

双曲放物線面の図学的諸性質と構造物について

正員 北海道大学理学部 沢田 詮 亮

1. 結 言

双曲放物線面はコンクリート構造物その他の工作物の表面にしばしばみられ、われわれに関係深い曲面であるので、図学的にその特性を明らかにし、各種構造物への適用について述べ、御参考供したい。なお第10回年次学術講演会にてその概略に触れたので御参照頂きたい。双曲放物線面は後述のように複線織面に属するネジレ面であり、その名称は曲面を切断した場合現われる切口の線が、切断平面の位置によりただ一度直線である以外は、双曲線または放物線のいずれかを表わすことに由来する。

2. 双曲放物線面の定義とその生成

図学上この曲面を生成する最も便宜な方法は、2本の平行でなく交差もしない直線を導線とし1直線母線が絶えずそれらに触れ、同時に1導平面に平行に移動するとき生成されるネジレ面である(定義I)。導平面は導線の1本に平行であつてはならないことを除いて任意の位置に仮定してよい。また図-1のように固定放物線 $\widehat{AOB}$ に

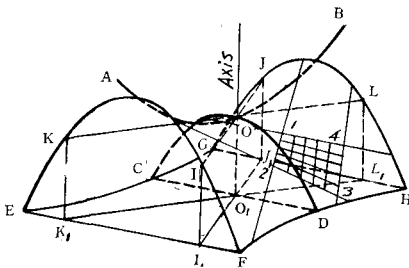


図-1 双曲放物線面の構成

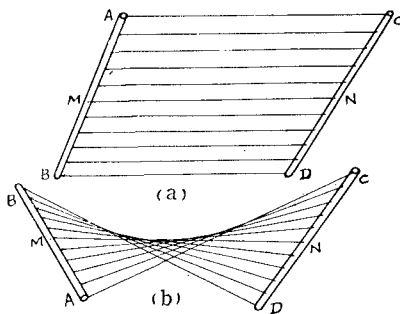


図-2

垂直に焦点が反対側にある移動放物線 $\widehat{COD}$ が接し、自身に平行に動いて生成される曲面である(定義II)とも考えられる。実際にこの曲面を生成するには、2本の棒(導線)を図-2(a)のように両方に等間隔に等長のゴム紐(任意の位置の母線すなわち要素に相当する)を固着すれば、紐は棒 AB と CD 間に平面を限定するが、互いに平行でないように棒をねじれば(b)図のように木板の極単に反つたような現象が現われる。紐 MN は原長をとどめるが他は伸び、両側の AC と BD は最も伸びる。線はすべて直線となつて残るが、それらを乗せる表面は彎曲する。この表面が双曲放物線面であつて、この実験はこの曲面が線織面に属するネジレ面であることを証明する。

3. 双曲放物線面の作図

曲面は2直線導線と要素の数本の位置を示す一对の隣接図により表わされる。図-3(a)は導面が垂直の場合であり、平面図では縁線(Edge)として表われるから与導線 ab, cd 上たとえば4-4'のようにこれに平行線を引けば要素の平面図となり、これより正面図導線上に4'-4'のとおりの対応線によつて要素の正面図が求まる。(b)図は導面が水平の場合で正面図で縁線として表われるから要素は先に正面図を画いて後平面図を求める。正面図の要素は水平になるので平面図ではすべて実長で表われ、補助図で要素3-3'は点投影を示す。

図-3において注目すべきことは要素は導線を比例的に分割することである。たとえば(b)図では $\frac{A3}{C3} = \frac{3B}{3D}$ 。逆に、もしも2導線が任意の数の比例的部分に分割されているならば、対応分割点を連ねる直線は平行平面の一系統中に存在するものであり、それらに平行な導面を有する双曲放物線面の要素となることが確認される。こ

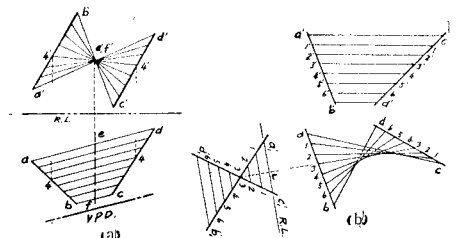


図-3

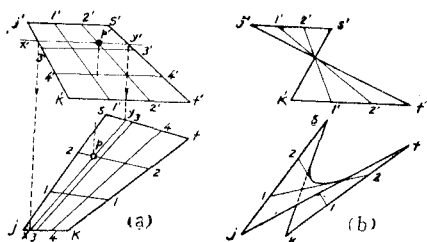


図-4

の事実は導線の長さが限られているときの曲面の表現にとくに有効に使用される。図-4 (a) において JS と KT が導線であるとすれば両方を同数の等部分に分割し、面素 1-1, 2-2 の外形を表わす面素 JK と ST に加える。このようにして構成される限定された双曲放物線面は、“ネジレ四辺形”と称し、このようにして曲面の面素を定めるために導面が知られている必要のないことが観知される。

(a) 図において JS と KT を曲面の導線として勝手に決めたのであるが、 JK と ST を曲面の導線に用いるとき JS , 3-3, 4-4, KT は第二の同一生成面の面素であり、結局曲面は複線織面である。(b) 図においては JS と KT を導線とし JT , 1-2, 2-1, SK を曲面の面素としたものである。図-4 は (a) と (b) を比較し、同じ導線が別個の双曲放物線面用に使用され得ることを明示する。無限直線 JS と KT 中のそれぞれ異なる部分的長さの使用は、これらの導線の使用による無数の双曲放物線面の生成を許すものである。

次に 2 導線に沿い、ある 1 導面に平行に移動した母線による構成面の面素の投影は平行しても、実際の面素同志は交らず平行でもない。それはたとえば任意の近接 2 面素の 1 つの図は平行しても隣接図ではそれぞれ異なる傾斜をなし、また面素の 1 つの図は交わつて見えても隣接図が平行するか、あるいは交わつて見えてもその両投影の見掛けの交点を結ぶ線は投影対応線とならないので実際の面素は交わっていない。このように交わらず平行でない直線面素で構成されるので双曲放物線面はネジレ面一種である。

4. 双曲放物線面の複線織面である証明

このネジレ面が実際に複線織面であるという証明は、第 1 生成面の 1 面素上の任意の点はまた第 2 生成面上の点であることを証明することによつてなされ得る。図-4 (a) において第 1 生成面の面素 2-2 上の点 P をそのように証明されるべき点として勝手に選ぶ。 JK と ST を導線、 JS と KT を面素とする第 2 生成面は、 JS , KT が水平なるゆえに水平導面を有する。点 P を含む水平面の正面図を画けばこれは面素 XY に沿うてネジレ面と交わる。平面図へ点 X と Y を投影することによつて

XPY が一直線であることが図的に証明せられる。よつて性質の異なる 2 直線面素が曲面の任意の点をとつて引かれる。なお複線織面なることは幾何学的にも証明することができる (省略)。

5. 双曲放物線面の 3 直線導線

図-3 (a) において正面図の導線 $a'b'$ は $c'd'$ に平行とし $a'd'$, $b'e'$ は面素とすれば、他の面素は導線の比例的分割によつて決定できるがゆえに、“導線が平行に表われることを示す図は、またその生成面のすべての面素が一共通点において交わるように表われることを示す”ものであつて、正面図のこの見掛けの交点 (e' , f') は実際には生成面に対する第 3 の直線導線の点投影図である。よつて双曲放物線面はもしすべての 3 直線が同一平面に平行ならば、3 本の直線導線をもつて生成できることを表わしている (定義 III)。

図-5 において導線 AB , CD とともに用い得る第 3 の直線導線を決定する目的に使用するため、平面 CDE を AB に平行に設ける。補助図により ($R.L$ = Reference Line を基準) AB , CD を平行に表われるように作図し、反対の端を連ねるとき、その見掛けの交点 (g_1 , h_1) は GH

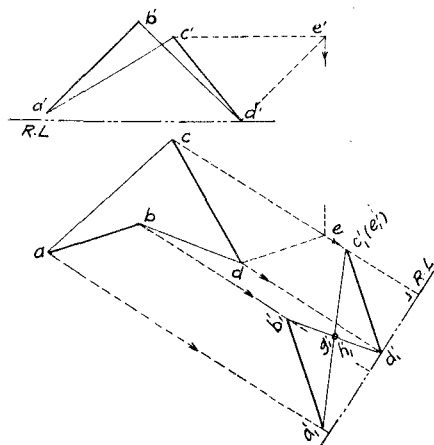


図-5

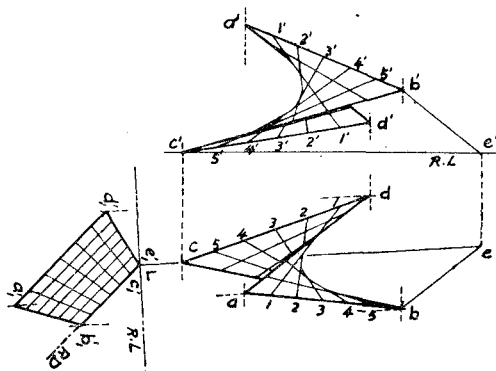


図-6

の末端図を示し、これは第3の導線である。

6. 導面に平行な1組の面素を示す 双曲放物線面の作図

図-6において曲面を $ABCD$ とし導面の縁線を示す図を求める。第1組の面素は AB と DC を導線、同じ面の第2組の面素は AD と BC を導線として作図し、これら2組の面素は同一曲面を形成する。曲面上任意の点をとおり2直線を引くことができるが、図では導線として AB と DC を用いた。導面を見出すには AD に平行に BE を画くことにより AD に平行な BC をとおる1平面を作れば、 BCE は導平面である。導面の縁線図として補助図によつて (ec に垂直に $R.L$ をとる) b_1c_1 (b_1e_1) が得られ、この図において AD は BC に平行に画かれ、またこの組のすべての他の面素はこれら2面素に平行に画けばよい。

7. 双曲放物線面の切断平面との交線

図-7において導線 AB, CD と面素 AD, BC が与えられ等間隔の11面素を、まず導線を12等分し A から B, D から C へ順次数字を入れ、1-1, 2-2, 3-3... として画く。図は隠れ線を用いず正面図と側面図を画く (両側に面素のある不透明体と考える)。各水平切断面と面素との交点を平面図に定める。平面 P_1 は曲線 KK_1 と nn_1 となつてネジレ面と交わり1双の双曲線、平面 P_3 は曲線 jj_1 と mm_1 となつてネジレ面と交わり他の1双の双曲線、平面 P_2 は2本の直線 ss_1 と tt_1 となつてネジレ面と交わる。双曲放物線面の頂点は、この各組の両水平面素 ss_1 と tt_1 との交点 O であり、各組の導面に平行な O 点をとる垂直線は曲面の軸である。面素 ss_1 と tt_1 は平面図において双曲線の漸近線となり、軸と両者を含むそれぞれの平面を漸近線平面と称し (図-1の KLL_1K_1, IJJ_1I_1 に相当する)、これらを導面としそれぞれに平行な切断平面群をもつて曲面を切断すれば、両組の直線面素群が表われる。

正面切断平面 P_4 は見取図 (く形ブロックの模型) に示す WOX のような放物線になつてネジレ面と交わり、正面図においては放物線的外形線になつて示される。側面切断平面 P_5 は見取図の YOZ のような放物線になつてネジレ面と交わり、側面図の放物線的外形線になつて表われる。

8. 導線上の1点より1面素の設定

与導線 AB, CD 。与導面 $t' \sim t$ 。 AB 上の与点 P 。求める面素は与点をとおり導面に平行な平面上にあるべきであるから、求める第2の点とは与点 P をとおり導面 T に平行な補助平面が第2の導線と交わる点である。よつ

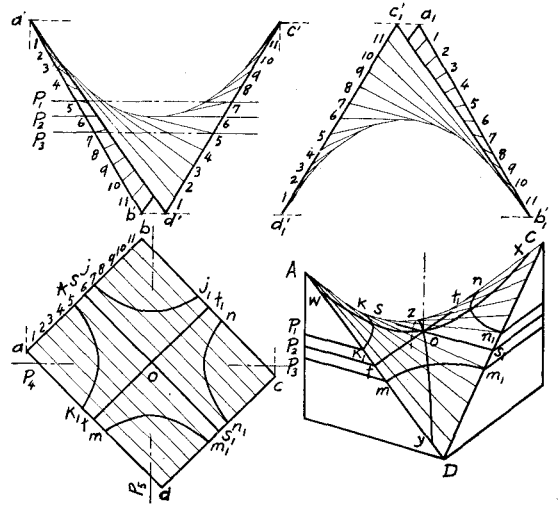


図-7

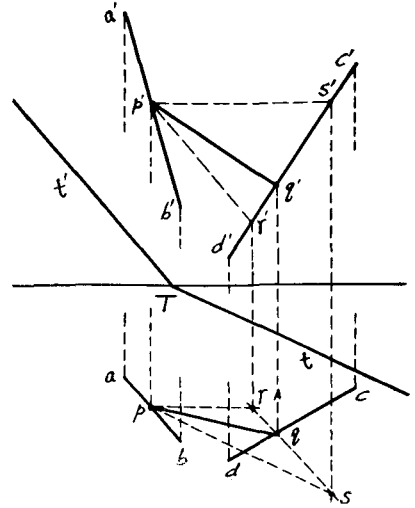


図-8

て図-8において P をとおり $Tt // ps, Tt' // p'r'$ に引けば、平面 PRS は導面 T に平行な補助平面を決定し、この平面と導線 CD との交点 Q は第2の面素上の点であり、 PQ は求める面素である。

9. 曲面上与点の1投象が与えられた とき他の投象の決定

まず上述のように両導線 AB, DC の両端近くにそれぞれ導面 T に平行な2補助平面を利用し AC, BD なる2面素を設定する (作図省略)。得られたネジレ四辺形 $ABDC$ の導線の部分を同数の等部分に分割して他のすべての面素 1-1, 2-2, 3-3 などが得られる (図-9)。

今この曲面上与点 P の平面 p が既知なときその正面図を求めるものとすれば、 p をとおる任意の直立補助平面 X にて曲面を切断し、面素の切断対応点を正面図上

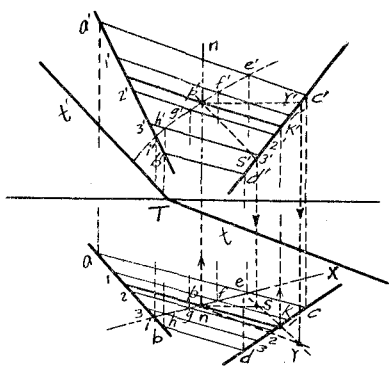


図-9 曲面上の点とその点を通る面素

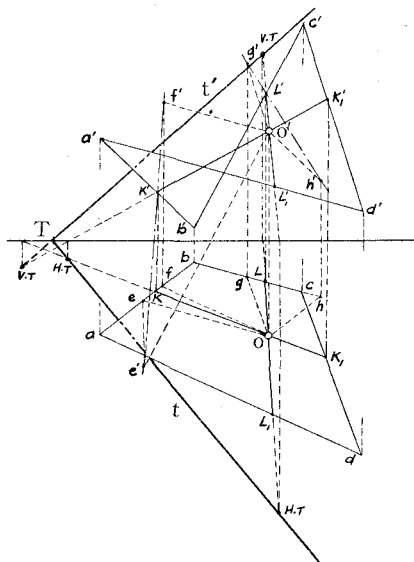


図-10

に求めて連ねるとき、 IGE が補助平面と曲面との交線として得られるから、 p に対する正面図 p' はこの曲線上に求まる。 P 点をとる面素は上述のとおりに求まる。

10. 各組の1対の面素によつて双曲放物線面が与えられ、曲面上一点が与えられたとき、その点をとる両組の面素の決定

図-10において第1組の1対の面素 AB, CD 。第2組の1対の面素 BC, AD 。曲面上与点 O 。同組のすべての面素は同一平面に平行であるから、与点をとおり第1組の面素に平行な1対の直線はその点をとおりその組の導面に平行な一平面を定める。よつてこの平面が第2組の面素との交点は第1組の1面素上の点となる。与点 O より第1組の面素 AB と CD に平行線 OH と OG を引けば、 O 点をとおり1面素を含む平面 OGH は第2組の面素 BC と L において交わるから L 点は第1組の1面素上の点である。よつて L と O を連ねる線が第2組の他

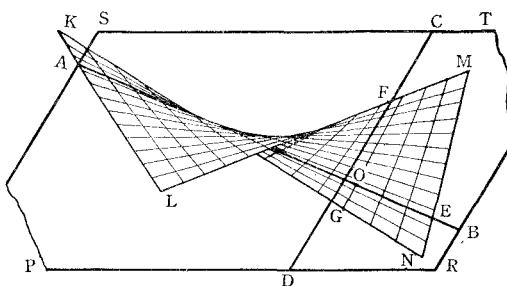


図-11

の面素 AD と交わる点を L_1 とすれば、 LL_1 は O 点をとおり第1組の面素である。また O 点より第2組の BC と AD に平行線 OE と OF を引き、 O 点をとおり他の1面素を含む平面 OEF が第1組の面素 AB との交点 K を求め、第2組の O をとおり面素 KK_1 を設定することができる。

11. 双曲放物線面と接平面との関係

接平面は図学上曲面から切り出された数多くの平面曲線に接するように引いたそれら接線の軌跡であると定義されている。双曲放物線面上の与点においての接平面では与点をとおり各組の面素に平行な補助平面を設け、それぞれの平面が曲面と交わる各組1本ずつの与点においての交差直線面素が接平面を決定する。

図-11において双曲放物線面 $KLMN$ は同じ形体上に第1組と第2組の面素が示されている。 O をとおり AE を第1組の面素とすれば、 O をとおり FG は第2組の面素である。 O で交わる線 AE (または AB)と FG (または CD)を含む平面 $PRST$ を設定すれば、これが O 点においてネジレ面へ接平面となる。導線 KN は G において平面 $PRTS$ を貫通し GN 部は見える部分であり、導線 LM は F において平面 $PRTS$ を貫通し LF 部は見える部分となる。面素 AE と FG は接平面に含まれているから $ALFO$ の部分、また $GOEN$ の部分は見える範囲であるが、その他は見えない部分となる。すなわち平面 $PRTS$ は点 O を除いて面素 AE と FG のあらゆる点で $KLMN$ と交わることになる。よつて双曲放物線面の接平面は、接平面に含まれた各組の面素の交点である1点においてのみ接し、それ以外は曲面の交切平面である。

12. 曲面上の与点においての接平面の決定

図-10において与点 O においての接平面を画くには、 O 点で交差する BC と AD を導線とした場合の O 点をとおり第1組の面素 LOL_1 、また AB と DC を導線とした場合の O 点をとおり第2組の面素 KOK_1 を上述のように求め、この両組の交差面素の水平跡と直立跡を定め

てそれらを連ねた $t' \sim t$ は求める接平面の両跡である。

13. 双曲放物線面の近似的展開

双曲放物線面は隣接2面素が変わらず平行もしないため展開不可能な曲面であるが、この曲面の実用には近似的展開を行なう。一般にこのようなネジレ面の近似的展開としては三角形法を用いると便宜である。すなわち隣接2面素間に対角線を入れ、曲面を多くの三角形に細分し、その各3辺の実長を求めて隣接三角形群の一列を展開図に延べるのである。勿論この方法による展開図では築造されるべき表面は途切れて厳密には滑らかな曲面にはならないが、実用的に差支えない精度の滑らかな変移をもつ曲面が得られるものである。

14. 双曲放物線面の構造物および工作物への適用

双曲放物線面はコンクリート構造物においての用途、その他の工作物に広範囲に見られる一般的の曲面であり構造物の勾配が徐々に滑らかな変化をすることが要求され、ある平面から同一平面上にない他の平面へ途切れずに連続的変移を必要とする部分に利用される。

図-12において AB と CD 間を滑らかな表面で連ねる必要がある場合、平面または単曲面を使用できない。(a) 図のようにすれば2つの平面になるが、途切れぬ連続しれ表面にはならない。(b) 図のように3つの平面とし、さらに細分割すれば細かい三角形の平面によつて近似的には目的を達するが、しかしまだ完全に満足すべき滑らかな表面は得られない。これを (c) 図のように直線 AC と BD 、または直線 AB と CD をそれぞれ同数に等部分に分割し、分割点を直線で連ねるならば、2面素が限りなく接近した場合でも両者間の表面は厳密には平面とはならないが、直線 AB と CD 間の表面は近似的に滑らかな途切れぬ曲面となる。

図-13は図-12そのままを勾配の徐々に変化する側面

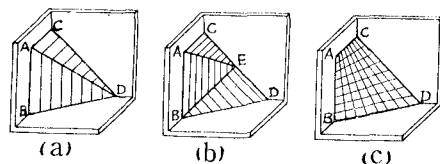


図-12

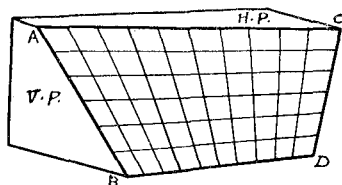


図-13 勾配の滑らかな変移を必要とする
コンクリート構造物への適用例

を有する擁壁に適用したものであり、直線 AC と BD を導線とし平面 VP を導面とすれば直線 AB と CD は第1組の面素である。この第1組の導線に平行な平面 HP は第2組の導面となり、第1組の面素 AB と CD をその導線とすれば、第1組の導線 AC と BD はその面素となる。

同種の構造物としてトンネル、灌漑溝、導水樋、運河などの側壁には便利に使用できる。またダム の堤体の一部およびその翼壁、橋脚または橋台など、この曲面の利用は広く見受けるところである。

図-14は双曲放物線面が橋脚または橋台に適用されている例である。もし底面周辺 C_1B_1ABC が曲線である場合には、構成面は単線織面に属するネジレ面、たとえば錐状面 (Conoid) となる。

図-15は灌漑工事の開渠にこの曲面の適用を必要とした特例である。たとえば断面 AA' のような開渠では深い峡谷に水を流下し、再び峡谷の向う側の適当な標高まで導水するためにはせばまった断面 CC' のサイフォンに徐

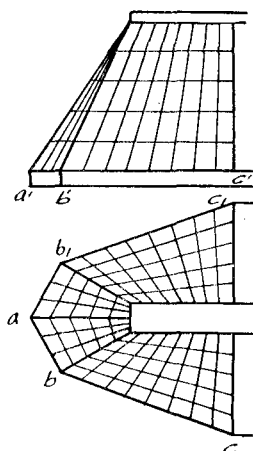


図-14 橋台または橋脚

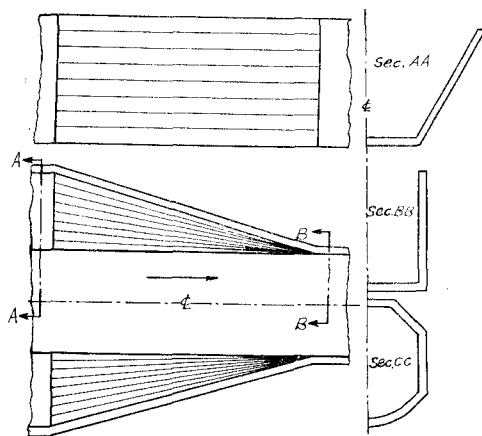


図-15

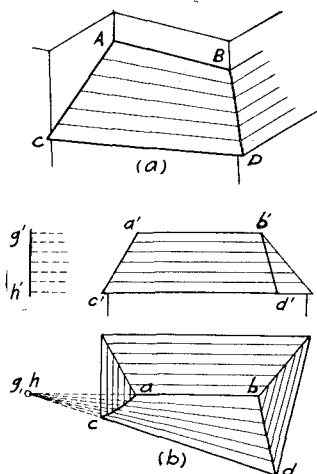


図-16

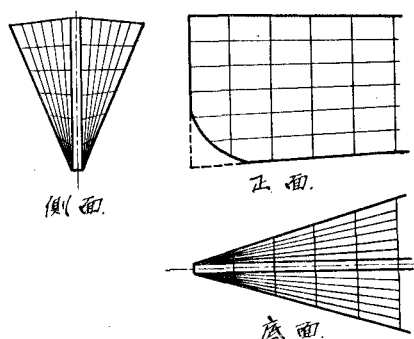


図-17 軸 (へさき)

々に変化する必要がある。断面 AA はまず方形断面 BB に変化させ、ついで断面 CC に転換する。この断面 AA と断面 BB 間は“トランジション (Transition)”と称し、その両側勾配面は双曲放物線面である。この場合の曲面の導線は曲面末端の傾斜線と垂直線であり、導面は水平平面である。断面 BB と断面 CC 間にはこの種の多くの変移を経過せしめる。

コンクリート構造またはアスファルト構造の歩道および床面にもしばしばこの曲面の適用が見られるところである。

図-16 は屋根の一面に双曲放物線面を適用した例である。(a) 図は AC, BD を導線、水平平面を導面とする場合であり、(b) 図は GH と BD を導線、水平平面を導面とした場合で、形成される屋根の面と傾斜した屋根の面との交線は曲線 ac になるように築造されたものである。

さらにこの曲面の構成をみるものに図-17 のように船体の一部分がある。図は船、ボートなどの船首である。

その他双曲放物線面は断面が連続的に滑らかに変移する形体の表面に適用されることに大きな意義を有するがゆえに、各種の近代的彫刻に広く応用され、**plastic forms**

の領域において重要な価値を有するものといえよう。

この曲面は複線織面であるという事実により、コンクリート構造物の型枠のように全く直線材料の組合わせて頑丈な曲面を築造することができる。すなわち型枠は曲面の面素の方向の薄い狭い小割板を中間支柱で支え、各端で導線に固定し、これを強固にするため第2組の面素に平行な小割板を用いればよく、これらの細長い小割板は一つの美しいネジレ面を造る。それぞれの小割板を釘付けにし、または各交差小割板に固着すれば堅固な型枠を形成する。

15. 結 語

双曲放物線面はネジレ面であり、展開することはできないが、近似的展開により展開することができ、複線織面であるから強固な型枠を築造してコンクリート構造物において表面の急変を十分緩和し、円滑な変移を可能にするものであり、実際にこのような場所のコンクリート構造物への利用は多いことと思われる。一方ネジレ面が小さく分割することができたり、型に簾めて造り、または形体に圧造できるような機械や工作物には最も適していることは一般ネジレ面と全く同じである。

双曲放物線面の形体は図-7 のような標準的表現のものほか、図-1 のようなその外形から“鞍面 (Sattelfläche)”と呼ばれるものまでいろいろの種類がある。ネジレ四辺形は鞍面中の一部を切り出したものと考えられ性質を検討するのに都合がよい。水平平面とこの曲面との交線は頂点をとる切断平面以外に対しては双曲線となるがゆえに、両組のうちの一方の組の面素群中の任意の2本を直線導線とし、1本の双曲線を曲線導線とする3導線を他の組の母線が接触しながら移動することによって生成されるネジレ面である (定義 IV) とも考えることができる。終りに参考にした文献を掲げ、各著者に対し敬意を表する。

文 献

- B. L. Wellman: Technical Descriptive Geometry.
- C. E. Rowe and J. D. Mcfarland: Engineering Descriptive Geometry.
- H. W. Shupe and P. E. Machovina: A Manual of Engineering Geometry and Graphics.
- H. E. Grant: Practical Descriptive Geometry.
- G. J. Hood: Geometry of Engineering Drawing.
- F. M. Warner: Applied Descriptive Geometry.
- S. E. Warren: The Elements of Descriptive Geometry.
- W. C. Hoover Slagle: Descriptive Geometry, Part III.

福田正雄: 高等図学
中根孝治: 図学
須藤利一: 図学概論