土木学会北海道支部　技術資料　第十六号

斜板橋の解法ならびに応力特性について

正員　北海道開発局土木試験所　岡　元　北　海

斜板橋の解法については従来階差方式によつて解かれているが，厳密解は得られていない。筆者は平衡条件式を満足する斜板の一般解より境界条件を満足する条件式を求めて，この条件式をフーリエ級数に展開し条件式に含まれている未知数を求めた。

1.　矩形平面板の一般解

厚さが他の寸法に比較して小さい均質等方性板が外力を受け且つそれにより生ずる厚さ方向の変位，すなわち撓みが厚さに比し小さいときは，平板の面に垂直方向の力の釣合条件すなわち中立面の撓みの微分方程式は次のように表わされる。

$$\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\zeta}{\partial y^4}=\frac{p(xy)}{D} \qquad (1)$$

ただし

ζ:　中立面の撓み

$p(xy)$:　板の面に垂直に作用する分布荷重

D:　$Eh^3/12(1-\nu^2)$ 板の剛度

E:　板の材料のヤング係数

ν:　板の材料のポアソン比

h:　板の厚さ

(1) 式の特解を ζ_0 とすれば一般解 ζ_1 は次のように表わされる。

$$\zeta_s=f_1(x+iy)+g_2(x-iy)+\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\left\{f_2(x+iy)+g_2(x-iy)\right\}$$

これより (1) 式の解は

$$\zeta=\zeta_0+\zeta_1$$

図 I および図 II より満載等分布荷重を受ける場合 (1) 式の解は次のようになる。

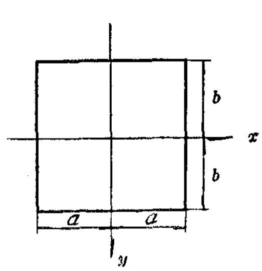

図 I

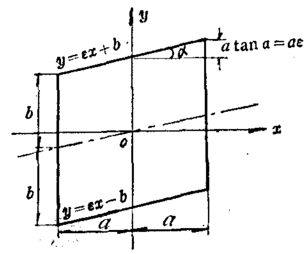

図 II

$$\zeta=\frac{pb^4}{24D}\left(\frac{y^4}{b^4}-6\frac{y^2}{b^2}+5\right)+f_1(x+iy)$$
$$+g_1(x-iy)+x\left[f_2(x+iy)+g_2(x-iy)\right] \qquad (2)'$$

2.　斜板橋の一般解

前節の結果より図 II のとおり x 軸に α の角度を持つ斜板の解は (2)′ より次のようになる。

$$\zeta=\frac{p}{24(1+\varepsilon^2)^2}\left[(y-\varepsilon x)^4-6b^2(y-\varepsilon x)^2+5b^4\right]$$
$$+f_1(x+iy)+g_1(x-iy)+(x+\varepsilon y)$$
$$\left\{\frac{1}{1+i\varepsilon}f_2(x+iy)+\frac{1}{1-i\varepsilon}g_2(x-iy)\right\}$$

上式において $y=\varepsilon x+b$ および $y=\varepsilon x-b$ なる辺を単純支持とすれば

$$\zeta=0 \text{ および } \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial y^2}=0 \qquad (4)$$

(4) の条件を (3) 式に代入整理すれば次の式をうる。

$$\zeta=\frac{p}{24D(1+\varepsilon^2)^2}\left\{(y-\varepsilon x)^4-6b^2(y-\varepsilon x)^2+5b^4\right\}$$
$$+2(x+\varepsilon y)\,\varepsilon\sum_{n=2,4,6,\cdots}C_n\sin\frac{n\pi}{2b}(\varepsilon x-y)\cdot$$
$$\cosh\frac{n\pi}{2b}(x+\varepsilon y)+2(x+\varepsilon y)\sum_{n=1,3,5,\cdots}D_n\cdot$$
$$\cos\frac{n\pi}{2b}(\varepsilon x-y)\sinh\frac{n\pi}{2b}(x+\varepsilon y)-\varepsilon\sum_{n=2,4,6,\cdots}A_n\cdot$$
$$\sin\frac{n\pi}{2b}(\varepsilon x-y)\sinh\frac{n\pi}{2b}(x+\varepsilon y)-\sum_{n=1,3,5,\cdots}B_n\cdot$$
$$\cos\frac{n\pi}{2b}(\varepsilon x-y)\cosh\frac{n\pi}{2b}(x+\varepsilon y) \qquad (5)$$

式中 $A_nB_nC_nD_n$ の 4 つの未知数は $x=\pm a$ なる辺が自由辺なる条件より求められる。

3. 斜板橋の解法

図 II において $x=\pm a$ なる辺を自由辺とすれば境界条件は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}&\left|\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right|_{x=\pm a}=0\\&\left|\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3\zeta}{\partial x\partial y^2}\right|_{x=\pm a}=0\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

よつて (6) 式に (5) 式を代入すれば次の式をうる。

すなわち

$$\begin{aligned}&\sum_{n=2,4,6,\cdots}g_n C_n+\sum_{n=1,3,5,\cdots}h_n D_n\\&\quad+\sum_{n=2,4,6,\cdots}i_n\ A_n\ +\sum_{n=1,3,5,\cdots}j_n\ B_n=R(y)\end{aligned}\tag{7}$$

および

$$\begin{aligned}&\sum_{n=2,4,6,\cdots}g'_n C_n+\sum_{n=1,3,5,\cdots}h'_n D_n\\&\quad+\sum_{n=2,4,6,\cdots}i'_n\ A_n+\sum_{n=1,3,5,\cdots}j'_n\ B_n=R'(y)\end{aligned}\tag{8}$$

上式において

$$\begin{aligned}g_n&=2\frac{n}{\pi}\left\{\varepsilon^2(1-\nu)f_n^{(a)}+\varepsilon(1+\nu\varepsilon^2)\phi_n^{(a)}\right\}\\&\quad+\frac{1}{2}(1-\nu)\varepsilon^2(a'-y')n^2\left\{\varphi_n^{(a)}(1-\varepsilon^2)+2\varepsilon\tau_n^{(a)}\right\}\\h_n&=2\frac{n}{\pi}\left\{(1+\nu\varepsilon^2)f_n^{(a)}-\varepsilon(1-\nu)\phi_n^{(a)}\right\}\\&\quad+\frac{1}{2}(1-\nu)\varepsilon(a'-y')n^2\left\{\tau_n^{(\nu)}(1-\varepsilon^2)-2\varepsilon\varphi_n^{(a)}\right\}\\j_n&=-\frac{n^2}{4}(1-\nu)\left\{f_n^{(a)}(1-\varepsilon^2)-2\varepsilon\phi_n^{(a)}\right\}\\i_n&=-\varepsilon\frac{n^2}{4}(1-\nu)\left\{\phi_n^{(a)}(1-\varepsilon^2)+2\varepsilon f_n^{(a)}\right\}\\R(y)&=-\frac{(y^{2\prime}-1)}{2\pi^2(1+\varepsilon^2)}(\nu+\varepsilon^2)\end{aligned}\tag{7}'$$

および

$$\begin{aligned}g'_n&=\frac{n^2}{\pi}\left[\left\{\varepsilon(1-\nu)(\varepsilon^2-2\varepsilon)+\varepsilon^2(1+\varepsilon^2)\right\}\tau_n^{(a)}\right.\\&\quad\left.+\left\{\varepsilon(1+\varepsilon^2)+\frac{1}{2}(1-\nu)(5\varepsilon^2-1)\varepsilon\right\}\varphi_n^{(a)}\right]\\&\quad+\frac{n^3}{4}(a'-y')(1-\nu)\varepsilon^2\\&\qquad\left\{f_n^{(a)}(\varepsilon^3-3\varepsilon)+(3\varepsilon^2-1)\phi_n^{(a)}\right\}\\h'_n&=\frac{n^2}{\pi}\left[\left\{(1-\nu)(2\varepsilon-\varepsilon^3)-\varepsilon(1+\varepsilon^2)\right\}\varphi_n^{(a)}\right.\\&\quad\left.+\left\{(1+\varepsilon^2)+\frac{1}{2}(1-\nu)(5\varepsilon^2-1)\right\}\tau_n^{(a)}\right]\\&\quad+\frac{n^3}{4}(a'-y')(1-\nu)\varepsilon^2\left\{(3\varepsilon^2-1)f_n^{(a)}\right.\\&\quad\left.-(\varepsilon^3-3\varepsilon)\phi_n^{(a)}\right\}\\j'_n&=-(1-\nu)\frac{n^3}{8}\left\{\tau_n^{(a)}(3\varepsilon^2-1)-\varphi_n^{(a)}(\varepsilon^3-3\varepsilon)\right\}\\i'_n&=-(1-\nu)\frac{n^3}{8}\varepsilon\left\{\tau_n^{(a)}(\varepsilon^3-3\varepsilon)+\varphi_n^{(a)}(3\varepsilon^2-1)\right\}\\R'_n&=-\frac{\varepsilon}{\pi^3(1+\varepsilon^2)}\left(1+\frac{1-\nu}{1+\varepsilon^2}\right)y'\end{aligned}\tag{8}'$$

(7)′ (8)′ において $\varphi_n^{(a)}\tau_n^{(a)}f_n^{(a)}\phi_n^{(a)}$ はそれぞれ $\varphi_n\ \tau_n\ f_n\ \phi_n$ の x の代りに a の値を代入した値である。

ただし

$$\varphi_n=\sin\frac{n\pi}{2b}(\varepsilon x-y)\cosh\frac{n\pi}{2b}(x+\varepsilon y)\cdot\frac{1}{\cosh\frac{n}{2}\pi\varepsilon(a'+1)}$$

$$\tau_n=\cos\frac{n\pi}{2b}(\varepsilon x-y)\sinh\frac{n\pi}{2b}(x+\varepsilon y)\cdot\frac{1}{\cosh\frac{n}{2}\pi\varepsilon(a'+1)}$$

$$\phi_n=\sin\frac{n\pi}{2b}(\varepsilon x-y)\sinh\frac{n\pi}{2b}(x+\varepsilon y)\cdot\frac{1}{\cosh\frac{n}{2}\pi\varepsilon(a'+1)}$$

$$f_n=\cos\frac{n\pi}{2b}(\varepsilon x-y)\cosh\frac{n\pi}{2b}(x+\varepsilon y)\cdot\frac{1}{\cosh\frac{n}{2}\pi\varepsilon(a'+1)}$$

$$y'=\varepsilon a-y\tag{9}$$

(7) (8) は y の変数が入つているが y の値のいかんに関せず成立することが必要である。

したがつて両辺の y の関係をフーリエの sin 級数に展開すれば (ただし展開区域を 0 から π にするため $y'=2y-1$ と変換する) 次の値を得る。

すなわち

$$\left.\begin{aligned}\varphi_n^{(a)}&=H_{\varphi ns}^{(1)}=\sum_{s=1}^{\infty}(v_{ns}^{\prime(1)}-v_{ns}^{(1)})\sin s\pi y\\\tau_n^{(a)}&=H_{\tau ns}^{(1)}=\sum_{s=1}^{\infty}(w_{ns}^{(1)}-w_{ns}^{\prime(1)})\sin sy\pi\\\phi_n^{(a)}&=H_{\phi ns}^{(1)}=\sum_{s=1}^{\infty}(z_{ns}^{\prime(1)}-z_{ns}^{(1)})\sin s\pi y\\f_n^{(a)}&=H_{fns}^{(1)}=\sum_{s=1}^{\infty}(u_{ns}^{(1)}-u_{ns}^{\prime(1)})\sin s\pi y\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

上式中

$$\left.\begin{aligned}u_{ns}^{(1)}&=\frac{1}{\pi\lambda_{ns}}\left\{n\varepsilon a_{ns}-(n+s)b_{ns}\right\}\\u_{ns}^{\prime(1)}&=\frac{1}{\pi\lambda'_{ns}}\left\{n\varepsilon a_{ns}-(n-s)b_{ns}\right\}\\v_{ns}^{(1)}&=\frac{1}{\pi\lambda_{ns}}\left\{n\varepsilon c_{ns}+(n+s)d_{ns}\right\}\\v_{ns}^{\prime(1)}&=\frac{1}{\pi\lambda'_{ns}}\left\{n\varepsilon c_{ns}+(n-s)d_{ns}\right\}\\w_{ns}^{(1)}&=\frac{1}{\pi\lambda_{ns}}\left\{-n\varepsilon d_{ns}+(n+s)c_{ns}\right\}\\w_{ns}^{\prime(1)}&=\frac{1}{\pi\lambda'_{ns}}\left\{-n\varepsilon d_{ns}+(n-s)c_{ns}\right\}\\z_{ns}^{(1)}&=\frac{1}{\pi\lambda_{ns}}\left\{n\varepsilon b_{ns}+(n+s)a_{ns}\right\}\\z_{ns}^{\prime(1)}&=\frac{-1}{\pi\lambda'_{ns}}\left\{n\varepsilon b_{ns}+(n-s)a_{ns}\right\}\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

(11) 式において

$$
\left.
\begin{aligned}
&\lambda_{ns} = n^2\varepsilon^2+(n+s)^2, \quad \lambda'_{ns} = n^2\varepsilon^2+(n-s)^2, \\
&a_{ns} = \frac{-(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\cosh\frac{n\pi}{2}\varepsilon(a'+1)} \\
&\qquad \left\{(-1)^s\sinh\frac{n\pi}{2}\varepsilon(a'-1)+\sinh\frac{n\pi}{2}\varepsilon(a'+1)\right\} \\
&b_{ns} = \frac{-(-1)^{\frac{n}{2}}}{\cosh\frac{n\pi}{2}\varepsilon(a'+1)} \\
&\qquad \left\{(-1)^s\cosh\frac{n\pi}{2}\varepsilon(a'-1)-\cosh\frac{n\pi}{2}\varepsilon(a'+1)\right\} \\
&c_{ns} = \frac{-(-1)^{\frac{n}{2}}}{\cosh\frac{n\pi}{2}\varepsilon(a'+1)} \\
&\qquad \left\{(-1)^s\sinh\frac{n\pi}{2}\varepsilon(a'-1)-\sinh\frac{n\pi}{2}\varepsilon(a'+1)\right\} \\
&d_{ns} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\cosh\frac{n\pi}{2}\varepsilon(a'+1)} \\
&\qquad \left\{(-1)^s\cosh\frac{n\pi}{2}\varepsilon(a'-1)+\cosh\frac{n\pi}{2}\varepsilon(a'+1)\right\}
\end{aligned}
\right\} \quad (11)'
$$

同様に

$$
\left.
\begin{aligned}
H^{(2)}_{\varphi ns} &= \int_0^1 H^{(1)}_{\varphi ns}dy = \sum_{s=1}^{\infty}(v^{(2)}_{ns}-v^{(2)}_{ns})\sin s\pi y \\
H^{(2)}_{\tau ns} &= \int_0^1 H^{(1)}_{\tau ns}dy = \sum_{s=1}^{\infty}(w^{(2)}_{ns}-w^{(2)}_{ns})\sin s\pi y \\
H^{(2)}_{\phi ns} &= \int_0^1 H^{(1)}_{\phi ns}dy = \sum_{s=1}^{\infty}(z^{(2)}_{ns}-z^{(2)}_{ns})\sin s\pi y \\
H^{(2)}_{fns} &= \int_0^1 H^{(1)}_{fns}dy = \sum_{s=}^{\infty}(u^{(2)}_{ns}-u^{(2)}_{ns})\sin s\pi y
\end{aligned}
\right\} \quad (12)
$$

上式中

$$
\left.
\begin{aligned}
u^{(2)}_{ns} &= \frac{-1}{\pi\lambda_{ns}}\left\{n\varepsilon w^{(1)}_{ns}+(n+s)v^{(1)}_{ns}\right\} \\
u'^{(2)}_{ns} &= \frac{1}{\pi\lambda'_{ns}}\left\{n\varepsilon w'^{(1)}_{ns}+(n-s)v'^{(1)}_{ns}\right\} \\
v^{(2)}_{ns} &= \frac{1}{\pi\lambda_{ns}}\left\{-n\varepsilon z^{(1)}_{ns}+(n+s)u^{(1)}_{ns}\right\} \\
v'^{(1)}_{ns} &= \frac{1}{\pi\lambda'_{ns}}\left\{-n\varepsilon z'^{(1)}_{ns}+(n-s)u'^{(1)}_{ns}\right\} \\
w^{(2)}_{ns} &= \frac{-1}{\pi\lambda_{ns}}\left\{n\varepsilon u^{(1)}_{ns}+(n+s)z^{(1)}_{ns}\right\} \\
w'^{(2)}_{ns} &= \frac{-1}{\pi\lambda'_{ns}}\left\{n\varepsilon u'^{(1)}_{ns}+(n-s)z'^{(1)}_{ns}\right\} \\
z^{(2)}_{ns} &= \frac{1}{\pi\lambda_{ns}}\left\{-n\varepsilon v^{(1)}_{ns}+(n+s)w^{(1)}_{ns}\right\} \\
z'^{(2)}_{ns} &= \frac{1}{\pi\lambda'_{ns}}\left\{-n\varepsilon v^{(1)}_{ns}+(n-s)w'^{(1)}_{ns}\right\}
\end{aligned}
\right\} \quad (12)'
$$

よつて (7) (8) 式をフーリエの sin 級数に展開すれば (7)′ (8)′ のそれぞれの値は次の値をとる。

$$
\left.
\begin{aligned}
g_n &= 2\frac{n}{\pi}\left\{\varepsilon^2(1-\nu)H^{(1)}_{fns}+\varepsilon(1+\nu\varepsilon^2)H^{(1)}_{\phi ns}\right\} \\
&\quad +\frac{1}{2}(1-\nu)\varepsilon^2 n^2\Big[(a'+1)\Big\{H^{(1)}_{\varphi ns}(1-\varepsilon^2) \\
&\quad +2\varepsilon H'^{(1)}_{\tau ns}\Big\}-2\Big\{(1-\varepsilon^2)(H'^{(1)}_{\varphi ns}-H^{(2)}_{\varphi ns}) \\
&\quad +2\varepsilon(H'^{(1)}_{\tau ns}-H^{(2)}_{\tau ns}\Big\}\Big] \\
h_n &= 2\frac{n}{\pi}\left\{(1+\nu\varepsilon^2)H^{(1)}_{fns}-\varepsilon(1-\nu)H^{(1)}_{\phi ns}\right\} \\
&\quad +\frac{1}{2}(1-\nu)\varepsilon n^2\Big[(a'+1)\Big\{(1-\varepsilon^2)H^{(1)}_{\tau ns} \\
&\quad -2\varepsilon H^{(1)}_{\varphi ns}\Big\}-2\Big\{(1-\varepsilon^2)(H'^{(1)}_{\tau ns}-H^{(2)}_{\tau ns} \\
&\quad -2\varepsilon(H'^{(1)}_{\varphi ns}-H^{(2)}_{\varphi ns}\Big\}\Big] \\
j_n &= -\frac{n^2}{4}(1-\nu)\left\{(1-\varepsilon^2)H^{(1)}_{fns}-2\varepsilon H^{(1)}_{\phi ns}\right\} \\
i_n &= -\varepsilon\frac{n^2}{4}(1-\nu)\left\{(1-\varepsilon^2)H^{(1)}_{\phi ns}+2\varepsilon H^{(1)}_{fns}\right\} \\
R(y) &= \frac{8(\nu+\varepsilon^2)}{\pi^5(1+\varepsilon^2)}\left\{1-(-1)^s\right\}
\end{aligned}
\right\} \quad (13)
$$

および

$$
\left.
\begin{aligned}
g'_n &= \frac{n^2}{\pi}\varepsilon(C_1H^{(1)}_{\tau ns}+C_2H^{(1)}_{\varphi ns})+\frac{n^3}{4}(1-\nu)\varepsilon^2 \\
&\quad \Big[(a'+1)(C_4H^{(1)}_{fns}+C_3H^{(1)}_{\phi ns}) \\
&\quad -2\Big\{C_4(H'^{(1)}_{fns}-H^{(2)}_{fns} \\
&\quad +C_3(H'^{(1)}_{\phi ns}-H^{(2)}_{\phi ns}\Big\}\Big] \\
h'_n &= \frac{n^2}{\pi}(-C_1H^{(1)}_{\varphi ns}+C_2H^{(1)}_{\tau ns}+\frac{n^3}{4}(1-\nu)\varepsilon \\
&\quad \Big[(a'+1)(C_3H^{(1)}_{fns}-C_4H^{(1)}_{\phi ns}) \\
&\quad -2\Big\{C_3(H'^{(1)}_{fns}-H^{(2)}_{fns}) \\
&\quad -C_4(H'^{(1)}_{\phi ns}-H^{(2)}_{\phi ns})\Big\}\Big] \\
j'_n &= -(1-\nu)\frac{n^3}{8}(C_3H^{(1)}_{\tau ns}-C_4H^{(1)}_{\varphi ns}) \\
i'_n &= -(1-\nu)\frac{n^3}{8}\varepsilon(C_4H^{(1)}_{\tau ns}+C_3H^{(1)}_{\varphi ns}) \\
R' &= \frac{2}{\pi^3}\cdot\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2}\left(1+\frac{1-\nu}{1+\varepsilon^2}\right)\cdot\frac{1+(-1)^s}{s\pi}
\end{aligned}
\right\} \quad (14)
$$

(14) 式中

$$
\left.
\begin{aligned}
C_1 &= \varepsilon(1+\varepsilon^2)-(1-\nu)(2\varepsilon-\varepsilon^3) \\
C_2 &= 1+\varepsilon^2+\frac{1}{2}(1-\nu)(5\varepsilon^2-1) \\
C_3 &= (1-\nu)(3\varepsilon^2-1) \\
C_4 &= (1-\nu)(\varepsilon^3-3\varepsilon)
\end{aligned}
\right\} \quad (14)'
$$

かくして n 個の未知数に対して s 個の方程式をうる故解を求めうることができる。