

扇形平板の曲げについて

—— 曲線橋の平板構造としての考察 ——

正員 北大工学部 芳村 仁

2辺が放射方向の直線辺、他の2辺(又は1辺)が半径の異なる2個の円弧で境せられている平板(□および▽のような形のものを)を扇形平板と名付けることにする。曲線橋の基本的な形を平板構造的にみると扇形平板と考えることができる。

1. 要 旨

本論文は厚さが一定で極方向(r 方向)と接線方向(θ 方向)とで弾性的性質の異なる平板の曲げの基本微分方程式を誘導し、これを扇形平板の解法に適用した場合、2個の直線辺が単純支持の場合に他の円弧辺 Circular edge がいかなる境界条件をもつても解き得ることを示した。又、具体的な問題として扇形平板に等分布荷重が満載された場合および集中荷重が作用した場合について解式を示し、前者の場合について数値計算を行なった。又最後に平板の厚さが極方向(r 方向)に変化する平板の曲げの微分方程式を示した。

2. ま え が き

最近、橋梁を架設する場合、架橋地点において路線の線形に合致させるため、直橋のみでなく、斜橋や曲線橋が架設されるようになってきた。斜橋については斜板或いは平行四辺形板として力学的に研究されているが曲線橋を平板構造としてみた研究はなされていない。本文は曲線橋に対し、直橋に対する矩形板の関係と同様の意味において扇形平板の曲げについて考察を行なったものである。

3. 平板の極方向と接線方向とで弾性的性質の異なる平板の基本微分方程式の誘導

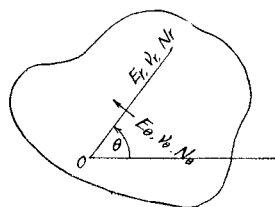


図-1

座標は極座標を採用する。 r 方向と θ 方向に弾性係数を異にする鉄筋コンクリート板、リブ付板その他において、 r, θ 方向の弾性係数を E_r, E_θ 、ポアソン比を ν_r, ν_θ 、せん断弾性係数を G とすると

$$\frac{E_r}{\nu_r} = \frac{E_\theta}{\nu_\theta} \dots\dots\dots (1)$$

r, θ 方向の歪 $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ および τ と応力度 σ_r, σ_θ および $\tau_{r\theta}$ の間には

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E_r} - \nu_\theta \frac{\sigma_\theta}{E_\theta}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} - \nu_r \frac{\sigma_r}{E_r}, \quad \tau_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G} \dots\dots (2)$$

がなりたつので

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E_r}{1 - \nu_r \nu_\theta} (\varepsilon_r + \nu_\theta \varepsilon_\theta) \\ \sigma_\theta &= \frac{E_\theta}{1 - \nu_r \nu_\theta} (\varepsilon_\theta + \nu_r \varepsilon_r) \\ \tau_{r\theta} &= G \gamma_{r\theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

普通の平板の式の誘導の仮定と同じように、板の厚さは他の寸法に比し非常に小であるとし、荷重は面に垂直に作用する場合のみ考え、又変形は微小であり、中立面の法線上の点は変形後も彎曲した中立面の法線とにあるという仮定を設ける。 z を中立面からの距離、 w を撓みとすると

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \varepsilon_\theta = -z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\ \tau_{r\theta} &= -2z \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

従つて

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{z E_r}{1 - \nu_r \nu_\theta} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ \sigma_\theta &= -\frac{z E_\theta}{1 - \nu_r \nu_\theta} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \\ \tau_{r\theta} &= -G \gamma_{r\theta} = -2Gz \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} (5)$$

$M_r, M_\theta, M_{r\theta}$ および $M_{\theta r}$ は h を板厚とすると

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_r z \cdot dz, & M_\theta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_\theta z \cdot dz \\ M_{r\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{r\theta} z \cdot dz, & M_{\theta r} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{\theta r} z \cdot dz \end{aligned} \right\}$$

これらの式に(5)を代入すると

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -N_r \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ M_\theta &= -N_\theta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \\ M_{r\theta} &= -(1 - \nu) N \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

ただし

$$N_r = \frac{E_r h^3}{12(1-\nu_r \nu_\theta)}, \quad N_\theta = \frac{E_\theta h^3}{12(1-\nu_r \nu_\theta)}$$

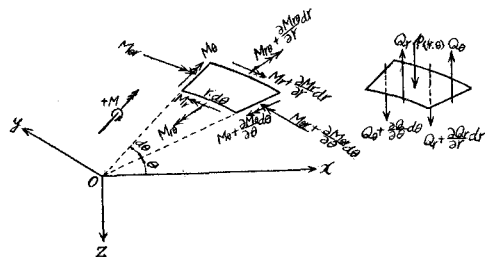


図-2

次に図-2のように極座標において平板の微小扇形部分をとりだして、 r 方向と θ 方向および z 方向での高次の微小項を無視して力の釣合式を求めると、結局せん断力 Q_r, Q_θ は

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{M_r - M_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} \\ Q_\theta &= \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{M_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

z 方向の釣合は荷重を p とすると

$$-p = \frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_r}{\partial \theta} \dots\dots\dots (8)$$

$M_{\theta r} = M_{r\theta}$ とし(6)式を(7)(8)式に代入すると途中の計算を省略し、結果のみかくと(8)式は次のようになる。

$$\begin{aligned} p = & N_r \left(\frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} \right) + N_r \nu_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} \right. \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{2}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \Big) \\ & + N_\theta \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) \\ & + N_\theta \nu_r \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} \right) \\ & + N(1-\nu) \left(\frac{2}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} \right) \end{aligned}$$

更にかき直すと

$$\begin{aligned} p = & N_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^4} + \frac{(2N_r + N_r \nu_\theta - N_\theta \nu_r)}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} \\ & + \frac{[N_r \nu_\theta + N_\theta \nu_r + 2N(1-\nu)]}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} \\ & - \frac{[2N_r \nu_\theta + 2N(1-\nu)]}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} \\ & + \frac{[2N_\theta + 2N(1-\nu) + 2N_r \nu_\theta]}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{N_\theta}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} \\ & - \frac{N_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{N_\theta}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

(9)式が求める基本微分方程式である。これは直交曲線座標(この場合は極座標)の各軸がその点での直交異方性の軸と一致する場合で、いわゆる曲線直交異方性(Curvi-

linear orthotropy)の一例とみることができよう。

$E_r = E_\theta = E, \nu_r = \nu_\theta = \nu, G = E/2(1+\nu)$ とすると

$$N_r = N_\theta = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = N$$

となり(9)式は

$$\Delta \Delta w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{p}{N} \dots\dots\dots (10)$$

となり等方性板の式となる。

この微分方程式を解いて撓み $w(r, \theta)$ を求めると、断面力の中曲げモーメントおよび捩りモーメント M_r, M_θ および $M_{r\theta}$ は(6)式から、せん断力 Q_r, Q_θ は(7)式から又反力 V_r および V_θ は次式から求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} V_r &= \left[Q_r - \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} \right] \\ V_\theta &= \left[Q_\theta - \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

4. 有限 Fourier sine 変換

変数 x のある有限区間上で、部分的に連続な関数 $F(x)$ のその区間上($0 < x < \pi$)の Fourier sine 変換を $S\{F(x)\}$ で表わすと、これは $F(x)$ の有限 sine 変換(finit sine transform)と呼ばれる関数 $f_s(n)$ を生ずる。すなわち

$$S\{F(x)\} = \int_0^\pi F(x) \sin nx dx = f_s(n) \dots\dots\dots (12)$$

($n=1, 2, 3, \dots\dots\dots$)

$f_s(n)$ の逆変換(inverse sine transform of $f_s(n)$) $F(x)$ は

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,2,\dots}^\infty f_s(n) \sin nx \dots\dots\dots (13)$$

となる。区間 $0 < x < l$ 上の関数の変換は $\xi = \frac{\pi x}{l}$ を代入すれば得ることができる。次に変換の演算子的特性は、偶数次の導関数については $F(x)$ の微分は変換 $f_s(n)$ について簡単な代数的演算に対応する。すなわち例えば

$$\left. \begin{aligned} S\{F''(x)\} &= -n^2 S\{F(x)\} + n[F(0) - (-1)^n F(\pi)] \\ S\{F''''(x)\} &= n^4 S\{F(x)\} - n^2[F(0) - (-1)^n F(\pi)] \\ &+ n[F''(0) - (-1)^n F''(\pi)] \end{aligned} \right\} \dots\dots (14)$$

5. 扇形平板の曲げ

(9)式は r, θ に関する4階の偏微分方程式であるから、これに θ に関する有限 Fourier sine 変換を適用し(区間 $0 < \theta < \alpha$) $w_s(r, \beta)$ を $w(r, \theta)$ の sine transform ($\beta = \frac{n\pi}{\alpha}, \alpha = \text{中心角}$)とす

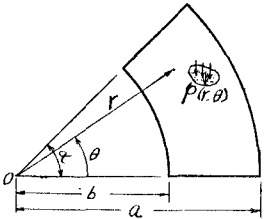


図-3

れば (9) 式の中で例えば

$$S\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 w(r, \theta)}{\partial \theta^2}\right)\right\} = -\beta^2 w'_s(r, \beta) \\ -\beta[(-1)^n w'(r, \alpha) - w'(r, 0)]$$

等となり (9) の中の各項に変換を施すと結局次のようになる。

$$N_r w''''_s(r, \beta) + \frac{[2N_r + N_r \nu_\theta - N_\theta \nu_r]}{r} w''''_s(r, \beta) \\ - \frac{[N_\theta + \beta^2 (N_r \nu_\theta + N_\theta \nu_r + 2N(1-\nu))]}{r^2} w''''_s(r, \beta) \\ + \frac{[N_\theta + \beta^2 (2N_r \nu_\theta + 2N(1-\nu))]}{r^3} w'_s(r, \beta) \\ + \frac{[\beta^4 N_\theta - \beta^2 (2N_\theta + 2N_r \nu_\theta + 2N(1-\nu))]}{r^4} w_s(r, \beta) \\ = S\{p(r, \theta)\} + \frac{[N_r \nu_\theta + N_\theta \nu_r + 2N(1-\nu)]}{r^2} \\ \times \beta[(-1)^n w''(r, \alpha) - w''(r, 0)] \\ - \frac{[2N_r \nu_\theta + 2N(1-\nu)]}{r^3} \beta[(-1)^n w'(r, \alpha) - w'(r, 0)] \\ + \frac{[2N_\theta + 2N_r \nu_\theta + 2N(1-\nu)]}{r^4} \beta[(-1)^n w(r, \alpha) - w(r, 0)] \\ - \frac{\beta}{r^4} \left\{ (-1)^n \left[\frac{(M_\theta)_\theta = \alpha}{N_\theta} + r w'(r, \alpha) + \nu_r w''(r, \alpha) \right] \right. \\ \left. - \left[\frac{(M_\theta)_\theta = 0}{N_\theta} + r w'(r, 0) + \nu_r w''(r, 0) \right] \right\} \dots \dots (15)$$

(15) の右辺第 1 項は、荷重の *sine* 変換であり第 2 項以下は扇形平板の $\theta=0$ および $\theta=\alpha$ でのそれぞれの境界条件が入っており、この両辺が単純支持の場合はすべて 0 となり第 1 項のみが残る。なお式中 w' などは r についての導関数を表わす。

さて振りモーメント $M_{r,\theta}$ は $-N(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$ と

表わされるが、えの N, ν の代わりに 近似的にそれぞれの直交軸方向に対する曲げ剛性およびポアソン比の平均値でおきかえると

$$M_{r,\theta} = -(1-\sqrt{\nu_r \nu_\theta}) (\sqrt{N_r N_\theta}) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

となる。今 $N_\theta/N_r = c^2$ とすると (15) 式は

$$w''''_s + 2 \frac{w''''_s}{r} - [c^2 + 2c\beta^2] \frac{w''_s}{r^2} + [c^2 + 2c\beta^2] \frac{w'_s}{r^3} \\ + \beta^2 [c^2 - (2c^2 + 2c)] \frac{w}{r^4} = \frac{S\{p(r, \theta)\}}{N} \dots \dots (16)$$

となる。この微分方程式の解は、右辺 = 0 とした同次式の一般解に特解を加えたもので表される。与えられた c に対し $w=r^2$ とおき 4 次の特性方程式の根を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ および λ_4 とすれば、

$$w_s(r, \beta) = C_1 r_1^{\lambda_1} + C_2 r_2^{\lambda_2} + C_3 r_3^{\lambda_3} + C_4 r_4^{\lambda_4} + P(r, \beta) \dots (17)$$

$P(r, \beta)$ は (15) の特解である。 C_1, C_2, C_3, C_4 は 2 つの

Circular edge の境界条件で決まる。逆変換 $w(r, \theta)$ は

$$w(r, \theta) = \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} w_s(r, \beta) \sin \beta \theta \dots \dots \dots (18) \\ (0 < \theta < \alpha) \\ \beta = \frac{n\pi}{\alpha}, (n=1, 2, 3, \dots)$$

で表わされる。

$N_r = N_\theta$ なる等方性板の時は $c=1$ となり (16) は

$$w''''_s + 2 \frac{w''''_s}{r} - (1+2\beta^2) \frac{w''_s}{r^2} + (1+2\beta^2) \frac{w'_s}{r^3} \\ + \frac{\beta^2 (\beta^2 - 4)}{r^4} w_s = \frac{S\{p(r, \theta)\}}{N} \dots \dots \dots (19)$$

この式の同次式は次のようにかかれる。

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\beta^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 w_s}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_s}{dr} - \frac{\beta^2 w_s}{r^2} \right) = 0$$

$\beta > 1$ に対し一般解は

$$\left. \begin{aligned} w_s &= C_1 r^\beta + C_2 r^{-\beta} + C_3 r^{\beta+2} + C_4 r^{-\beta+2} \\ \beta &= 1 \text{ に対し} \\ w_s &= C_1 r + C_2 r^3 + C_3 r^{-1} + C_4 r \log r \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

右辺がある時は、特解 $P(r, \beta)$ または $P(r, 1)$ を加える。これを (18) に代入すれば求める撓みが得られる。なお等方性板の場合の断面力および反力の公式をあげると次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -N \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ M_\theta &= -N \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \\ M_{r,\theta} &= -N(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ Q_r &= -N \frac{\partial \Delta w}{\partial r} \\ Q_\theta &= -N \frac{\partial \Delta w}{r \partial \theta} \\ V_r &= \left[Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r,\theta}}{\partial \theta} \right] \\ V_\theta &= \left[Q_\theta + \frac{\partial M_{r,\theta}}{\partial r} \right] \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

但し

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$$

6. Uniform load を担った扇形平板

図-4 のように $\theta=0$ と $\theta=\alpha$ とで単純支持され、 $r=a, r=b$ で任意の境界条件をもつ平板について $N_r = N_\theta$ なる等方性板の場合について考えよう。

前に述べたようにこの時の解は ($\beta \neq 1$)

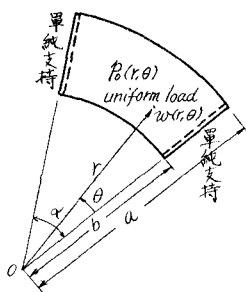


図-4

$$w_s(r, \beta) = C_1 r^\beta + C_3 r^{-\beta} + C_3 r^{\beta+2} + C^* r^{-\beta+2} + P(r, \beta)$$

であり、 $w(r, \theta)$ は (18) より求まる。未定係数 C_1, C_2, C_3 および C_4 は $r=a, r=b$ での条件から決まる。

この条件は

(1) 固定の場合

$$\left. \begin{array}{l} r=a \text{ または } b \text{ にて } w=0 \\ r=a \text{ または } b \text{ にて } \frac{\partial w}{\partial r}=0 \end{array} \right\} \dots\dots (22)$$

(2) 単純支持の場合

$$\left. \begin{array}{l} r=a \text{ または } b \text{ にて } w=0 \\ \text{〃} \quad \quad \quad M_r=0 \end{array} \right\} \dots\dots (23)$$

(3) 自由辺の場合

$$\left. \begin{array}{l} r=a \text{ または } b \text{ にて } M_r=0 \\ \quad \quad \quad V_r=0 \end{array} \right\} \dots\dots (24)$$

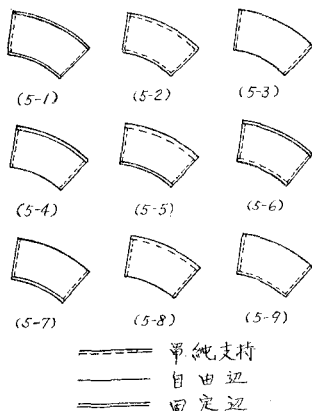


図-5

これらの条件の組み合わせは、図-5 のように 9 種類できるが、今 $r=a, r=b$ が単純支持された場合を一例として考えることにする。境界条件を変換されたものについて考えることにすると

$$r=a \quad w_s(a, \beta)=0 \dots\dots (25)$$

$$r=b \quad w_s(b, \beta)=0 \dots\dots (26)$$

$$r=a \quad S\{(M_r)_{r=a}\}=0 \dots\dots (27)$$

$$r=b \quad S\{(M_r)_{r=b}\}=0 \dots\dots (28)$$

満載等分布荷重の場合、(19) の特解は

$$P(r, \beta) = \frac{p_0[1-(-1)^n]}{N\beta} \frac{r^4}{(\beta^2-4)(\beta^2-16)} \dots\dots (29)$$

$$(n=1, 2, 3, \dots\dots)$$

であるから、上の各式を計算すると $C_1 \sim C_4$ を決定すべき次の連立方程式ができる。すなわち

$$\left. \begin{array}{l} C_1 a^\beta + C_2 a^{-\beta} + C_3 a^{\beta+2} + C_4 a^{-\beta+2} \\ + \frac{2p_0}{\beta N} \frac{a^4}{(\beta^2-4)(\beta^2-16)} = 0 \\ C_1 b^\beta + C_2 b^{-\beta} + C_3 b^{\beta+2} + C_4 b^{-\beta+2} \\ + \frac{2p_0}{\beta N} \frac{b^4}{(\beta^2-4)(\beta^2-16)} = 0 \\ \beta(\beta-1) C a^{\beta-2} + \beta(\beta+1) C_2 a^{-\beta-2} \\ + (\beta+1)(\beta+2) C_3 a^\beta + (\beta-1)(\beta+2) C_4 a^{-\beta} \\ - \frac{2\nu\beta^2 p_0}{\beta N} \frac{a^2}{(\beta^2-4)(\beta^2-16)} = 0 \\ \beta(\beta-1) C_1 b^{\beta-2} + \beta(\beta+1) C_2 b^{-\beta-2} \\ + (\beta+1)(\beta+2) C_3 b^\beta + (\beta-1)(\beta+2) C_4 b^{-\beta} \\ - \frac{2\nu\beta^2 p_0}{\beta N} \frac{b^2}{(\beta^2-4)(\beta^2-16)} = 0 \end{array} \right\} \dots\dots (30)$$

便宜上、 $a/b=k$ として (30) を解いて C_1, C_2, C_3, C_4 を求めると次のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} C_1 = -4 \left\{ (\beta+1)(\beta+2)(1-2\beta)(k^{\beta-2}+k^{-\beta-6}) \right. \\ \quad - (2-\beta)(\beta^2-1)(k^{-\beta-2}+k^{-6}) + 3\beta^2(\beta+1) \\ \quad \times (k^{-\beta-4}+k^{-4}) + 6 \left[(2\beta-1)(k^{\beta-2}+k^{-\beta-6}) \right. \\ \quad \left. + (\beta+1)(k^{-6}+k^{-\beta-2}) \right] \left. \right\} \frac{b^{4-\beta} p_0}{NGD} \\ C_2 = -4 \left\{ (\beta-1)(\beta-2)(1+2\beta)(k^{2\beta-6}+k^{-\beta-2}) \right. \\ \quad + (\beta+2)(\beta^2-1)(k^{\beta-2}-k^{-6}) - 3\beta^2(\beta-1) \\ \quad \times (k^{\beta-4}+k^{-4}) + 6 \left[3\beta(k^{\beta-4}+k^{-4}) + (1-2\beta) \right. \\ \quad \left. \times (k^{-6}+k^{\beta-2}) - (2\beta+1) \right] \left. \right\} \frac{b^{\beta-4} p_0}{NGD} \\ C_3 = -4 \left\{ -\beta(\beta-1)(\beta-2)(k^{-8}+k^{-\beta-2}) \right. \\ \quad - \beta(\beta^2-1)(k^{-6}+k^{-\beta-4}) + \beta(\beta-1)(\beta-2) \\ \quad \times k^{-2\beta-6} + k^{\beta-4} + 6 \left[(1-2\beta) \right. \\ \quad \times (k^{\beta-4}+k^{-2\beta-6}) + (\beta-1)(k^{-\beta}+k^{-\beta-4}) \\ \quad \left. + \beta(k^{-8}+k^{-\beta-2}) \right] \left. \right\} \frac{b^{\beta-2} p_0}{NGD} \\ C_4 = -4 \left\{ \beta(\beta+1)(\beta+2)(k^{-8}+k^{\beta-2}) \right. \\ \quad - \beta(\beta+1)(2\beta+1)(k^{2\beta-6}+k^{-\beta-4}) \\ \quad + \beta(\beta^2-1)(k^{-6}+k^{\beta-4}) + 6 \left[(2\beta+1) \right. \\ \quad \times (k^{2\beta-6}+k^{-\beta-4}) - (\beta-1)(k^{\beta-4}+k^{-6}) \\ \quad \left. - \beta(k^{-8}+k^{\beta-2}) \right] \left. \right\} \frac{b^{\beta+2} p_0}{NGD} \end{array} \right\} \dots\dots (31)$$

ただし

$$D=2\left\{\begin{aligned} &(\beta^2+1)(\beta^2+2)k^{2\beta-6} \\ &+2(4\beta^2-\beta-1)k^{-2\beta-6} \\ &+\beta(\beta^3-4\beta^2-\beta-2)k^{-4} \\ &+\beta(-\beta^3+2\beta^2-5\beta-2)k^{-8} \\ &+2\beta(1-\beta^2)k^{-6} \end{aligned}\right\}$$

$$G=\beta(\beta^2-4)(\beta^2-16)$$

係数が決定されると撓みが求まり、断面力反力も求めることができる。

ここでもう一度 (30) にもどり

$$\left. \begin{aligned} -\frac{N}{P_0} C_1 b^{\beta-4} &= y_1, & -\frac{N}{P_0} C_2 b^{-\beta-4} &= y_2 \\ -\frac{N}{P_0} C_3 b^{-\beta-2} &= y_3, & -\frac{N}{P_0} C_4 b^{-\beta-2} &= y_4 \end{aligned} \right\} \dots\dots (32)$$

とおき整理すると (30) は

$$\left(\begin{array}{cccc} k^{\beta-4} & k^{-\beta-4} & k^{\beta+2} & k^{-\beta+2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ K_1 k^{\beta-4} & K_2 k^{-\beta-4} & K_3 k^{\beta+2} & K_4 k^{-\beta+2} \\ K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c} 2/G \\ 2/G \\ \frac{2(12+4\nu-\nu\beta^2)}{G} \\ \frac{2(12+4\nu-\nu\beta^2)}{G} \end{array} \right) \dots\dots\dots (33)$$

となる。ただし $G=\beta(\beta^2-4)(\beta^2-16)$

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \beta(\beta-1) & K_2 &= \beta(\beta+1) \\ K_3 &= (\beta+1)(\beta+2) & K_4 &= (\beta-1)(\beta-2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

与えられた β の各値に対し (33) を解き $y_1 \dots y_4$ を求めると $C_1 \dots C_4$ は次式で求まる。

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{P_0}{N} b^{4-\beta} \cdot y_1 & C_2 &= -\frac{P_0}{N} b^{\beta+4} \cdot y_2 \\ C_3 &= -\frac{P_0}{N} b^{2-\beta} \cdot y_3 & C_4 &= -\frac{P_0}{N} b^{\beta+2} \cdot y_4 \end{aligned} \right\} \dots\dots (35)$$

同様にして、Circular edge が固定辺の場合 (図 5-1) および自由辺の場合 (図 5-3) の係数決定方程式はそれぞれ次のようになる。

$$\left(\begin{array}{cccc} k^{\beta-4} & k^{-\beta-4} & k^{\beta-2} & k^{-\beta-2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \beta k^{\beta-4} & -\beta k^{-\beta-4} & (\beta+2) k^{\beta-2} & (2-\beta) k^{-\beta-2} \\ \beta & -\beta & (\beta+2) & (2-\beta) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c} 2/G \\ 2/G \\ 8/G \\ 8/G \end{array} \right) \dots\dots\dots (36)$$

$$\left(\begin{array}{cccc} K_1 k^{\beta-4} & K_2 k^{-\beta-4} & K_3 k^{\beta-2} & K_4 k^{-\beta-2} \\ K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \\ L_1 k^{\beta-4} & L_2 k^{-\beta-4} & L_3 k^{\beta-2} & L_4 k^{-\beta-2} \\ L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c} \frac{2(12+4\nu-\nu\beta^2)}{G} \\ \frac{2(12+4\nu-\nu\beta^2)}{G} \\ \frac{2[(3\nu-5)\beta^2+32]}{G} \\ \frac{2[(3\nu-5)\beta^2+32]}{G} \end{array} \right) \dots\dots\dots (37)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= (1-\nu) \beta^2 (1-\beta), & L_2 &= (1-\nu) \beta^2 (\beta+1) \\ L_3 &= \beta [\beta^2 (\nu-1) + (3+\nu) \beta + 4], \\ L_4 &= -\beta [\beta^2 (\nu-1) - \beta (3+\nu) + 4] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

(36) が固定辺, (37) が自由辺の場合である。 $y_1 \dots y_4$ が決まると (35) から $C_1 \dots C_4$ が求められることは前と同じである。他の境界条件のものも同様に示すことができるがここでは省略する。

次に平板に荷重が作用した時の任意点の断面力, 反力を求めるには (19) および (35) を考慮して得ることができるが, 今求める点の座標中心からの距離 r を

$$r = M_i b \dots\dots\dots (39)$$

とおくと計算の結果, 撓みの式は次のようになる。

$$w(r, \theta) = -\frac{2P_0}{\alpha N} b^4 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \bar{w} \sin \beta \theta$$

$$= -\frac{2P_0}{\alpha N} b^4 \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ M_i^{\beta} y_1 + M_i^{-\beta} y_2 + M_i^{\beta+2} y_3 \right.$$

$$\left. + M_i^{-\beta+2} y_4 - 2M_i^4 / G \right\} \sin \beta \theta \dots\dots\dots (40)$$

となる。同様に点 ($r=M_i b, \theta$) の断面力, $M_r, M_\theta, M_{\theta r}$ 反力 V_r, V_θ を求めると

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{2P_0}{\alpha} b^2 \sum_{n=1,\dots}^{\infty} \bar{M}_r \sin \beta \theta \\ M_\theta &= \frac{2P_0}{\alpha} b^2 \sum_{n=1,\dots}^{\infty} \bar{M}_\theta \sin \beta \theta \\ M_{r,\theta} &= (1-\nu) \frac{2P_0}{\alpha} b^2 \sum_{n=1,\dots}^{\infty} \bar{M}_{r,\theta} \cos \beta \theta \\ V_r &= \frac{2P_0}{\alpha} b \sum_{n=1,\dots}^{\infty} \bar{V}_r \sin \beta \theta \\ V_\theta &= \frac{2P_0}{\alpha} b \sum_{n=1,\dots}^{\infty} \bar{V}_\theta \cos \beta \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

となる。(41) 式中の $\bar{M}_r, \bar{M}_\theta$ などは, (40) の $\bar{w}$ のような形で表わされるもので, 各々をまとめて示すと次のように

なる。

$$\begin{pmatrix} \bar{M}_r \\ \bar{M}_\theta \\ \bar{M}_{r\theta} \\ \bar{V}_r \\ \bar{V}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 M_i^{\beta-2} & K_2 M_i^{-\beta-2} & K_3 M_i^\beta & K_4 M_i^{-\beta} \\ E_1 M_i^{\beta-2} & E_2 M_i^{-\beta-2} & E_3 M_i^\beta & E_4 M_i^{-\beta} \\ F_1 M_i^{\beta-2} & F_2 M_i^{-\beta-2} & F_3 M_i^\beta & F_4 M_i^{-\beta} \\ L_1 M_i^{\beta-3} & L_2 M_i^{-\beta-3} & L_3 M_i^{\beta-1} & L_4 M_i^{-\beta-1} \\ J_1 M_i^{\beta-3} & J_2 M_i^{-\beta-3} & J_3 M_i^{\beta-1} & J_4 M_i^{-\beta-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \dots (42)$$

$$\begin{pmatrix} -2(12+4\nu-\nu^2) M_i^2 \\ G \\ -2(4+12\nu-\nu^2) M_i^2 \\ G \\ -6\beta M_i^2 \\ G \\ -2[(3\nu-5)\beta^2+32] M_i \\ G \\ -2(22-6\nu-\beta^2)\beta M_i \\ G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \dots (42)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= (\nu-1)\beta(\beta-1), & E_2 &= (\nu-1)\beta-(1+\nu)\beta^2 \\ E_3 &= (\nu-1)\beta^2+(1+3\nu)\beta+2(1+\nu) \\ E_4 &= (\nu-1)\beta^2-(1+3\nu)\beta+2(1+\nu) \end{aligned} \right\} \quad \dots (43)$$

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \beta(\beta-1), & F_2 &= -\beta(\beta+1) \\ F_3 &= \beta(\beta+1), & F_4 &= \beta(1-\beta) \end{aligned} \right\} \quad \dots (44)$$

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \beta(\beta-1)(\beta-2)(1-\nu) \\ J_2 &= \beta(\beta+1)(\beta+2)(1-\nu) \\ J_3 &= \beta[1-\nu]\beta^2+5-\nu\beta+4 \\ J_4 &= \beta[(1-\nu)\beta^2-(5-\nu)\beta+4] \end{aligned} \right\} \quad \dots (45)$$

7. 集中荷重が作用する扇形平板

平板上の任意の点 ($r=c$, $M_i b$, θ_i) に集中荷重 P が作用する場合を考える。

図-6 のように平板を二つに分け、 $r=r_c$ の線の内側を①、外側を②としよう。各平板に対し基本微分方程式は

$$\Delta \Delta w = 0$$

である。未定係数の数は合計 8 個となるがこの中 4 個を周辺の条件で、他の 4 個を $r=r_c$ での連続の条件で決定する。

さて①の平板の撓みを $w(r, \theta)$ 、②の平板の撓みを $w'(r, \theta)$ とすると

$$w(r, \theta) = \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1,2,\dots} \left\{ C_1 r^\beta + C_2 r^{-\beta} + C_3 r^{\beta+2} \right\} \dots$$

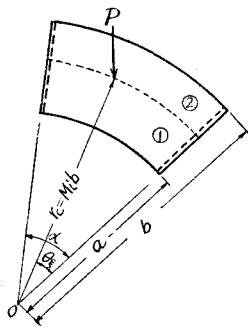


図-6

$$w'(r, \theta) = \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1,2,\dots} \left\{ C'_1 (r^\beta + C'_2 r^{-\beta} + C'_3 r^{\beta+2} + C'_4 r^{-\beta+2}) \sin \beta \theta \right\} \dots (46)$$

断面力および反力についても同様に表わすことにする。
(②の方に'をつける)

境界条件は前と同様であり、一例として2つの Circular edge が自由辺である場合を考えると

$$\left. \begin{aligned} r=a \text{ にて} & \quad M'_r = 0 \\ r=a \text{ にて} & \quad V'_r = 0 \\ r=b \text{ にて} & \quad M_r = 0 \\ r=b \text{ にて} & \quad V_r = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots (47)$$

次に $r=r_c$ なる円弧での連続条件は次のようになる。

$$r=r_c \text{ において} \quad w = w' \quad \dots (48.1)$$

$$r=r_c \text{ において} \quad \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w'}{\partial r} \quad \dots (48.2)$$

$$r=r_c \text{ において} \quad M_r = M'_r \quad \dots (48.3)$$

$$r=r_c \text{ において} \quad Q_r - Q'_r = p(\theta) = \frac{2P}{\alpha r_c} \sum_{n=1,\dots} \sin \frac{n\pi\theta_i}{\alpha} \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} \quad \dots (48.4)$$

(48.4) の条件はせん断力と荷重の釣合いの条件で、右辺は荷重 P を $r=r_c$ の円弧上にフーリエ級数に展開したものである。(46) を (47) (48) に代入すると次の 8 個の条件式が得られる。 ($r_c = M_i b$)

$$\begin{aligned} M_i^{\beta-2} y_1 + M_i^{-\beta-2} y_2 + M_i^\beta y_3 + M_i^{-\beta} y_4 + M_i^{\beta-2} y'_1 \\ + M_i^{-\beta-2} y'_2 + M_i^\beta y'_3 + M_i^{-\beta} y'_4 = 0 \quad \dots (49.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta M_i^{\beta-2} y_1 + (-\beta) M_i^{-\beta-2} y_2 + (\beta+2) M_i^\beta y_3 \\ + (2-\beta) M_i^{-\beta} y_4 + \beta M_i^{\beta-2} y'_1 + (-\beta) M_i^{-\beta-2} y'_2 \\ + (\beta+2) M_i^\beta y'_3 + (2-\beta) M_i^{-\beta} y'_4 = 0 \quad \dots (49.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_1 M_i^{\beta-2} y_1 + K_2 M_i^{-\beta-2} y_2 + K_3 M_i^\beta y_3 + K_4 M_i^{-\beta} y_4 \\ + K_1 M_i^{\beta-2} y'_1 + K_2 M_i^{-\beta-2} y'_2 \\ + K_3 M_i^\beta y'_3 + K_4 M_i^{-\beta} y'_4 = 0 \quad \dots (49.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_1 M_i^{\beta-2} y_1 + G_2 M_i^{-\beta-2} y_2 + G_3 M_i^\beta y_3 + G_4 M_i^{-\beta} y_4 \\ + G_1 M_i^{\beta-2} y'_1 + G_2 M_i^{-\beta-2} y'_2 + G_3 M_i^\beta y'_3 \\ + G_4 M_i^{-\beta} y'_4 = -\sin \frac{n\pi\theta_i}{\alpha} \quad \dots (49.4) \end{aligned}$$

$$K y_1 + K_2 y_2 + K_3 y_3 + K_4 y_4 = 0 \quad \dots (49.5)$$

$$L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 + L_4 y_4 = 0 \quad \dots (49.6)$$

$$K_1 k^{\beta-2} y'_1 + K_2 k^{-\beta-2} y'_2 + K_3 k^\beta y'_3 + K_4 k^{-\beta} y'_4 = 0 \quad \dots (49.7)$$

$$L_1 k^{\beta-2} y'_1 + L_2 k^{-\beta-2} y'_2 + L_3 k^\beta y'_3 + L_4 k^{-\beta} y'_4 = 0 \quad \dots (49.8)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} G_1 = G_2 = 0, \quad G_3 = 4\beta(1+\beta) \\ G_4 = 4\beta(\beta-1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (50)$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{N}{P} C_1 b^{\beta-2} & y'_1 &= -\frac{N}{P} C'_1 b^{\beta-2} \\ y_2 &= \frac{N}{P} C_2 b^{-\beta-2} & y'_2 &= -\frac{N}{P} C'_2 b^{-\beta-2} \\ y_3 &= \frac{N}{P} C_3 b^\beta & y'_3 &= -\frac{N}{P} C'_3 b^\beta \\ y_4 &= \frac{N}{P} C_4 b^{-\beta} & y'_4 &= -\frac{N}{P} C'_4 b^{-\beta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (51)$$

$$\begin{aligned} \text{今 } y_1 + y'_1 &= Y_1, \quad y_2 + y'_2 = Y_2, \quad y_3 + y'_3 = Y_3 \\ y_4 + y'_4 &= Y_4 \quad \dots\dots\dots (52) \end{aligned}$$

とすると (49) の始めの 4 式は

$$\begin{pmatrix} M_\xi^{\beta-2} & M_\xi^{-\beta-2} & M_\xi^\beta & M_\xi^{-\beta} \\ \beta M_\xi^{\beta-2} & (-\beta) M_\xi^{-\beta-2} & (2+\beta) M_\xi^\beta & (2-\beta) M_\xi^{-\beta} \\ K_1 M_\xi^{\beta-2} & K_2 M_\xi^{-\beta-2} & K_3 M_\xi^\beta & K_4 M_\xi^{-\beta} \\ G_1 M_\xi^{\beta-2} & G_2 M_\xi^{-\beta-2} & G_3 M_\xi^\beta & G_4 M_\xi^{-\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sin \frac{n\pi l_\xi}{a} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (53)$$

となり、 Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 が求まれば (49) の後の 4 個の式すなわち (49.5) → (49.8) の諸式により、 y_1, y_2, y_3, y_4 が求まり、(52) より y'_1, y'_2, y'_3, y'_4 を求めることができる。また (51) から $C_1 \rightarrow C_4$ が決定される。これらが決定されれば任意点の撓み、断面力、反力などが求まるが、これらは前項の Uniform load の場合の (41) (42) 式と類似の形で示すことができるからここでは省略する。

8. 数値計算例

計算例として周辺が全部単純支持された扇形平板に満載等布荷重が載荷された時の各点の撓みを求める。

中心心角 $\alpha = \pi/6$ とし $B/L = 1$ (B = 幅員, L = 中央円弧の長さ) の場合は $k = 1.709291$ となる。

$\nu = 0$ として y_1, y_2, y_3, y_4 を求めると、

$$\begin{aligned} n=1 \quad y_1 &= 2.9960904 \times 10^{-4} & y_2 &= -2.5676436 \times 10^{-4} \\ y_3 &= -0.4205394 \times 10^{-4} & y_4 &= 5.2004262 \times 10^{-4} \\ n=3 \quad y_1 &= 3.0848773 \times 10^{-9} & y_2 &= -4.1898573 \times 10^{-6} \\ y_3 &= -8.4354997 \times 10^{-10} & y_4 &= 5.3149609 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

平板の極方向を 8 等分し、 $\theta = \frac{\pi}{12}$, $\theta = \frac{\pi}{24}$ の各点の撓みを求めた結果は 図-7 の如くである。

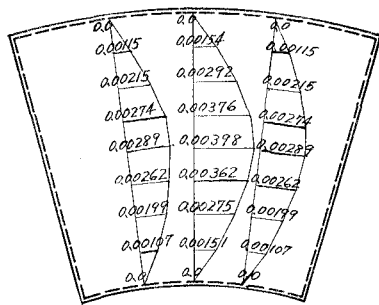


図-7 $w / \frac{p_0 L^4}{N}$ の数値

尚 4 辺単純支持正方形板の満載等布荷重による中央点の撓みは $0.00406 \frac{p_0 a^4}{N}$ (a は辺長) である。

9. 極方向 (r 方向) に厚さの変化する平板

r 方向に厚さが変化する場合、すなわち $N = N(r)$ のような平板を極座標を用いて、Kreissymmetrische の場合について研究した Otto Pichler の論文があり、この中にその基本微分方程式が示してある。この式の中に印刷の誤りと思われる箇所があるのでそれを訂正して書くこととする。

$$\begin{aligned} N \Delta \Delta w + \frac{dN}{dr} \left[2 \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{2+\nu}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \\ + \frac{d^2 N}{dr^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] = p \quad \dots\dots (54) \end{aligned}$$

等厚板の時と同様に、2 直辺が単純支持されている r 方向変厚扇形平板に対する微分方程式を求めると、(54) において θ に関する有限 Fourier sine 変換を行なうと次のようになる。(α = 中心角)

$$\begin{aligned} N w_s'''(r, \beta) + \left[\frac{2}{r} N + 2 \frac{dN}{dr} \right] w_s''(r, \beta) \\ + \left[-N \frac{(1+2\beta^2)}{r^2} + \frac{d^2 N}{dr^2} + \frac{2+\nu}{r} \frac{dN}{dr} \right] w_s'(r, \beta) \\ + \left[\frac{(1+2\beta^2)N}{r^3} + \frac{\nu}{r} \frac{d^2 N}{dr^2} - \frac{(1+2\beta^2)}{r^2} \frac{dN}{dr} \right] w_s(r, \beta) \\ + \left[\frac{N(\beta^4 - 4\beta^2)}{r^4} - \beta^2 \left(\frac{\nu}{r^2} \frac{d^2 N}{dr^2} - \frac{3}{r^3} \frac{dN}{dr} \right) \right] w_s(r, \beta) = S \{ p(r, \theta) \} \quad \dots\dots (55) \end{aligned}$$

記号は前と同じであり、 N は r の関数である。一般に扇形平板では 2 つの Circular edge の中内側の方が内側より長くなり、荷重を受けた時、内側に比し外側の部分は大きい応力が生ずることになる。もし厚さが方向で変化する板にすると、それは変厚板となるのでその場合の方程式を最

後に提示した次第である。

10. あとがき

扇形平板の特別な場合として Circular Sector があるが、これは前に出た撓みの式の中 r^2 , r^{2+2} の項のみが残り 2 個の未定係数は Circular edge の境界条件によつて決められる。

以上扇形平板について種々計算を行なつてきたが、曲線橋のみならず道路の立体交叉や最近建設されるようになってきた Flat slab 構造にもこのような平板構造が見受けられる。従つてその弾性変形の状態および応力性状を究明することは非常に有意義のことと思う。

主な参考文献

- 1) 坪井善勝：平面構造論 丸善
- 2) Timoshenko and Winowsky-Krieger : Theory of Plates and Shells, Second ed. 1959.
- 3) V. Churchill : Modern Operational Mathematics in Engineering.
邦訳：応用ラプラス変換 彰国社
- 4) Otto Pichler : Die Biegung Kreissymmetrischer Platten von veränderlicher Dicke, 1928.
- 5) L. I. Deverall and C. J. Throne, J. of Appl. Mech. Trans. ASME, vol. 73, 1951, p. 152. vol. 18, p. 359, 1951.