

標準越流堰を越流する水脈の特性

正員 北海道大学工学部 助教授 尾 崎 晃
 正員 北海道大学工学部 助教授 工博 岸 力
 正員 北海道大学大学院工学研究科 宮 崎 洋 三

1. 要 旨

今までのところ、越流堰の流れの解析には摩擦抵抗の影響がとり入れられていない。本文は摩擦の影響をしらべたものである。

摩擦は境界層内で考えればよいが、この場合、境界層が水面に達する前と達した後との二領域に分けて考えるのが便利であり、第1段階として前者を取り扱った。水理的には滑面における乱流境界層の発達の問題をしらべることになる。

さらに、底面摩擦の解析結果を用いて、模型実験の scale effect を論じた。

主な使用記号

x : 水路床面に沿い流下方向にとつた座標

y : x 軸に垂直上向きにとつた座標

ただし、 x, y の原点を図-1の B 点とする。

h : 水深

u : x 方向の流速

u_0 : 主流の u

$u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$: 壁面の摩擦速度

τ : 摩擦応力

τ_0 : 壁面における τ

C_f : $\tau_0 = C_f \cdot \rho u_0^2/2$ で定義される局所摩擦係数

δ : 境界層厚

$\delta_* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_0}\right) dy$: 排除厚

$\vartheta = \int_0^\delta \frac{u}{u_0} \left(1 - \frac{u}{u_0}\right) dy$: 運動量厚

$H = \delta_*/\vartheta$: 流速分布の shape factor

2. 模型直線部における摩擦抵抗

摩擦応力は

$$\tau_0 = C_f \cdot \rho u_0^2/2 \quad (1)$$

で表わされる。 C_f を求めるのに次の運動量方程式を用いた。

$$\frac{C_f}{2} = \frac{d\vartheta}{dx} + (2\vartheta + \delta_*) \frac{1}{u_0} \frac{du_0}{dx} \quad (2)$$

上式中、右辺の ϑ および δ_* を求めるには流速分布が必要である。

使用した模型は、設計流量の時双型堰越流水脈下縁に一致する曲線形の標準越流堰で、図-1に示す Harrold

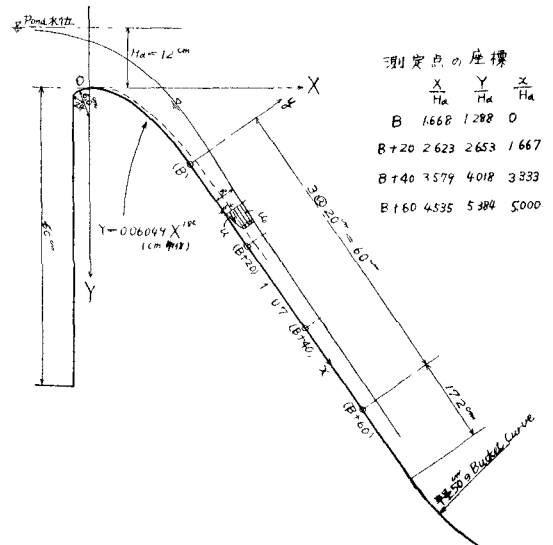


図-1 模型略図

の型を採用した。すなわち、越流頂下流側 OB 間は

$$\left(\frac{X}{H_d}\right)^{1.85} = 2.0 \cdot \left(\frac{Y}{H_d}\right)$$

で与えられる。ここに H_d は設計越流水頭で、12 cm を採用した。 B 点以下は直線部で 1:0.7 の勾配とした。なお、当初は越流堰への流入による形状抵抗を調べようとしたため、流入口は水路巾 60 cm より左右に 30 cm ずつ巾の広い Pond から流入せしめた。また、本実験範囲では水路壁は十分滑面と見なすことができた。流速分布測定は、図-1の曲線部3断面と $B, B+20, B+40, B+60$ の計7断面で H_0/H_d を 0.4 から 1.0 まで7種類の流量につき行つた（ただし、 H_0 は任意の越流水頭）。なお、流入口の縮流や側壁の影響のため h は断面を通じて一様でないが δ_*, ϑ, u_0 は大体一樣なので断面中央部の値を採用した。

自由表面を持たない円管や平板の場合には指数法則、対数法則がある。ここでは指数法則を流速分布と摩擦に、対数法則を流速分布に適用してみた。すなわち、

$$u/u_0 = (y/\delta)^{2n} \quad (3)$$

または

$$\frac{u}{u_*} = A_s + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_* y}{\nu} \quad (4)$$

を適用する。指数法則は Blasius によつて実験的に求められた摩擦法則を基として次元解析を用いて誘導され、対数法則は Prandtl の運動量輸送理論、Kármán の相似理論から導き出されたものである。

測定した流速分布の一部を図-2に示す。図中、(a)は(3)式、(b)は(4)式によつたものである。

(a) 指数法則の適用

指数法則を適用すると摩擦法則は次元解析により

$$\left. \begin{aligned} C_f &= R_{\delta_*}^m \times \text{constant} \\ m &= -2n/(1+n) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

となることが知られている。ただし、 R_{δ_*} は δ_* を用いた Reynolds 数である。図-2(a)より $n=1/7 \sim 1/9$ 程度が適当と思われるが後述の理由で $n=1/7$ を選んだ。(5)式の常数を 2λ と置けば、

$$C_f = 2\lambda R_{\delta_*}^{-1/7} \quad (6)$$

この関係を求めるべく(2)式で得た C_f を R_{δ_*} との関係で plot したのが図-3である。平板の場合の Blasius の法則および岩佐が緩勾配の開水路で得たもの¹⁾より一般に小さく、しかも相当ばらついているが、流量が大となるに従い C_f も大となる傾向が認められる。これは、 δ_* 、 θ が流量と共に大きくなるためと考えられる。

岩佐の与えた指数法則の場合の境界層発達¹⁾の式¹⁾

$$\begin{aligned} \delta_*^{1-m} &= \delta_{*,0}^{1-m} \left(\frac{u_{00}}{u_0} \right)^{(1-m)(2+H)} \\ &+ \frac{1-m}{3 \cdot (1-m)(1+H)} \frac{H \cdot \lambda}{\nu^m g \sin \theta} u_0^{2+m} \\ &\times \left\{ 1 - \left(\frac{u_{00}}{u_0} \right)^{3+(1-m)(1+H)} \right\} - \frac{q}{1+H} \\ &\times \frac{H \cdot \lambda}{\nu^m \tan \theta} u_0^{1+m} \left\{ 1 - \left(\frac{u_{00}}{u_0} \right)^{(1-m)(1+H)} \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

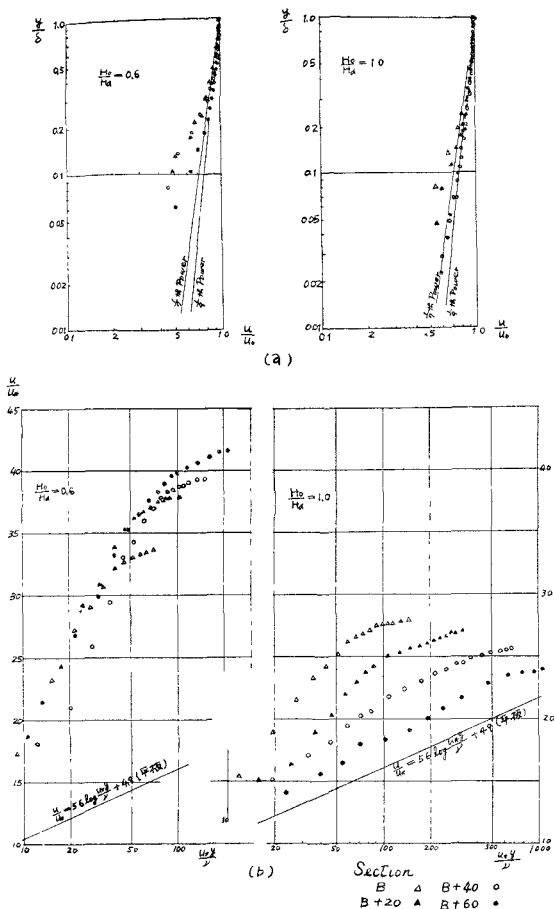


図-2

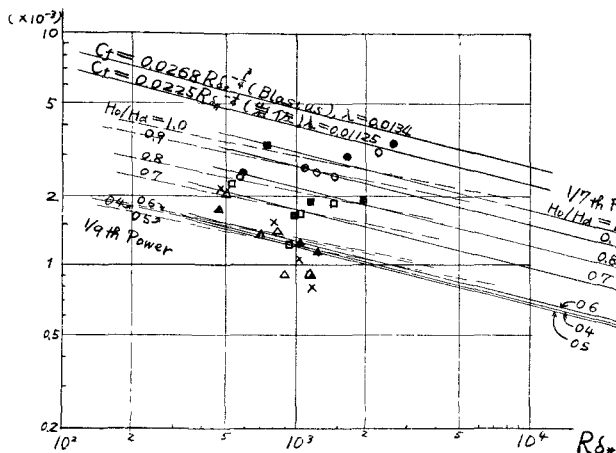


図-3

$\frac{H_0}{H_A}$	$\frac{\lambda}{\lambda_0}$	$\frac{1}{7} \text{th Power}$	$\frac{1}{9} \text{th Power}$
0.4	x	0.0035	0.0026
0.5	△	0.0034	0.0025
0.6	▲	0.0036	0.0027
0.7	□	0.0049	0.0035
0.8	○	0.0060	0.0042
0.9	○	0.0075	0.0053
1.0	●	0.00875	0.00585

—— 1/7th Power
 - - - 1/9th Power

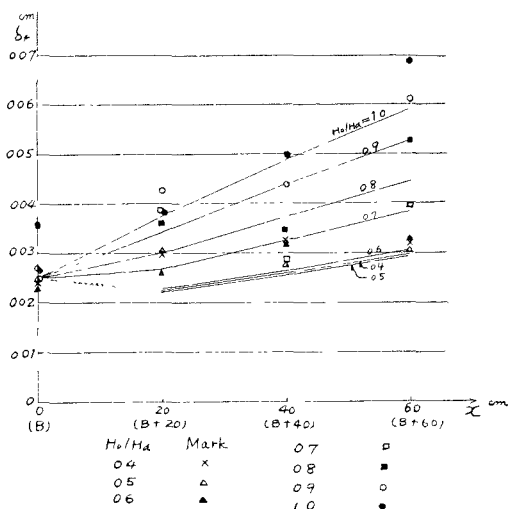


図-4

を用いて各測点の δ_{*} を求めたところ、あまり適合性は良くないが、 n を $1/7$ 、 $1/9$ と変えて計算すると $1/7$ 乗法則による場合の方が δ_{*} の実験値に、より近い結果を示した (図-4)。なお、(7) 式中、 δ_{*0} 、 u_{00} はそれぞれ原点 B における δ_{*} 、 u_0 を示す。 q は単位巾当り流量である。扱った範囲では第3項は第2項に比し極めて小さいため実用上省略してもさしつかえない。(7) 式と実験値の適合性の良くない原因は、指数法則が完全にはあてはまらないことと指数 n が一定でないことによるものと思われる。

(b) 対数法則の適用

C_f が過去のどの資料よりも小さくしかも H_0/H_d に影響されるということが対数分布にも表われている。すなわち、図-2(b) のように対数法則が成り立つとすれば κ も A_s もともに常数でなくなる。円管や平板の場合には Reynolds 数に無関係に κ 、 A_s は一定である。殊に κ は粗度にも影響されない universal constant で 0.4 を保つ。開水路の射流の場合には A_s が Froude 数の函数になると言われている²⁾。本実験結果では κ もなんらかの物理量の函数になる。したがって、本実験の範囲では対数法則が成り立たないように思われるが、このことについては今後考慮の余地がある。

3. Scale Effect の算定

開水路の模型では重力の影響が他の力例えば、粘性力表面張力などよりも卓越するため、Froude の相似律が適用される。しかし、重力以外の力の影響が全くないわけではないから、Froude の相似律を用いても縮尺が小さくなるにつれ模型と実物との間の流況の差異が顕著となってくるはずである。

開水路の境界層の問題では、粘性力 (乱流粘性も含む)

が二次的支配をする力として scale effect を惹き起す。本実験では次の三つの量 (いずれも長さの次元を持つ) の scale effect について調べてみた。

- (a) 境界層厚 δ
- (b) 水深 h
- (c) 乱流境界層が発達して水面に到達する臨界点 (この点の x を x_c とする)

これら三つの量のそれぞれについて、 N 倍の実物で決定される量と、模型で生ずる量の N 倍とを比較した。

(a) 境界層厚 δ の scale effect を調べるには $\delta_{*} = [n/(1+n)] \cdot \delta$ なる関係があるから排除厚 δ_{*} のそれを調べれば良い。(7) 式に $1/7$ 乗則の諸数と模型における諸量を入ると、

$$\delta_{*}^{5/4} = \delta_{*0}^{5/4} \left(\frac{u_{00}}{u_0} \right)^{115/28} + 0.000108 \cdot \lambda \cdot u_0^{7/4} \left\{ 1 - \left(\frac{u_{00}}{u_0} \right)^{41/7} \right\} - 0.124425 \cdot \lambda \cdot q u_0^{-5/4} \left\{ 1 - \left(\frac{u_{00}}{u_0} \right)^{29/7} \right\} \quad (8)$$

この式は $1/7$ 乗則が成立するという前提の下には縮尺に關係なく正しく成り立つ式である。

scale effect がなく、完全に Froude の相似律で scale を変え得るとすれば、異なつた scale の対応する点で δ_{*} と u_0 は次の關係を保つ。

$$(\delta_{*p}/\delta_{*m}) = (u_{0p}/u_{0m})^2 = N \quad (9)$$

ただし、添字 p は実物、 m は模型を表わし、縮尺を $1/N$ とする。 u_0 は Froude の相似律に従うものと見なすことができる。また、(8) 式において scale が変わつても抵抗法則が変わらないと仮定する。対応する点では u_{00}/u_0 が一定であるから、常数係数を A 、 B 、 C と書けば、(8) 式は次のようになる。

$$\delta_{*}^{5/4} = A \cdot \delta_{*0}^{5/4} + B \cdot u_0^{7/4} + C \cdot u_0^{-5/4} \quad (10)$$

δ_{*0} は微小量であるため scale effect をうけないと考えれば (10) 式の第2項と第3項が残るが、計算の結果、下流では第3項は第2項に比しかなり小さくなる。そこで第2項のみをとると次式が成り立つ。

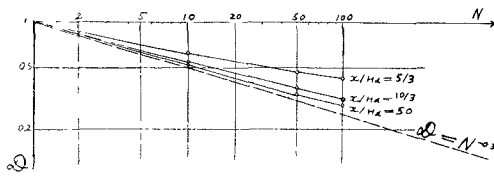
$$(\delta_{*p}/\delta_{*m}) = (u_{0p}/u_{0m})^{7/5} = N^{7/10} \quad (11)$$

(9) 式と (11) 式を比べると、ベキ 1 と $7/10$ の差異があり scale の大きい場合の方が小さい場合より境界層の発達の違いがわかる。

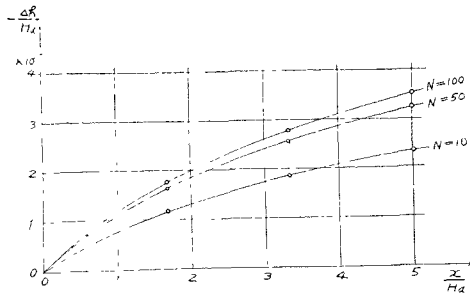
設計流量、すなわち、 $H_0/H_d=1.0$ のときを例にとつて計算し、その結果を図-5(a) に示した。図中の D は scale effect を表わす比であり次のように定義する。

$$D = \delta_{*1}/\delta_{*2}$$

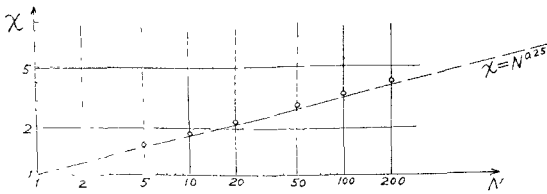
ただし、添字 $1, 2$ はそれぞれ scale effect を含むものと含まぬものを示す。以後も同様である。この比は Froude の相似律の補正係数という意味を持つ。



(a) 排除厚 δ_{*} , 境界層厚 δ の Scale Effect



(b) 水深 h の Scale Effect



(c) 空気混入開始臨界点 x_c の Scale Effect

図-5 Scale Effect (いずれも設計流量の場合)

(11) 式を用いて D と N の関係を求めると

$$D = \frac{\delta_{*1}}{\delta_{*2}} = \frac{\delta_{*p}}{N\delta_{*cm}} = N^{-1} \cdot N^{\frac{7}{10}} = N^{-\frac{3}{10}} \quad (12)$$

となり図に破線で示した。第2項以外の影響で scale effect は (12) 式より小さいが下流に行くにつれ (12) 式に近づく。換言すれば, (12) 式は δ_{*} の scale effect の限界を与えることになる。

(b) 水深 h は断面平均値を考えれば連続の法則により

$$h = q/u_0 \cdot \delta_{*} \quad (13)$$

q/u_0 は potential flow の水深であるから scale effect はない。したがって, h の scale effect は δ_{*} のそれに等しい。図-5(b) に設計流量について $\Delta h = h_1 - h_2$ を x との関係で示した。境界層の発達は scale が大きくなるほど遅いから水深も模型水深を N 倍した値より小さくなる。

以上の結果から模型水深を実物に換算するには次のようにすればよい。

(i) B 点までは水深は potential flow としての計算値がそのまま用いられる。

(ii) B 点より下流では potential flow としての計算値に図-4 の補正を行えばよい。使用に便なるよう, potential flow としての値を図-6 に示した。

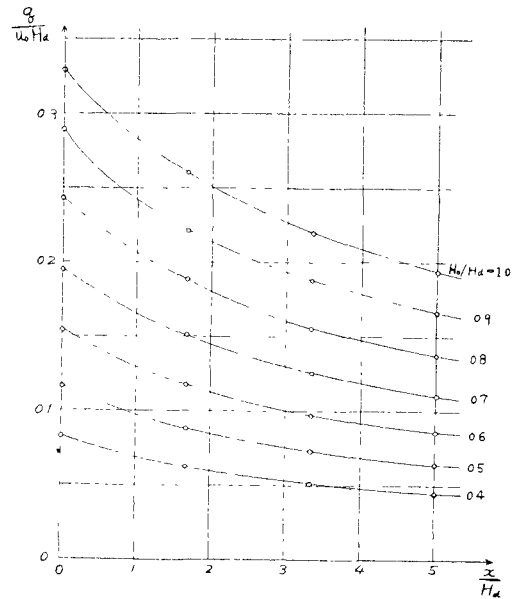


図-6

(c) 臨界点以後は空気混入流となることが知られているので, x_c の scale effect を調べることも實際上意義がある。

(7) 式に $\delta = h$ を入れて導かれた臨界点に関する式は¹⁾,

$$\frac{1-m}{3+(1-m)(1+H)} \frac{u_0^3}{g \cos \theta} = \frac{\tan \theta \nu^n (H-1)^{1-m} q^{1-m}}{2^{1-m} \lambda H} + \frac{q}{1+H} \quad (14)$$

$$x_c \tan \theta = \frac{H+1}{2} \frac{q}{u_{0c}} + \frac{u_{0c}^2}{2g \cos \theta} - \frac{3}{2} H_c \quad (15)$$

ただし, H_0 は比流量 q の場合の限界水深, u_{0c} は臨界点における u_0 を表す。この両式に $1/7$ 乗則および設計流量の時の諸値を代入し計算した結果は 図-5(c) である。図中の χ は

$$X = x_{c1}/x_{c2}$$

と定義する。

(14) 式の右辺は第1項, (15) 式の右辺は第2項がそれぞれ卓越項なので, これらの項のみで比較すると,

$$\left(\frac{u_{0cp}}{u_{0cm}} \right)^3 = \left(\frac{qp}{qm} \right)^{\frac{5}{4}} = \left(N^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{5}{4}} = N^{\frac{15}{8}}$$

$$\left(\frac{x_{cp}}{x_{cm}} \right) = \left(\frac{u_{0cp}}{u_{0cm}} \right)^2 = \left(N^{\frac{5}{8}} \right)^2 = N^{\frac{5}{4}}$$

$$\therefore X = \frac{x_{c1}}{x_{c2}} = \frac{x_{cp}}{N x_{cm}} = N^{-1} \cdot N^{\frac{5}{4}} = N^{\frac{1}{4}} \quad (16)$$

卓越項以外の項が非常に小さいため計算値は (16) 式に非常に近い。したがって, (15) 式は x_c の scale effect を近似的に表わすと共にその限界を示すことになる。

4. 結 語

図-1のような Harrold 型標準越流堰を越流する水脈を調べる一部として、境界層が水面に達する臨界点の前の直線部における流況を模型で調べた。そして実物に換算した場合に生ずる水深および臨界点の scale effect を、設計流量の場合について算定した。

その結果、次の結論を得た。

(1) B 点より下流で境界層が発達する。したがって、水深は曲線部では potential flow のそれはほとんど等しいが、 B 点より下流では (13) 式の関係により 図-5 の値に 図-4 の補正を要する。

(2) 境界層内の流速分布は $1/7$ 乗則に近く、対数則はあてはまらない結果となつた (図-2)。

(3) 摩擦係数は滑面であるにかかわらず、流量によって変化した (図-3)。

(4) 本実験の結果から、境界層厚と模型縮尺との間に (12) 式の関係が成り立つことを確かめた (図-5(a))。

(5) 同様に、水深の scale effect については 図-5(b) の結果を得た。

(6) 空気混入開始臨界点と模型縮尺との間に (16) 式の関係が成り立つことを確かめた (図-5(c))。

なお、指数 n は x と共に少しずつ減少する傾向を得た。これは境界層の発達を遅くし、したがって、以上の scale effect を大きくする。また、scale が大きくなるとともに λ が大きくなることが予想されるが、これは scale effect を小さくする方に影響する。

参 考 文 献

- 1) Y. Iwasa: "Boundary Layer Growth of Open Channel Flows on a Smooth Bed and its Contribution to Practical Application to Channel Design"; Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University.
- 2) 岩垣雄一: 「斜面開水路における乱流の抵抗法則について」; 土木学会論文集, 第 16 号。

技術資料編集委員

委員長	北海道開発局	古谷 浩三
	北海道開発局	尾崎 暁
	札幌市役所	岡本 成之
	北海道開発局	川島 雅
	北海道電力株式会社	町野 好宣
	北大工学部	渡辺 昇
	札幌鉄道管理局	余湖 平八郎
	北海道土木部	小山 義之

昭和 34 年 2 月 10 日印刷
昭和 34 年 2 月 20 日発行

技術資料・第十五号

発行所	土木学会北海道支部
	札幌郡豊平町平岸
	北海道開発局土木試験場内
	電話 ②-4126・4127・4128
編集兼 発行人	古谷 浩三
印刷所	合名会社 文栄堂印刷所
	札幌市北 3 条東 7 丁目
	電話 ③2711・③5560
	②0851