

トラス・ガーダーの応力解析について

正員 室蘭工業大学教授 工博 能 町 純 雄

要 旨

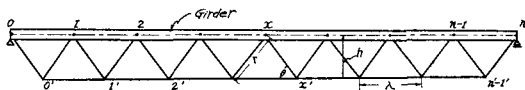
弦材のいずれか一方をガーダーで置き換えた型のトラス構造物、すなわちガーダーをトラスで補強した構造物の応力解析を試みたものである。ここでは格間長が一定な雨弦の平行なワルレン型のものに限定した。ガーダーの格点モーメントについて一種の三連モーメント式を弦材応力についても同型の三連応力式を誘導し、特に等断面ガーダー、等断面斜材、等断面弦材の場合を Affinlasten の考えで取扱い直ちに応力と曲げモーメントを求める公式を示した。

1. 緒 言

プレートガーダーは、腹板の挫屈に制限されてある程度以上の径間になれば、経済性が伴わず他の型式の構造が用いられるのであるが、ガーダーをトラスで補強するような型式をとれば、ガーダーが長大になつた際の欠点を補うのではなからうか、またこのような型と考えればコンクリートの床板の合成も行ない易いようにも思われる。若し適当な法方でプレストレスを下弦に導入すれば、死荷重または活荷重の一部を消し去ることも可能であろう、これは不静定内力の多い型であるから応力解析の難易によつて実用度が定まるが、このために応力計算の遂行が先決となる。次に基本式の誘導を試みよう。

2. 記号と仮定

仮定として、斜材の軸線はガーダーの軸線と交わる。ここでは斜材がヒンジ結合とみなし、格間距離はすべて等しい。



第1図

- A_{xg} : 左支点から $x-1$, x 格点間のガーダーの断面積,
 I_x : 同上断面二次モーメント,
 A_{xd} , A'_{xd} : 斜材 ($x-1$, $x'-1'$), ($x'-1'$, x) の断面積,
 A_{xc} : 格点 x , x' 間の弦材の断面積,
 ϵ_x , ϵ'_x : 格点 x , x' の水平変位, x の増加の方に向うものを正とする,

- δ_x , δ'_x : 格点 x , x' の鉛直変位, 下向きを正とする,
 U_x : ガーダー ($x-1$, x) の軸力,
 L_x : 弦材 ($x'-1'$, x') の軸力,
 D_x , D'_x : 斜材 ($x-1$, $x'-1'$), (x , $x'-1'$) の軸力,
 M_x : 格点 x のガーダーにおける節点モーメント,
 p_x : 格点 x に作用する点荷重,
 λ : 格間長,
 h : 弦材とガーダー軸線との距離,

3. 断面力と変位との間の関係

第2図の x 点を通る断面の左側のモーメントの釣合から

$$hL_x + M_x - m_x = 0, \quad (1)$$

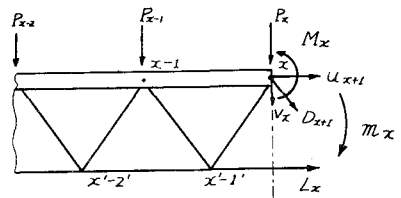
第3図の x' 点を通る断面の左側のモーメントの釣合から

$$-hU_{x+1} + \frac{M_x + M_{x-1}}{2} - \frac{m_x + m_{x+1}}{2} = 0, \quad (2)$$

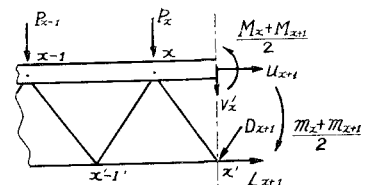
ただし上式中 m_x は両支点を径間とする外力の単純梁としての x 点の曲げモーメント。 x' 点のまわりの鉛直および水平方向の力の釣合から

$$\left. \begin{aligned} D_{x+1} + D'_{x+1} &= 0, \\ L_{x+1} - L_x &= 2D_{x+1} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(1), (2) 式から



第2図



第3図

$$-2U_x = L_x + L_{x-1}, \quad (4)$$

変長と軸力から

$$\varepsilon'_x - \varepsilon'_{x-1} = \frac{L_x \lambda}{E A_{xc}}, \quad (5)$$

$$\varepsilon_x - \varepsilon_{x-1} = \frac{U_x \lambda}{E A_{xg}}. \quad (6)$$

次に斜材 $(x-1, x'-1')$, $(x, x'-1')$, (x, x') および $(x+1, x')$ の各変長と各軸力から

$$\sin \theta (\delta_{x-1} - \delta'_{x-1}) + \cos \theta (\varepsilon_{x-1} - \varepsilon'_{x-1}) = -\frac{r D_x}{E A_{xd}}, \quad (7)$$

$$\sin \theta (\delta'_{x-1} - \delta_x) + \cos \theta (\varepsilon_x - \varepsilon'_{x-1}) = -\frac{r D_x}{E A'_{xd}}, \quad (8)$$

$$\sin \theta (\delta_x - \delta'_x) + \cos \theta (\varepsilon_x - \varepsilon'_x) = -\frac{r D_{x+1}}{E A_{x+1,d}}, \quad (9)$$

$$\sin \theta (\delta'_x - \delta_{x+1}) + \cos \theta (\varepsilon_{x+1} - \varepsilon'_x) = -\frac{r D_{x+1}}{E A'_{x+1,d}}, \quad (10)$$

これらの式を組合せて $\operatorname{cosec} \theta \{ (9) + (10) - (8) - (7) \}$ を作る, そして $\sin \theta = h/r$, $\cot \theta = \lambda/2h$ を考えれば

$$\begin{aligned} & 2\delta_x - \delta_{x+1} - \delta_{x-1} + \frac{\lambda}{2h} \{ \varepsilon_{x+1} - \varepsilon_{x-1} - 2(\varepsilon'_x - \varepsilon'_{x-1}) \} \\ &= \frac{r^2}{Eh} \left\{ D_x \left(\frac{1}{A_{xd}} + \frac{1}{A'_{xd}} \right) - D_{x+1} \left(\frac{1}{A_{x+1,d}} + \frac{1}{A'_{x+1,d}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

上式中右边を

$$\begin{aligned} & \frac{r^2}{Eh} \left\{ D_x \left(\frac{1}{A_{xd}} + \frac{1}{A'_{xd}} \right) - D_{x+1} \left(\frac{1}{A_{x+1,d}} + \frac{1}{A'_{x+1,d}} \right) \right\} \\ &= 2 \cos \theta (h D_x \gamma_x - h D_{x+1} \gamma_{x+1}), \end{aligned}$$

ただし

$$\gamma_x = \frac{r^3}{Eh^2 \lambda} \left(\frac{1}{A_{xd}} + \frac{1}{A'_{xd}} \right),$$

とおけばこの式の右边はさらに

$$\begin{aligned} & 2h \cos \theta (D_x \gamma_x - D_{x+1} \gamma_{x+1}) = -L_{x-1} \gamma_x \\ & + L_x (\gamma_x + \gamma_{x+1}) - L_{x+1} \gamma_{x+1}, \end{aligned} \quad (12)$$

次に $\varepsilon_{x+1} - \varepsilon_{x-1}$ は (5) を $\varepsilon'_x - \varepsilon'_{x-1}$ は (6) 式を適用して

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{2h} (\varepsilon_{x+1} - \varepsilon_{x-1}) = 2U_{x+1} \beta_{x+1} h + 2U_x \beta_x h \\ &= -h \{ L_x \beta_{x-1} + L_x (\beta_x + \beta_{x+1}) + L_{x+1} \beta_{x+1} \}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$-\frac{\lambda}{h} (\varepsilon'_x - \varepsilon'_{x-1}) = -L_x \beta'_x h, \quad (14)$$

ここに

$$\beta_x = \frac{\lambda^2}{4Eh^2 A_{xg}}, \quad \beta'_x = \frac{\lambda^2}{Eh^2 A_{xc}}$$

(12), (13), (14) の関係を (11) 式に代入すれば

$$\frac{1}{h} (2\delta_x - \delta_{x-1} - \delta_{x+1}) - L_{x-1} (\beta_x - \gamma_x) - L_x (\beta_x + \beta_{x+1})$$

$$+ \beta'_x + \gamma_x + \gamma_{x+1}) - L_{x+1} (\beta_{x+1} - \gamma_{x+1}) = 0, \quad (15)$$

クラペイロンの三連モーメント式より, ガーダーの格点モーメントについて

$$\begin{aligned} & \alpha_x M_{x-1} + 2(\alpha_x + \alpha_{x+1}) M_x + \alpha_{x+1} M_{x+1} \\ &= 2\delta_x - \delta_{x+1} - \delta_{x-1}, \end{aligned} \quad (16)$$

ここに

$$\alpha_x = \frac{\lambda^2}{6E I_x}.$$

いま $M_x = m_x - h L_x$ を (16) に代入し (15) から $2\delta_x - \delta_{x+1} - \delta_{x-1}$ を消去すれば

$$\begin{aligned} & L_{x-1} H_x + L_x (K_x - H_x - H_{x+1}) + L_{x+1} H_{x+1} \\ &= \frac{1}{h} \{ m_{x-1} \alpha_x + 2m_x (\alpha_x + \alpha_{x+1}) + m_{x+1} \alpha_{x+1} \}, \end{aligned} \quad (17)$$

また M_x で表わせば

$$\begin{aligned} & M_{x-1} H_x + M_x (K_x - H_x - H_{x+1}) + M_{x+1} H_{x+1} \\ &= m_{x-1} (H_x - \alpha_x) + m_x (K_x - H_x - H_{x+1} - 2\alpha_x - 2\alpha_{x+1}) + m_{x+1} (H_{x+1} - \alpha_{x+1}), \end{aligned} \quad (18)$$

(17), (18) 式中 m_x は荷重による格点 x の曲げモーメントで

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{\lambda^2}{6E I_x} + \frac{\lambda^2}{4Eh^2 A_{xg}} - \frac{r^3}{Eh^2 \lambda} \left(\frac{1}{A_{xd}} + \frac{1}{A'_{xd}} \right) \\ K_x &= \frac{\lambda^2}{E I_x} + \frac{\lambda^2}{Eh^2 A_{xg}} + \frac{\lambda^2}{Eh^2 A_{xc}} \end{aligned}$$

従つて, 若し $H_x = 0$ のときは (17), (18) 式は

$$L_x K_x = \frac{1}{h} \{ m_{x-1} \alpha_x + 2m_x (\alpha_x + \alpha_{x+1}) + m_{x+1} \alpha_{x+1} \}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} M_x K_x &= -m_{x-1} \alpha_x + m_x (K_x - 2\alpha_x - 2\alpha_{x+1}) \\ &\quad - m_{x+1} \alpha_{x+1}, \end{aligned} \quad (20)$$

となり弦材応力と格点モーメントを直ちに知ることができらる。

4. ガーダー, 斜材, 弦材がそれぞれ等断面の場合

この場合は (17), (18) は

$$\begin{aligned} & L_{x-1} H + L_x (K - 2H) + L_{x+1} H \\ &= \frac{\alpha}{h} \{ m_{x-1} + 4m_x + m_{x+1} \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & M_{x-1} H + M_x (K - 2H) + M_{x+1} H \\ &= m_{x-1} (H - \alpha) + m_x (K - 2H - 4\alpha) + m_{x+1} (H - \alpha), \end{aligned}$$

簡単のために $\Delta^2 f_x = f_{x-1} + f_{x+1} - 2f_x$ とすれば上式は

$$H \cdot \Delta^2 L_x + K L_x = \frac{\alpha}{h} \{ \Delta^2 m_x + 6m_x \}, \quad (21)$$

$$H \Delta^2 M_x + K M_x = \Delta^2 m_x (H - \alpha) + m_x (K - 6\alpha), \quad (22)$$

単純梁の曲げモーメントの公式から

$$\Delta^2 m_x = -p_x \lambda$$

従つて Affinlasten の変換公式

$$p_x = \sum_{\xi=1}^{i=n-1} \bar{p}_\xi \sin \frac{i\pi x}{n} \quad (23)$$

$$\bar{p}_\xi = \frac{2}{n} \sum_{x=1}^{x=n-1} p_x \sin \frac{i\pi x}{n}$$

を用いれば

$$m_x = \sum_{\xi=1}^{n-1} \frac{\bar{p}_\xi \lambda \sin \frac{i\pi x}{n}}{2 \left(1 - \cos \frac{i\pi}{n}\right)} \quad (24)$$

同様に, L_x, M_x は

$$L_x = \frac{6\alpha m_x}{hK} + \frac{1}{h} \left(\frac{6\alpha}{K} - \frac{\alpha}{H} \right) \sum_{\xi=1}^{n-1} \frac{\bar{p}_\xi \lambda \sin \frac{i\pi x}{n}}{\frac{K}{H} - 2 \left(1 - \cos \frac{i\pi}{n}\right)}, \quad (25)$$

$$M_x = \frac{m_x(K-6\alpha)}{K} - \left(\frac{6\alpha}{K} - \frac{\alpha}{H} \right) \sum_{\xi=1}^{n-1} \frac{\bar{p}_\xi \lambda \sin \frac{i\pi x}{n}}{\frac{K}{H} - 2 \left(1 - \cos \frac{i\pi}{n}\right)}, \quad (26)$$

タワミ δ_x は

$$A^2 M_x + 6M_x = -\frac{1}{\alpha} A^2 \delta_x$$

の関係から

$$\begin{aligned} \delta_x &= \alpha m_x \left\{ \alpha (36H^2 - K^2)/K^3 - \alpha/H + 12\alpha/K - 1 \right\} \\ &+ \frac{6\alpha(K-6\alpha)}{K} \sum_{\xi=1}^{n-1} \frac{\lambda \bar{p}_\xi \sin \frac{i\pi x}{n}}{4 \left(1 - \cos \frac{i\pi}{n}\right)^2} \\ &- \frac{\alpha(36H^2 - K^2)}{K^3} \sum_{\xi=1}^{n-1} \frac{\lambda \bar{p}_\xi \sin \frac{i\pi x}{n}}{\frac{K}{H} - 2 \left(1 - \cos \frac{i\pi}{n}\right)} \end{aligned} \quad (27)$$

5. 点荷重 P が格点 ξ に作用する場合

この場合次の関係式がある。

$$m_x = \begin{cases} P\lambda \frac{x(n-\xi)}{n}, & (x < \xi) \\ P\lambda \frac{(n-x)\xi}{n}, & (x > \xi) \end{cases} \quad (28)$$

また Affinlasten の級数和は連続函数に対するフーリエ級数和に対比して

$$\begin{aligned} \sum_{\xi=1}^{n-1} \frac{\bar{p}_\xi \lambda \sin \frac{i\pi x}{n}}{\frac{K}{H} - 2 \left(1 - \cos \frac{i\pi}{n}\right)} \\ = \begin{cases} -P\lambda \frac{\sin h\eta x \cdot \sin h\eta(n-\xi)}{\sin h\eta \cdot \sin h\eta}, & (x < \xi) \\ -P\lambda \frac{\sin h\eta(n-x) \cdot \sin h\eta \xi}{\sin h\eta \cdot \sin h\eta}, & (x > \xi) \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

上式中 η は

$$2 \cos h\eta = 2 - \frac{K}{H}$$

を満足する値である。上式の解は

$$\cos h\eta = C \quad (23)$$

とおい

$$\begin{aligned} C > 1 \text{ のとき} & \quad \cos h\alpha = C & \eta = \alpha \\ C < -1 \text{ のとき} & \quad \cos h\alpha = C & \eta = \pi i + \alpha \\ 1 > C > 0 \text{ のとき} & \quad \cos \alpha = C & \eta = i\alpha \\ 0 > C > -1 \text{ のとき} & \quad \cos \alpha = C & \eta = i(\pi + \alpha) \end{aligned}$$

として数表から直ちに求まる。

$$\begin{aligned} \sum_{\xi=1}^{n-1} \frac{\bar{p}_\xi \lambda \sin \frac{i\pi x}{n}}{4 \left(1 - \cos \frac{i\pi}{n}\right)^2} \\ = \begin{cases} \frac{P\lambda \xi^2 (n-\xi)^2}{6n^2} \left\{ \frac{2x}{\xi} + \frac{x}{n-\xi} - \frac{x^3}{\xi^2(n-\xi)} \right\}, \\ \frac{P\lambda \xi^2 (n-\xi)^2}{6n^2} \left\{ \frac{2(n-x)}{n-\xi} + \frac{n-x}{\xi} - \frac{(n-x)^3}{\xi(n-\xi)^2} \right\}, \\ (x < \xi) \\ (x > \xi) \end{cases} \end{aligned} \quad (30)$$

以上の公式を用いれば Affinlasten による級数計算をしない。所要の L_x, M_x, δ_x の影響線を直ちに求めることができる。例えば中央格点 $x=n/2$ に点荷重が一つだけある場合の各最大値は

$$L_x)_{x=n/2} = \frac{3\alpha n P\lambda}{2hK} - \frac{P\lambda}{2h} \left(\frac{6\alpha}{K} - \frac{\alpha}{H} \right) \frac{\tan h n\eta/2}{\sin h\eta}, \quad (31)$$

$$M_x)_{x=n/2} = \frac{P\lambda n(K-6\alpha)}{4K} + \frac{P\lambda}{2} \left(\frac{6\alpha}{K} - \frac{\alpha}{H} \right) \frac{\tan h n\eta/2}{\sin h\eta}, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \delta_x)_{x=n/2} &= \frac{P\lambda}{4} n\alpha \left\{ \alpha (36H^2 - K^2)/K^3 - \alpha/H + 12\alpha/K - 1 \right\} \\ &+ \frac{P\lambda}{8K} n^3\alpha(K-H) + \frac{P\lambda}{2} \frac{\alpha^2(36H^2 - K^2) \tan h n\eta/2}{K^3 \sin h\eta}, \end{aligned} \quad (33)$$

6. 満載等分布荷重

この場合は荷重強度を q とすれば

$$L_x = \frac{3\alpha q \lambda^2 (n-x)x}{hK} + \frac{Hq \lambda^2}{hK} \left(\frac{6\alpha}{K} - \frac{\alpha}{H} \right) \left\{ 1 - \frac{\cos h\eta(n-x) + \cos h\eta n}{\cos h\eta n + 1} \right\}, \quad (34)$$

$$M_x = \frac{q \lambda^2 x(n-x)(K-H)}{2K} - \frac{Hq \lambda^2}{hK} \left(\frac{6\alpha}{K} - \frac{\alpha}{H} \right) \left\{ 1 - \frac{\cos h\eta(n-x) + \cos h\eta n}{\cos h\eta n + 1} \right\}, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \delta_x &= \frac{P\lambda^2 x(n-x)}{2} \left\{ \alpha (36H^2 - K^2)/K^3 - \alpha/H + 12\alpha/K - 1 \right\} \\ &+ \frac{\alpha q \lambda^2 (K-6\alpha)}{4K} (x-2x^3+x^4) \\ &- \frac{q \lambda^2 \alpha^2 (36H^2 - K^2)}{K^3} \left\{ 1 - \frac{\cos h\eta(n-x) + \cos h\eta n}{\cos h\eta n + 1} \right\}, \end{aligned} \quad (36)$$

7. 数値計算とトラストガーダーの性質

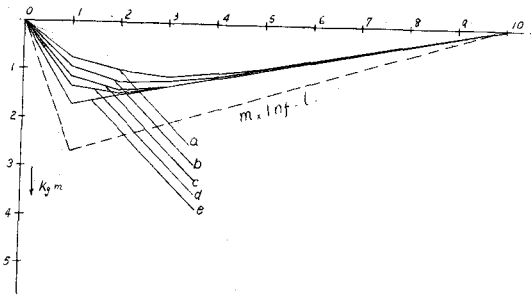
いま径間長 l , 格間長 λ , 格間数 n , 高さ h , 斜材長 r を

$$l = 30 \text{ m}, \lambda = 3 \text{ m}, n = 10, h = 2 \text{ m}, r = 2.5 \text{ m}$$

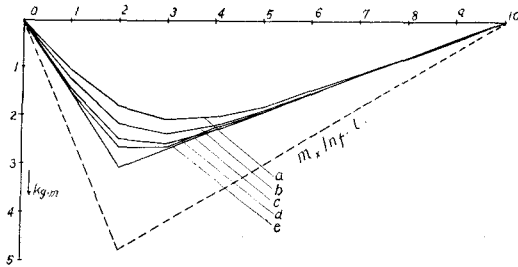
のように仮定しガーダー断面を一定にして斜材断面のみを変化させた時と弦材断面のみを変化させた二つの場合の hL_x , M_x の影響線の状態を調べてみる。

A) $I_g = 0.01 \text{ m}^4$, $A_g = 0.03 \text{ m}^2$, $A_c = 0.005 \text{ m}^2$ とおいて, A_d のみを変化させる, これに対応する H , K , η を表示すれば (第1表)

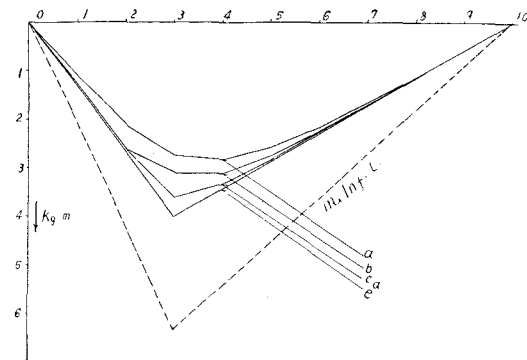
上の四例についての各 hL_x , M_x の影響線図は第4図から第8図のようになる。



第4図 A) による hL_1 影響線図 (1 kg 荷重)



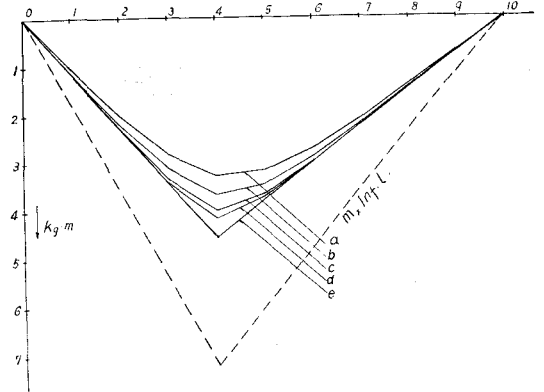
第5図 A) による hL_2 影響線図 (1 kg 荷重)



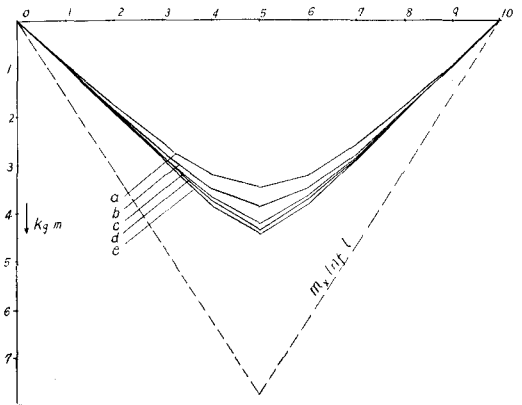
第6図 A) による hL_3 影響線図 (1 kg 荷重)

第1表

	$A_d (\text{m}^2)$	$H (10^{-5} \text{ kg}^{-1})$	$K (10^{-5} \text{ kg}^{-1})$	$\cos h\eta$	η
a	0.001	-11.597	6.782	1.292	0.747
b	0.002	-5.397	6.782	1.628	1.069
c	0.005	-1.667	6.782	3.034	1.775
d	0.010	-0.437	6.782	8.760	2.860
e	0.01544	0	6.782	—	—



第7図 A) による hL_4 影響線図 (1 kg 荷重)



第8図 A) による hL_5 影響線図 (1 kg 荷重)

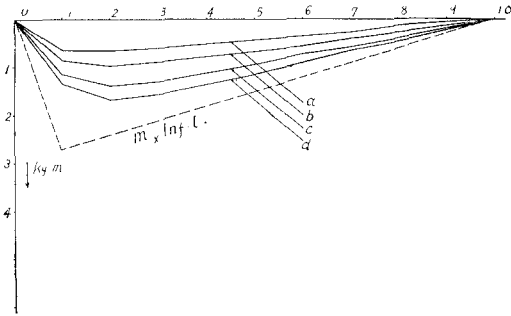
B) $I_g = 0.01 \text{ m}^4$, $A_g = 0.03 \text{ m}^2$, $A_d = 0.005 \text{ m}^2$ として A_c を第2表のように変化させる。

第2表

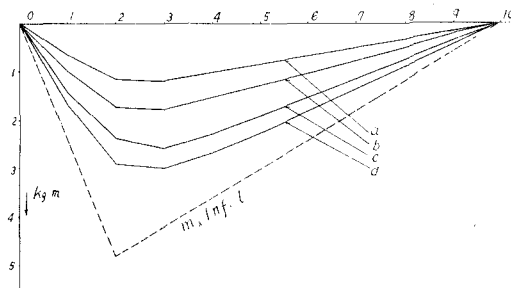
	$A_c (\text{m}^2)$	$H (10^{-5} \text{ kg}^{-1})$	$K (10^{-5} \text{ kg}^{-1})$	$\cos h\eta$	η
a	0.001	-1.667	15.350	5.604	2.409
b	0.002	-1.667	9.995	8.998	2.063
c	0.005	-1.667	6.782	3.034	1.775
d	0.010	-1.667	5.711	2.713	1.655

これによる hL_x , M_x の影響線図をかけば第9図から第13図のようになる。

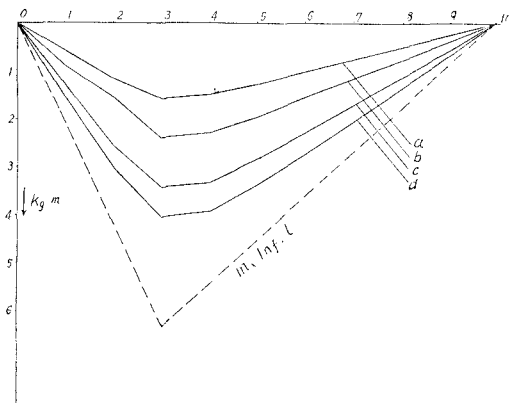
これらの図面において (A), (B) の場合とも鎖線の三角形は荷重によつて生ずる全影響線で、実線はその上部の面積が hL_x 影響線下部の部分が M_x 影響線の面積を示す。(A) の場合斜材の控屈を考慮外におけば、斜材が細くなるほど hL_x 影響線の面積は小さくなり、ガーダーの曲げモーメントの分担が増加する。そして hL_x の影響線の尖きが丸くなる。(B) の場合も同様な傾向で弦材が細くなれば hL_x の面積が小さくなり、その影響線の尖きが丸くなる。



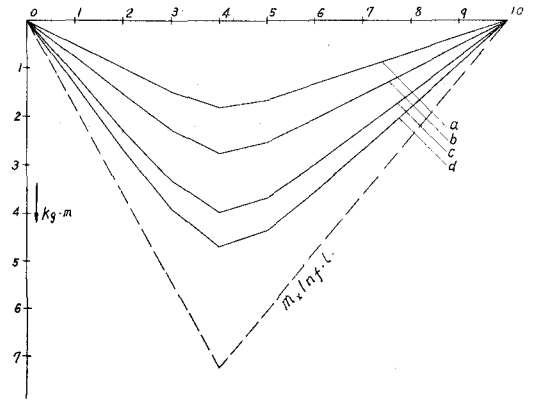
第9図 B) による hL_1 影響線図 (1 kg 荷重)



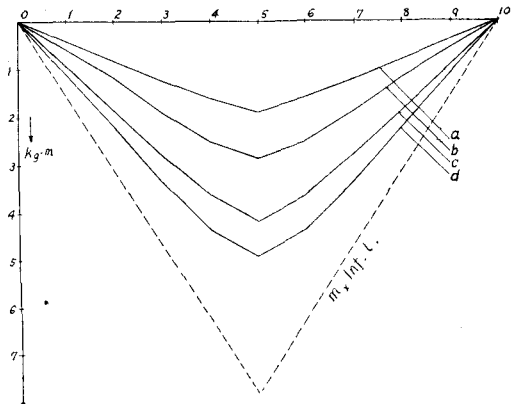
第10図 B) による hL_2 影響線図 (1 kg 荷重)



第11図 B) による hL_3 影響線図 (1 kg 荷重)



第12図 B) による hL_4 影響線図 (1 kg 荷重)



第13図 B) による hL_5 影響線図 (1 kg 荷重)

8. 結 語

ワルレン型トラストガーダーについて応力解析を行なつたが、純然たるトラスとガーダーとの間における関連は公式 (17), (18) から見当がつく例えば斜材が極端に弱い場合、係数 H_x , の r_x の値が無限大に近づくので、他の係数 K_x , α_x は省略でき (18) 式は

$$\begin{aligned} &-(M_{x-1}-m_{x-1})r_x + (M_x-m_x)(r_x+r_{x+1}) \\ &-(M_{x+1}-m_{x+1})r_{x+1} = 0 \end{aligned}$$

となり

$$M_x = m_x,$$

これはガーダーのみが効いていることを示す。またガーダーの剛性が極めて弱いときは α が無限大となり、故に

$$K_x = 6\alpha_x, \quad H_x = \alpha_x,$$

と書けるので、(17) 式から

$$\begin{aligned} &\alpha_x (hL_{x-1}-m_{x-1}) + 2(\alpha_x+\alpha_{x+1})(hL_x-m_x) \\ &+\alpha_{x+1}(hL_{x+1}-m_{x+1}) = 0, \end{aligned}$$

従つて

$$L_x = m_x/h$$

これは純粹なトラスの働きである。

他の型のトラストガーダーも類似の方法で解析できる。

応力解析は反復近似法で比較的簡単に行なうことができる、特に他の不静定構造物よりは解析がずつと案である。

さらに H は一般に K より小さく、第一近似として

$$H = 0$$

のときの公式 (19), (20) によつて大体の断面を仮定できる。

経済的な観点についてはさらに研究を必要とするが、トラストガーダーが構造設計の分野においてその占めるべき位

置をもつていると考えて差支えなからう。

参 考 文 献

差 分 法

福田武雄：差分法 昭和 23 年。

吉田耕吉外 4 名：応用数学便覧 昭和 29 年。

W. Klemp：Ein neues Verfahren der Tragerrostberechnung, BETON UND STAHLBETONBAU, H. 1, 1956.