta^2 (D_r +$$

$$\begin{aligned}
& D_{r+1}\} + \theta_{r+1} \{K_{r+1} \xi^2 K_{r+1} + \eta^2 D_{r+1}\} \\
& + \bar{\theta}_{r-1} \xi \eta \{K_r - D_r\} + \bar{\theta}_r \xi \eta \{2(K_r - K_{r+1}) \\
& - (D_r - D_{r+1})\} - \bar{\theta}_{r+1} \xi \eta \{K_{r+1} - D_{r+1}\} \\
& = \xi \{-C_{r,r-1} + C_{r,r+1} + 3\beta_r K_r + 3\beta_{r+1} K_{r+1}\} \\
& + \eta T_r
\end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
& \theta_{r-1} \xi \eta \{K_r - D_r\} + \theta_r \xi \eta \{2(K_r - K_{r+1}) - (D_r - D_{r+1})\} \\
& - \theta_{r+1} \xi \eta \{K_{r+1} - D_{r+1}\} - \bar{\theta}_{r-1} \{\eta^2 K_r + \xi^2 D_r\} \\
& + \bar{\theta}_r \{2\eta^2 (K_r + K_{r+1}) + \xi^2 (D_r + D_{r+1})\} \\
& - \bar{\theta}_{r+1} \{\eta^2 K_{r+1} + \xi^2 D_{r+1}\} \\
& = \eta \{-C_{r,r-1} - C_{r,r+1} + 3\beta_r K_r - 3\beta_{r+1} K_{r+1}\} \\
& - \xi T'_r
\end{aligned} \quad (17)$$

両端 0, n が単純支持の場合

$$\bar{\theta}_0 = \bar{\theta}_n = 0 \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} 2\theta_0 \xi + \theta_1 \xi + \bar{\theta}_1 \eta &= C_{0,1} + 3\beta_1 \\ 2\theta_n \xi + \theta_{n-1} \xi - \bar{\theta}_{n-1} \eta &= C_{n,n-1} + 3\beta_n \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

この (16), (17), (18), (19) から各 θ_r , $\bar{\theta}_r$ を求めることができ、支点の曲げモーメントを計算することができる。

5. 正三角形連続バリ

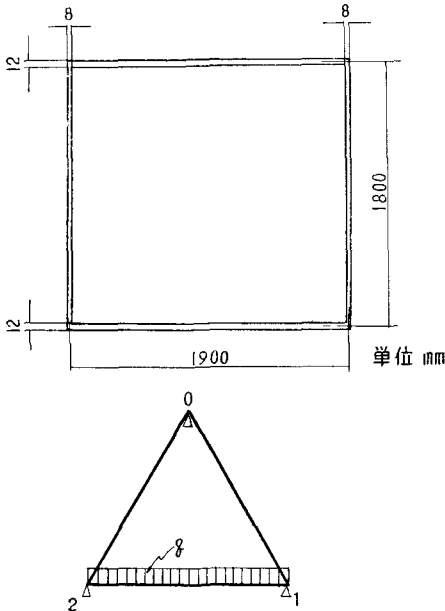


図-5 断面と線形

全バリ同一断面で、図-5 のような形とし支点を 0, 1, 2 とおき径間 1, 2 支点にのみ等分布荷重 q が作用し支点沈下はないものとする。したがって

$$\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0$$

$$C_{1,0} = 0, \quad C_{1,2} = \frac{ql^2}{12}$$

(i) 前記 (a) の支点条件の場合

この場合公式 (9) を用いる。また対称性から

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_1 + \theta_2 = 0$$

$$\therefore \theta_1 (3\xi^2 K + \eta^2 D) = \xi \frac{ql^2}{12}$$

$$\xi = \frac{1}{2}, \quad \eta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{D}{K} = 0.5247$$

であるから

$$\theta_1 K \times 1.14353 = 0.5 \frac{ql^2}{12}$$

$$\theta_1 K = 0.03644 \times ql^2$$

したがって

$$M'_1 = -2K\theta_1 \xi = -0.03644 ql^2$$

$$M''_1 = K\theta_1 \xi - \frac{ql^2}{12} = -0.06511 ql^2$$

$$M''_0 = K\theta_1 \xi = 0.01822 ql^2$$

$$\bar{M}_0 = 0.01655 ql^2$$

ハリの曲げモーメント図は図-6 のようになる支点で曲げモーメントが合わないのは一部ネジレモーメントとなるからである。

(ii) 支持条件 (b) の場合

この場合公式 (13) と構造と荷重の対称性から

$$-2\theta_1 (\eta^2 K + \xi^2 D) + \bar{\theta}_0 (4\eta^2 K + 2\xi^2 D) = 0$$

$$\bar{\theta}_1 (3\eta^2 K + \xi^2 D) - \bar{\theta}_0 (\eta^2 K + \xi^2 D) = -\frac{ql^2}{12} \eta$$

上式を解いて

$$K\bar{\theta}_1 = -0.4546 \frac{ql^2}{12}$$

$$K\bar{\theta}_0 = -0.2456 \frac{ql^2}{12}$$

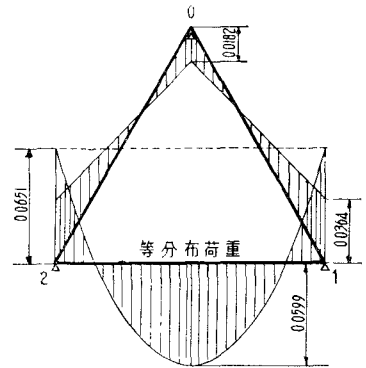


図-6 支点条件 (a)

ゆえに

$$\begin{aligned} M'_1 &= -K\eta (2\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_0) \\ &= 0.04789 \cdot ql^2 \end{aligned}$$

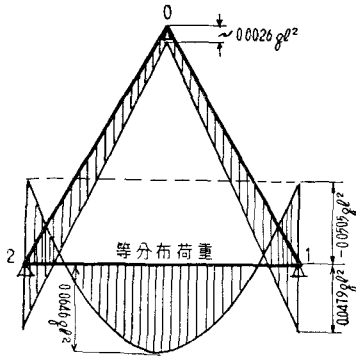


図-7 支点条件 (b)

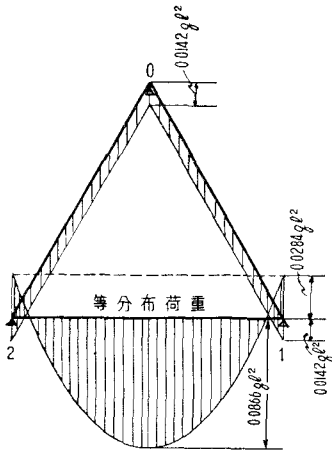


図-8 支点条件 (c)

$$M_1' = -K\theta_1\eta - \frac{ql^2}{12}$$

$$= -0.05053 \cdot ql^2$$

$$M_0' = K\eta (-2\bar{\theta}_0 + \bar{\theta}_1)$$

$$= 0.00264 \cdot ql^2$$

$$\bar{M}_0 = D\xi (\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_0) = -0.00457 \cdot ql^2$$

この曲げモーメント図は図-7 のようになる。

(iii) 支点条件 (c) の場合

この場合は (16), (17) を用いる。対称性を考えて、次の 3 式が得られる。

$$\theta_1 (3\xi^2 K + D\eta^2) - \bar{\theta}_0 \xi \eta (K - D) + \bar{\theta}_1 \xi \eta (K - D) = \xi \frac{ql^2}{12}$$

$$-2\bar{\theta}_1 (\eta^2 K + \xi^2 D) + \bar{\theta}_0 (4\eta^2 K + 2\xi^2 D) - 2\xi \eta \theta_1 (K - D) = 0$$

$$\bar{\theta}_1 (3\eta^2 + D\xi^2) - \bar{\theta}_0 (\eta^2 K + \xi^2 D) + \xi \eta \theta_1 (K - D) = -\eta \frac{ql^2}{12}$$

上式を解いて

$$\theta_1 K = 0.4882 \frac{ql^2}{12}$$

$$\bar{\theta}_1 K = -0.4788 \frac{ql^2}{12}$$

$$\bar{\theta}_0 K = -0.1971 \frac{ql^2}{12}$$

これらの値を用いて

$$M_1' = -K\eta (2\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_0) - 2K\theta_1 \xi$$

$$= 0.01421 \cdot ql^2$$

$$M_1'' = K (\theta_1 \xi - \bar{\theta}_1 \eta) - \frac{ql^2}{12}$$

$$= -0.02836 \cdot ql^2$$

$$M_0' = K\eta (\bar{\theta}_1 - 2\bar{\theta}_0) + K\theta_1 \xi$$

$$= 0.01423 \cdot ql^2$$

$$\bar{M}_0 = D \{-\theta_1 \eta + \xi (\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_0)\}$$

$$= -0.02465 \cdot ql^2$$

この場合の曲げモーメント図は図-8 のとおりである。

6. 結 語

以上ポリゴン線形を有する連続バリについて曲げネジリ剛性と支点屈曲部の Umstülpung を無視して一般に成立する支点タワミ角公式を誘導したが、厳密にはここに無視したものを考慮しなければネジレ荷重が作用した場合や、閉多角形連続バリの反転現象を取り扱うのに不便であることはいうまでもないが、Klemp³⁾ や、Leonhardt などがネジリを考えて格子ゲタを取り扱っているのと同じ程度の厳密さをここでは保持している。第 5 項の数値計算で明らかに、支点上で斜交する連続バリでは支持条件が前記のように種々考えられ、その各々にしたがって内部曲げ応力の分布はかなり異なった値となる。また (a), (b) のような支持条件では支点到不静定反力モーメントを生ずるので、ピアーの計算などではその検算も必要となる。例えば (a) の支持では、1, 2 支点の法線方向の反力モーメントは $0.079 ql^2$ であり、(b) の支持では切線方向の反力モーメントは同支点で $0.049 ql^2$ となる。 r 点の支点反力は

$$R_r = \frac{M_{r-1}' - M_r'}{l_r} - \frac{M_r'' - M_{r+1}''}{l_{r+1}}$$

から計算できる。

参 考 文 献

- 1) 鷹部屋福平：ラーメン新論，p. 45.
- 2) 倉西正嗣：弾性論，p. 238.
- 3) W. Klemp: Ein neue Verfahren für Tragerrostberechnung, Beton und Stahlbetonbau, 21. Jahrg. Heft 1, 1956, S. 15, 19.