

有限振幅長波の変形

正員 北大工 工博 岸 力

1. 緒 言

水深変化に伴う長波の変形に関しては、古くから多くの研究が行なわれ、微小振幅を仮定した線形理論は整然たる体系を整えている。しかし、有限振幅波としての長波の変形は十分に解明されていない。

本文は有限振幅長波の変形を求める著者の近似解法を述べたものである。さらに解法の精度を調べるため、著者の方法にもとづく長波の碎波点と Greenspan の厳密解とを比較し、両者がよく一致することを確かめてある。

2. 有限振幅長波の基本式

図-1 に示すように水深が直線的に変化する、海底勾配 α の水域を考える。図に示した記号にしたがえば、有限振幅長波の連続の式、および運動の式はそれぞれ (1), (2) 式で与えられる。

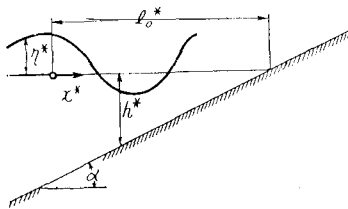


図-1 Definition Sketch of long wave on a sloping beach

$$[v^*(\eta^* + h^*)]_{x^*} = -\eta_{t^*}^* \quad (1)$$

$$v_{t^*}^* + v^* v_{x^*}^* = -g^* \eta_{x^*}^* \quad (2)$$

水深は図-1 に示したように

$$h^* = \alpha (l_0^* - x^*) \quad (3)$$

で表わされる。

諸量を無次元化するために、次の変換を行なう。

$$\left. \begin{aligned} x &= x^*/l_0^*, \quad h = h^*/\alpha l_0^*, \quad \eta = \eta^*/\alpha h_0^*, \quad v = v^*/v_0^* \\ t &= t^*/l_0^*, \quad t_0^* = (l_0^*/\alpha g^*)^{1/2}, \quad v_0^* = (\alpha g^* l_0^*)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

無次元化された基本式は (5), (6) 式で与えられる。

$$[v(\eta + 1 - x)]_x = -\eta_t \quad (5)$$

$$v_t + v v_x = -\eta_x \quad (6)$$

ここで

$$\eta + (1 - x) = \eta + h = C^2 \quad (7)$$

とおけば、(5), (6) 式は (8), (9) 式のように書きなおされる。

$$C^2 v_x + 2v C C_x + 2C C_t = 0 \quad (8)$$

$$v_t + v v_x + 2C C_x + 1 = 0 \quad (9)$$

(8), (9) 式の特性格線表示を求めると

$$dx/dt = v + C \quad (10)$$

$$v + 2C + t = k_1 = \text{const.} \quad (11)$$

$$dx/dt = v - C \quad (12)$$

$$v - 2C + t = k_2 = \text{const.} \quad (13)$$

(10)~(13) 式の厳密解を解析的に求めることは困難で、数値積分によらねばならないが、計算が非常に煩雑で実用的でない。以下に有限振幅長波の変形を求める著者の方法を述べる。

3. 有限振幅長波の変形

特性格線表示 (10) および (11) に注目する。 $t = \tau$ のとき原点からでる特性格線にそつて考えれば (11) 式から

$$v(\tau) + 2C(\tau) + \tau = v(t) + 2C(t) + t$$

すなわち

$$C(t) = C(\tau) - \frac{1}{2}(t - \tau) - \frac{1}{2}\{v(t) - v(\tau)\} \quad (14)$$

これは、ある特性格線にそつて、 $t = \tau$ と $t = t$ との二つの時刻における関数 C の値の変化を示す関係である。

ここで $v < C$ なることを考慮して、 v に微小振幅波の値を用いれば $v = \eta h^{-1/2}$ 、あるいは

$$v(t)/v(\tau) = \{\eta(t)/\eta(\tau)\} h^{-1/2} \quad (15)$$

さらに Green の式が成立つものとして $\eta(t)/\eta(\tau) = h^{-1/4}$ とすれば

$$v(t) = v(\tau) h^{-3/4} \quad (16)$$

となる。原点 $x=0$ では $h=1$ であるから、 $v(\tau) = \eta(\tau) = C^2(\tau) - 1$ したがつて (14) 式は

$$C(t) = C(\tau) - \frac{1}{2}(t - \tau) - \frac{1}{2}\{C^2(\tau) - 1\}(h^{-3/4} - 1) \quad (17)$$

となる。これを (10) 式に代入すれば

$$dx/dt = C(\tau) - \frac{1}{2}(t - \tau) + \frac{1}{2}\{C^2(\tau) - 1\}(h^{-3/4} + 1)$$

さらに $h^{-3/4} = (1 - x)^{-3/4} \doteq 1 + \frac{3}{4}x$ であるから、上式は

$$dx/dt = C(\tau) - \frac{1}{2}(t-\tau) + \{C^2(\tau) - 1\} + \{C^2(\tau) - 1\} \frac{3}{8}x \quad (18)$$

となる。これが $t=\tau$ のとき原点からでる特性曲線の近似式である。

(18) 式を積分すれば、(19) 式の解が得られることは簡単にかかる。

$$x = e^{\int_0^t \{C^2(\tau) - 1\} d\tau} \left\{ \int_0^t e^{-\int_0^s \{C^2(\tau) - 1\} d\tau} [C(\tau) - \frac{1}{2}(t-\tau) + \{C^2(\tau) - 1\}] d\tau + K \right\} \quad (19)$$

しかし、(19) 式では実際の計算に不便であるから、(18) 式の右辺第 4 項が他項にくらべて小さい補正項であることを考えて、さらに簡単な表現を求める。(18) 式の右辺第 4 項を無視した x の第 1 近似式は、 $t=\tau$ のとき $x=0$ である条件から

$$x_1 = \{C(\tau) + C^2(\tau) - 1\}(t-\tau) - \frac{1}{4}(t-\tau)^2 \quad (20)$$

この第 1 近似を (18) 式の右辺第 4 項に用い、再び $t=\tau$ で $x=0$ となる解を求めれば

$$x = \{C(\tau) + C^2(\tau) - 1\}(t-\tau) - \frac{1}{4}(t-\tau)^2 + \frac{3}{8}\{C^2(\tau) - 1\} \left\{ \frac{1}{2}(t-\tau)^2 - \frac{1}{12}(t-\tau)^3 \right\} \quad (21)$$

(21) 式は τ をパラメータとして $x \sim t$ 平面に描かれる特性曲線群を表わす。

また、この特性曲線上任意の点の水位は、(17) 式から

$$C(t) = C(\tau) - \frac{1}{2}(t-\tau) - \frac{1}{2}\{C^2(\tau) - 1\} \cdot \frac{3}{4}x$$

であるから、 x に (21) 式を代入すれば

$$C(t) = C(\tau) - \frac{1}{2}(t-\tau) - \frac{3}{8}\{C^2(\tau) - 1\} [\{C(\tau) + C^2(\tau) - 1\}(t-\tau) - \frac{1}{4}(t-\tau)^2] \quad (22)$$

となる。したがって原点における波形 $C(\tau)$ が指定されれば、(21)、(22) 式によつて、任意の点の波形を容易に求めることができる。

4. 著者の解による長波の砕波点

前節に示した著者の解法の精度を調べるために砕波点を計算する。前にも述べたとおり、有限振幅長波の基本式 (10)~(13) を解析的に扱った例はないが、砕波点だけならば Greenspan が厳密解を求めている。そこで著者の解と Greenspan の解とを比較し、解の精度を調べようとするものである。

(21) 式は特性曲線群の式で、特性曲線の交点が砕波点になる。特性曲線群の交点は $dx/d\tau=0$ の解として表わされる。(21) 式から

$$dx/d\tau = \{C_\tau + 2CC_\tau\}(t-\tau) - (C + C^2 - 1) + \frac{1}{2}(t-\tau) + \frac{3}{8}(2CC_\tau) \left\{ \frac{1}{2}(t-\tau)^2 - \frac{1}{12}(t-\tau)^3 \right\} + \frac{3}{8}(C^2 - 1) \left\{ -(t-\tau) + \frac{1}{4}(t-\tau)^2 \right\} = 0 \quad (23)$$

$$\text{ただし } C = C(0, \tau), \quad C_\tau = \frac{d}{d\tau}[C(0, \tau)]$$

$\tau=0$ なる初めの特性曲線で考えれば、静止の状態から波動が始まるのであるから $C(0, 0)=1$ である。したがって初めの砕波時刻 t_b は (23) 式から

$$\frac{3}{8}C_\tau(0, 0) \left\{ t_b^2 - \frac{1}{6}t_b^3 \right\} + \left\{ 3C_\tau(0, 0) + \frac{1}{2} \right\} t_b - 1 = 0 \quad (24)$$

t_b^3 の項を無視して t_b の正の解を求めると、

$$t_b = \frac{-\left\{ 3C_\tau(0, 0) + \frac{1}{2} \right\} + \left[\left\{ 3C_\tau(0, 0) + \frac{1}{2} \right\}^2 + \frac{3}{2}C_\tau(0, 0) \right]^{1/2}}{\frac{3}{4}C_\tau(0, 0)} \quad (25)$$

(25) 式は初めの水位上昇速度と砕波時刻との関係を示すものであるが、これを初めの水面勾配と砕波時刻との関係に書きあらためる。

$\eta_x(0, 0) = -\eta_\tau(0, 0)/C(0, 0) = -\eta_\tau(0, 0)$, および $C^2 = \eta + h$ であるから $C_\tau(0, 0) = \frac{1}{2}\eta_\tau(0, 0)$ なる関係から

$$\eta_x(0, 0) = -m \text{ とおけば } C_\tau(0, 0) = m/2 \quad (26)$$

となる。これを (25) 式に代入すれば

$$t_b = \frac{-(3m+1) + \{ (3m+1)^2 + 3m \}^{1/2}}{\frac{3}{4}m} \quad (27)$$

が得られる。(27) 式で入射波が極めて低い場合を考えれば $\lim_{m \rightarrow 0} t_b = 2$ であり、これを (21) 式に代入すれば $\lim_{t_b \rightarrow 2} x = 1$ となり、初めの水面勾配が如何に小さくとも、圧縮性の波 ($m > 0$) である限り、長波は汀線に達する前に砕けることが証明される。

また初めの砕波点 x_b は、 $C(\tau)=1$, $\tau=0$ を (21) 式に代入して

$$x_b = t_b - \frac{1}{4}t_b^2 \quad (28)$$

となる。

5. Greenspan の求めた砕波点との比較

Greenspan は波の前面が垂直になる点として砕波点を別の方法で求めている。

静止の状態から波が起ると考えているから、第 1 波の先端に対する特性曲線においては $v=0$ であり、(10) 式は

$$dx/dt = C \quad (29)$$

また、この特性曲線に沿つて $v+2C+t=2C(t)+t=2C(0)=2$ であるから、 $C(t)=1-t/2$ となり、(29) 式から

$$x = t - t^2/4 \quad (30)$$

となる。ここで座標を波の先端に移し、移動する波の先端から計つた距離を ξ とすれば、初めの原点からの距離 x と新しい原点からの距離 ξ との関係は

$$x = \xi + t - t^2/4 \quad (31)$$

(31) 式を基本式 (5)、(6) 式に代入して変数を x から ξ に変えると、 $\eta_t(x, t) = \eta_t - (1-t/2) \eta_\xi$ であるから (5)、(6) 式はそれぞれ

$$v_\xi(1-\xi-t+t^2/4+\eta)+v(-1+\eta_\xi) = -\eta_t + \left(1-\frac{t}{2}\right)\eta_\xi \quad (32)$$

$$v_t - (1-t/2)v_\xi + vv_\xi = -\eta_\xi \quad (33)$$

移動する座標系では $\xi=0$ において $\eta=0$, $\eta_t=0$, $\eta_{tt}=0$, $v=0$, $v_t=0$, および $v_{tt}=0$ のはずであるから、 $\xi=0$ における方程式は (32), (33) 両式とも

$$\eta_\xi = v_\xi(1-t/2) \quad \text{at } \xi = 0 \quad (34)$$

となる。

(32) 式を t で微分し、(33) 式の関係を用いれば

$$\eta_{\xi t} = v_{\xi t}(1-t/2) - \frac{1}{2}v_\xi \quad \text{at } \xi = 0 \quad (35)$$

同様に (32), (33) 式を ξ で微分し加え合わせれば

$$v_{\xi t}\left(1-\frac{t}{2}\right) - 2v_\xi + 3\left(1-\frac{t}{2}\right)v_\xi^2 = -\eta_{\xi t} \quad \text{at } \xi = 0 \quad (36)$$

(35), (36) 両式を加え合わせて $\eta_{\xi t}$ を消去すれば $v_\xi(0, t)$ の式が得られる。

$$\left(1-\frac{t}{2}\right)v_{\xi t} = \frac{5}{4}v_\xi - \frac{3}{2}\left(1-\frac{t}{2}\right)v_\xi^2 \quad (37)$$

同様に $v_{\xi t}$ を消去すれば、 $\eta_\xi(0, t)$ の式は

$$\left(1-\frac{t}{2}\right)\eta_{\xi t} = \frac{3}{4}\eta_\xi - \frac{1}{2}\eta_\xi^2 \quad (38)$$

(37) および (38) 式は、 v_ξ および η_ξ の時間的変化を表わす 1 階偏微分方程式で、それぞれの解は

$$v_\xi(0, t) = 1/\{(2-t)[1-A^{1/2}(1-t/2)^{3/2}]\} \quad (39)$$

$$\eta_\xi(0, t) = 1/\{2[1-A^{1/2}(1-t/2)^{3/2}]\} \quad (40)$$

ただし

$$A = \left[\frac{u_\xi(0, 0) - \frac{1}{2}}{u_\xi(0, 0)}\right]^2 = \left[\frac{\eta_\xi(0, 0) - \frac{1}{2}}{\eta_\xi(0, 0)}\right]^2 = \left[\frac{1+2m}{2m}\right]^2 \quad (41)$$

砕波点では、波の前面が垂直になるから $\eta_\xi = \infty$ したがって、(40) 式から、砕波時刻 t_b は

$$t_b = 2(1-A^{-1/3}) = 2\left\{1 - \left[\frac{2m}{1+2m}\right]^{2/3}\right\} \quad (42)$$

(42) 式で m が 0 に近づく極限を考えれば

$$\lim_{m \rightarrow 0} t_b = 2$$

であつて、これは前節に示した著者の解 (27) 式の極限值と一致する。また (30) 式から $\lim_{t_b \rightarrow 2} x = 1$ となり、これも著者の解と一致する。

(42) 式を (30) 式に代入すれば、砕波点は

$$x_b = t_b - t_b^2/4 = 1 - \left[\frac{2m}{1+2m}\right]^{4/3} \quad (43)$$

となる。

前節に示した著者の解と Greenspan の解とを比較して、図-2 および 図-3 に示した。図-2 は初めの水面勾配 m と砕波時刻 t_b との関係であり、図-3 は初めの水面勾配 m と砕波点 x_b との関係である。図中いずれも実線は Greenspan の厳密解であり、破線は著者の解である。

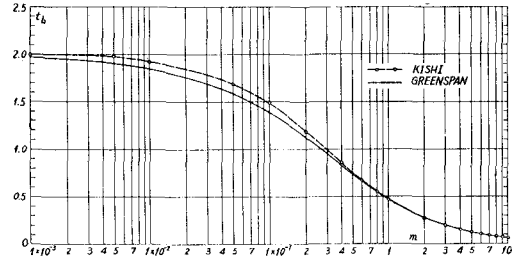


図-2 Breaking time as a function of initial slope

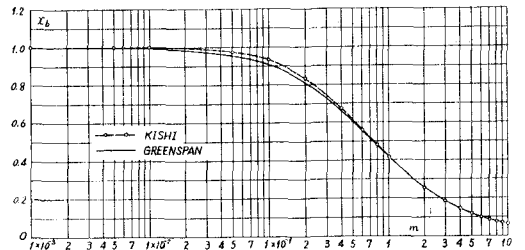


図-3 Breaking position as a function of initial slope

著者の解から求めた砕波時刻 t_b は、 m が非常に小さい時に厳密解より数%大きい値を与えるが、 $m > 0.5$ の範囲では図-2 に見るとおり両者はほとんど一致している。しかも一例として $h_0^* = 10$ m, $H_0^* = 1$ m, $T^* = 8.0$ sec の正弦長波を考えれば $m = 0.82$ であり、この例で明らかとなお普通のうねりは $m > 0.5$ と考えて差支えないのである。

砕波点については、(28) 式と (43) 式とは形式的には一致しているが、 t_b に差があるため両者は完全には一致しないしかし、図-2 に明らかなように t_b の差は小さいから、実際的には両者はまたほとんど一致している。

図-2 および 図-3 によれば、著者の近似解にもとづく砕

波点は Greenspan の厳密解とよく一致しているといえる。
したがって、有限振幅長波の変形を計算する著者の解法は
実用的には充分の精度をもつものと思う。

なお本研究は「文部省試験研究—養浜の海岸工学的研究
(代表者 京大教授 岩垣雄一)」の一部として行なつたもの
である。

参 考 文 献

- 1) H. P. Greenspan: "On the breaking of water waves of finite amplitude on a sloping beach",
Journal of Fluid Mechanics, Vol. 4, Part 3, July 1958.