

合 成 梁 に 関 す る 研 究

——特に重ね梁の接触面摩擦抵抗の強度に及ぼす影響について——

正員 札幌開発建設部 工博 猪 瀬 寧 雄

RESEARCH ON THE COMPOSITE BEAMS

By Dr. Eng., Shizuo Inose, C. E. Member

Synopsis

This paper is treated on the stress analysis of the composite beams as a part of the research on the composite beams.

Especially discussed that the frictional resistance between upper and lower beams is how to effect on the strength and efficiency of the composite beams.

1. 緒 言

本文は合成梁に関する研究の一環として重ね梁（二重）の応力解析を行い、特に上下両梁接触面間の摩擦抵抗が重ね梁の効率にいかに関与するかを論じたものである。

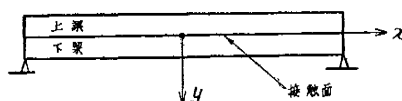
2. 記 号

- M : 曲げモーメント, 上繊維に圧力を生ぜしめるものを + とする。
 Q : 剪断力, 要素の右側上向を + とする。
 E : 梁材料のヤング係数
 G : 梁材料の剪断弾性係数
 I : 梁の断面二次モーメント
 F : 梁の断面積
 η : 梁の中立軸から縁維までの距離
 k : 梁の剪断変形に関する係数

$$\frac{1}{k} = \frac{F}{Q^2} \int_{-\eta}^{h-\eta} b \tau^2(z) dz$$

h : 梁の高さ, b : 梁の幅,
 $\tau(z)$: 梁に生ずる剪断応力

- $q(x)$: 梁に作用する外力
 $w(x)$: 梁の接触面に生ずる面圧力
 $s(x)$: 梁の両接触面間に生ずる抵抗力
 u : 梁の両接触面間の摩擦係数
 x, y : 座標 (原点および方向は図—1 参照)



図—1

ξ : 梁の曲げモーメントによる撓み

ζ : 梁の剪断力による撓み

従つて一般に $y = \xi + \zeta$

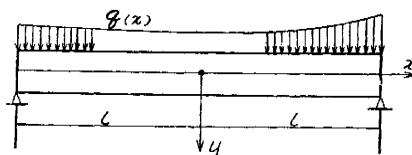
I_0 : 両梁を単一体と見た場合の断面二次モーメント

A_0 : 両梁を単一体と見た場合の接触面に関する断面一次モーメント

なお, 上記の記号で特別に断わらない限り suffix 1 をつけたものは上梁, suffix 2 をつけたものは下梁に関する諸元を示すものとする。

3. 両部材間の関係

図—2 のごとく $q(x)$ が作用すると, 上梁には下方から $w(x)$ なる面圧が作用して一種の弾性床土上の梁となる。



図—2

梁の両端 y_1, y_2 は梁が相互にはなれることのない場合は明らかに

$$y = y_1 + \frac{h_1}{2} = y_2 + \frac{h_2}{2}$$

ただし、断面の **Lateral Contraction** の影響は省略するものとする。今両梁の接触面間の相対的のズレを $r(x)$ として梁の高さの方向の垂直応力の分布を示すと次のようになる (図-3)。

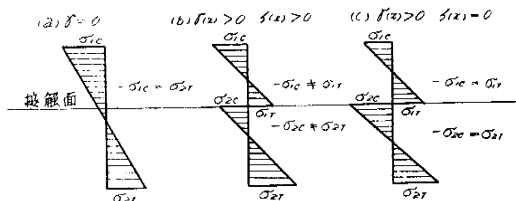


図-3

接触面間の両梁の歪は明らかに次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1(x) &= \frac{M_1(x)}{E_1 I_1} \eta_1 - \int_x^l \frac{s(x)}{E_1 F_1} dx \\ \varepsilon_2(x) &= -\frac{M_2(x)}{E_2 I_2} \eta_2 + \int_x^l \frac{s(x)}{E_2 F_2} dx \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

いま $x=a$ なる点で $s(x)=0$ すると $r(x)$ は次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} r(x) &= \int_a^x [\varepsilon_1(u) - \varepsilon_2(u)] du \\ &= \int_a^x \left[\frac{M_1(u)}{E_1 I_1} \eta_1 + \frac{M_2(u)}{E_2 I_2} \eta_2 \right. \\ &\quad \left. + \int_a^u \left(\frac{1}{E_1 F_1} + \frac{1}{E_2 F_2} \right) s(z) dz \right. \\ &\quad \left. - \int_a^u \left(\frac{1}{E_1 F_1} + \frac{1}{E_2 F_2} \right) s(z) dz \right] du \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

梁の断面が一定の場合には

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 r}{dx^2} &= \frac{\eta_1}{E_1 I_1} \frac{dM_1}{dx} + \frac{\eta_2}{E_2 I_2} \frac{dM_2}{dx} + \left(\frac{1}{E_1 F_1} + \frac{1}{E_2 F_2} \right) s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

次に $s(x)$ と $r(x)$ との関係を調べて見ると

- (1) 全域にわたって $uw(x) > \frac{Q(x)}{I_0} A_0$ の場合は両梁は一体として作用する。
- (2) 全域にわたって $uw(x) < \frac{Q(x)}{I_0} A_0$ の場合は $x=a$ なる点を除いて両梁は全域にわたって滑る。
- (3) 部分的に $uw(x) > \frac{Q(x)}{I_0} A_0$ なる箇所のある場合は部分的に滑らない場所を生ずる。

(3) の場合について $l \leq x \leq 0$ なる範囲において滑り出し始めの点を $x=x_1$ 、および $x=x_2$ すると x_1, x_2 は次式から求められる。

$$\left. \begin{aligned} &\frac{M_1(x_1)}{E_1 I_1} \eta_1 + \frac{M_2(x_1)}{E_2 I_2} \eta_2 \\ &= \int_{x_1}^l \left(\frac{1}{E_1 F_1} + \frac{1}{E_2 F_2} \right) s(z) dz \\ r &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{M_1(u)}{E_1 I_1} \eta_1 + \frac{M_2(u)}{E_2 I_2} \eta_2 \right. \\ &\quad \left. - \int_x^l \left(\frac{1}{E_1 F_1} + \frac{1}{E_2 F_2} \right) s(z) dz \right] du = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

この場合事柄を次の2つに分けて考えることができる。

i) $r=0$ の範囲では

$$s(x) = \frac{Q(x) A_0}{I_0} \dots\dots\dots (5)$$

ii) $r>0$ の範囲では

$$\left. \begin{aligned} s(x) &= \pm uw(x) \\ x &> a \text{ のとき } +, x < a \text{ のとき } - \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

両梁がボルトやデベルで結合せられている場合には、材料の弾性限度内において r に比例する抗力を生ずる。この比例係数を K とすると一般に

$$s(x) = K r(x) \pm uw(x) \dots\dots\dots (6')$$

この式を (3) に代入するとデベルなどの抗滑材が連続的に挿入せられている場合の $s(x)$ を決定する方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 s}{dx^2} &= K \left\{ \frac{\eta_1}{E_1 I_1} \frac{dM_1}{dx} + \frac{\eta_2}{E_2 I_2} \frac{dM_2}{dx} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{E_1 F_1} + \frac{1}{E_2 F_2} \right) s \right\} \pm u \frac{d^2 w}{dx^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

4. 基礎方程式

両部材の梁片について廻転並びに上下の釣合の式をつくり、これを適当に変形することによつて次式が得られる (中途の計算省略)。

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{d^2 y}{dx^2} &= \left(\frac{1}{k_1 G_1 F_1} + \frac{1}{k_2 G_2 F_2} \right) \left(w - s \frac{dy}{dx} \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{E_1 I_1} + \frac{1}{E_2 I_2} \right) \int_0^x \int_0^x \left(w - s \frac{dy}{dx} \right) dx^2 \\ &\quad - \frac{q}{k_1 G_1 F_1} + \frac{1}{E_1 I_1} \int_0^x \int_0^x q dx^2 \\ &\quad - \left(\frac{\eta_1}{E_1 I_1} + \frac{\eta_2}{E_2 I_2} \right) \int_0^x s dx \\ &\quad + \left(\frac{Q_{1,0}}{E_1 I_1} + \frac{Q_{2,0}}{E_2 I_2} \right) x - \left(\frac{M_{1,0}}{E_1 I_1} + \frac{M_{2,0}}{E_2 I_2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} &\left(\frac{1}{k_1 G_1 F_1} + \frac{1}{k_2 G_2 F_2} \right) \left(w - s \frac{dy}{dx} \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{E_1 I_1} + \frac{1}{E_2 I_2} \right) \int_0^x \int_0^x \left(w - s \frac{dy}{dx} \right) dx^2 \\ &\quad - \left(\frac{\eta_1}{E_1 I_1} + \frac{\eta_2}{E_2 I_2} \right) \int_0^x s dx \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{q}{k_1 G_1 F_1} + \frac{1}{E_1 I_1} \int_0^x \int_0^x q dx^2 \\ & + \left(\frac{Q_{1,0}}{E_1 I_1} - \frac{Q_{2,0}}{E_2 I_2} \right) x - \left(\frac{M_{1,0}}{E_1 I_1} - \frac{M_{2,0}}{E_2 I_2} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

(5) または (6) および (8), (9) より未知量 $w(x)$, y および $s(x)$ を決定することができる。一般に $s \frac{dy}{dx}$ は微小量なる故これを (9) にて省略し若干の計算を行うと次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} w(x) &= Bq(x) - C \int_0^x \int_0^x q dx_2 - Q_0 x + \bar{M}_0 \\ &+ \int_0^x [D(x-t) + H] w(t) dt \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

(B, C, D, H は (15) を参照)

(10) は Volterra 型の積分方程式で $q(x)$ があたえられると解くことができる¹⁾。この $w(x)$ を (8) に入れると y が求められる。いま上下の梁の材料、断面が等しい場合を考えると

$$E_1 I_1 = E_2 I_2 = EI, \quad k_1 E_1 F_1 = k_2 E_2 F_2 = kEF$$

とおき (8) および (9) を変形すると

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{d^2 y}{dx^2} &= -\frac{q}{kGF} + \frac{1}{EI} \int_0^x \int_0^x q dx^2 \\ &- \frac{2\eta}{EI} \int_0^x s(x) dx + \frac{Q_0}{EI} x - \frac{M_0}{EI} \\ 2w - 2s \frac{dy}{dx} - q &= a^2 (\bar{M}_0 - Q_0 x) \\ &+ a^2 \int_0^x (x-t) \left[2w(t) - 2s(t) \frac{dy}{dx} - q(t) \right] dt \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9')$$

ただし、 $a^2 = \frac{kGF}{EI}$, $Q_0, Q_0, M_0, \bar{M}_0$ は積分常数。
 M_0, Q_0 は釣合の条件から決定せられ結果を示すと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} Q_0 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} x q dx + \int_{-l}^{+l} q dx \right\} - \int_0^l q dx \\ M_0 &= \frac{1}{2} \left\{ l \int_{-l}^l q dx + \int_{-l}^l x q dx \right\} \\ &- 2\eta \int_0^l s(x) dx - \int_0^l x q dx \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

(10) を解くと

$$\left. \begin{aligned} w(x) &= s(x) \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2} \\ &\{ q + a^2 \bar{M}_0 \cosh ax - a Q_0 \sinh ax \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

本式で

(1) $r=0$ の範囲

$$\left. \begin{aligned} w(x) &= \frac{A_0}{I_0} Q(x) \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2} \\ &\{ q + a^2 \bar{M}_0 \cosh ax - a Q_0 \sinh ax \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13. 1)$$

(2) $r>0$ の範囲

$$\left. \begin{aligned} \left[1 + u \frac{dy}{dx} \right] w(x) &= \frac{1}{2} \\ &\{ q + a^2 \bar{M}_0 \cosh ax - a Q_0 \sinh ax \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13. 2)$$

$u \frac{dy}{dx}$ を省略すると

$$\left. \begin{aligned} w(x) &\doteq \frac{1}{2} \\ &\{ q + a^2 \bar{M}_0 \cosh ax - a Q_0 \sinh ax \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13. 3)$$

以上二つの場合について議論することが必要なのであるが、本文では専ら (2) の場合につきしらべることにして、先ず常数 $\bar{M}_0, Q_0$ を上梁の釣合条件から決定すると (計算省略)

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_0 &= \frac{1}{2l \sinh al} \int_{-l}^l q dx \\ Q_0 &= \frac{a}{2(\sinh al - al \cosh al)} \int_{-l}^l x q dx \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

表 — 1

Loading state	M_0	Q_0	$\bar{M}_0$	$\bar{Q}_0$
	$\frac{qL^2}{2} \left(1 - 4u \frac{\eta}{l} \right)$	0	$\frac{qL}{2 \sinh al}$	0
	$\frac{Pl}{2} \left(1 - \frac{l}{L} - 4u \frac{\eta}{l} \left(3 + \frac{4u(\cosh l - 1)}{2 \sinh l} \right) \right)$	$\frac{P}{2} \left(\frac{l}{L} - 1 \right)$	$\frac{P}{2 \sinh al}$	$\frac{PlL_0}{2(\sinh al - l \cosh al)}$
	$\frac{qdL}{2} \left(1 - \frac{l}{L} - 4u \frac{\eta}{l} \left(3 + \frac{4u(\cosh l - 1)}{2 \sinh l} \right) \right)$	$\frac{qd}{2} \left(\frac{l}{L} - 1 \right)$	$\frac{qd}{2 \sinh al}$	$\frac{qdL_0}{2(\sinh al - l \cosh al)}$
	$\frac{qdL^2}{4} \left(1 - 4u \frac{\eta}{l} \left(5 + \frac{4u(\cosh l - 1)}{2 \sinh l} \right) \right)$	$-\frac{qdL}{12}$	$\frac{qdL}{2 \sinh al}$	$\frac{qdL^2}{6(\sinh al - l \cosh al)}$

1) E. T. Whittaker and G. N. Watson: A course of modern analysis. p. 221.

かくして $M_0, Q_0, \bar{M}_0, \bar{Q}_0$ なる積分常数が定まつたので、色々な荷重状態に対するこれらの値を計算すると表—1 のようになる。

ここに (10) における常数 B, C, D および H は次の値をとるものである。

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{1}{1 + \frac{k_1 G_1 F_1}{k_2 G_2 F_2}} \\ C &= \frac{\frac{k_1 G_1 F_1}{E_1 I_1}}{1 + \frac{k_1 G_1 F_1}{k_2 G_2 F_2}} \\ D &= \frac{\frac{1}{E_1 I_1} + \frac{1}{E_2 I_2}}{\frac{1}{k_1 G_1 F_1} + \frac{1}{k_2 G_2 F_2}} \\ H &= \frac{\pm u \left(\frac{\eta_1}{E_1 I_1} - \frac{\eta_2}{E_2 I_2} \right)}{\frac{1}{k_1 G_1 F_1} + \frac{1}{k_2 G_2 F_2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

また両梁の相対的静止点 $x=a$ は次式により求められる。

$$\left. \begin{aligned} & \alpha \bar{M}_0 \sinh \alpha a - Q_0 (\cosh \alpha a - \cosh \alpha l) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_a^l q dx - \int_{-l}^a q dx \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

本式は a について超越方程式になるから図式解によるのが便利である。ただし、原点に対して荷重が対称なる場合は明らかに

$$a = 0 \dots\dots\dots (17)$$

となる。

5. 計算例

いま等分布荷重を受ける二重梁について上記の公式を応用して見る。ただし、 u はあまり大でなく $x=a$ 以外の点は、ことごとく相対的な滑りを生ずるものと仮定する。

先ず (13. 3) より

$$w(x) = \frac{1}{2} \{ q + \alpha^2 \bar{M}_0 \cosh \alpha x - \alpha \bar{Q}_0 \sinh \alpha x \}$$

表—1 より

$$\begin{aligned} \bar{M}_0 &= \frac{ql}{\alpha \sinh \alpha l}, \quad \bar{Q}_0 = 0, \\ \therefore w(x) &= \frac{q}{2} \left\{ 1 + \frac{\alpha l}{\sinh \alpha l} \cosh \alpha x \right\} \end{aligned}$$

対称荷重であるから両梁の相対的静止点は $x=0$ である。故に

$$\begin{aligned} s(x) &= uw(x) & l \geq x \geq 0 \\ &= -uw(x) & 0 \geq x \geq -l \end{aligned}$$

表—1 より

$$M_0 = \frac{ql^2}{2} \left(1 - 4u \frac{\eta}{l} \right), \quad Q_0 = 0$$

(8') を積分すると

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2kGF} \int \left[q - \alpha^2 \int_0^x q dx^2 + 2\eta \alpha^2 \int_0^x s(x) dx \right] dx^2 \\ &= -\frac{M_0}{4EI} x^2 + \frac{Q_0}{12EI} x^3 + b_1 x + b_2 \end{aligned}$$

b_1, b_2 は積分常数、本式の中に $s(x)$ を入れて積分すると

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{q}{4EI} \left\{ \frac{x^4}{12} - u \frac{\eta}{6} x^3 - \frac{x^2}{\alpha^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{u\eta l}{\alpha^2 \sinh \alpha l} \sinh \alpha x \right\} \\ &\quad - \frac{M_0}{4EI} x^2 + b_1 x + b_2 \quad l \geq x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y}(x) &= \frac{q}{4EI} \left\{ \frac{x^4}{12} + u \frac{\eta}{6} x^3 - \frac{x^2}{\alpha^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{u\eta l}{\alpha^2 \sinh \alpha l} \sinh \alpha x \right\} \\ &\quad - \frac{M_0}{4EI} x^2 + b'_1 x + b'_2 \quad 0 \geq x \geq -l \end{aligned}$$

b_1, b_2, b'_1, b'_2 なる 4 つの積分常数は次の境界条件から決定せられる

$$\begin{aligned} (1) \quad x=0, \quad y=\bar{y}, \quad (2) \quad x=0, \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{d\bar{y}}{dx} \\ (3) \quad x=l, \quad y=0, \quad (4) \quad x=-l, \quad \bar{y} &= 0 \end{aligned}$$

この条件から積分常数の計算を行うと

$$\begin{aligned} b_1 &= -b'_1 = \frac{ql^3}{4EI} - \frac{u}{\alpha l \sinh \alpha l} \frac{\eta}{l} \\ b_2 &= b'_2 = \frac{ql^4}{4EI} \left\{ \frac{5}{12} + \frac{1}{(\alpha l)^2} \right. \\ &\quad \left. - u \frac{\eta}{l} \left(\frac{11}{6} + \frac{1}{\alpha l \sinh \alpha l} - \frac{1}{(\alpha l)^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

かくして未知量 $w(x), s(x)$ および y がすべて求められたことになる。

6. 結 語

以上の計算により、二重梁に対し u があまり大きくない場合の圧力の分布状況および強度にいかなる影響をあたえるかが分つた訳であるが、 u が大きくなつてくると部分的に滑らない領域を生じ問題は更に複雑となる。また u 自身についても本文ではこれを一定として取扱つたが、実際には面圧力および滑りの速度の函数として取扱うのが更に一般的であるように思われる。これがいかなる形をとり、いかなる影響をあたえるかなどの問題が残されており、これらは今後実験にまたなければならぬ。またデベル、ボルトなどにて上下梁を結合した場合、

本文では一応 $s(x) = Kr(x)$ とおいたのであるが、この K についても種々なる場合について測定を必要とする。これらのことは今後の研究をまつて発表する所存である。

7. 合成梁に関する参考文献

Otto Graf und Erwin Brenner: Versuche an Verbundträgern.

Konrad Sattler: Theorie der Verbundkonstruktionen.

Konrad Sattler: Betrachtung über Theorie und Anwendung von Verbundkonstruktionen.

Stahlbau-Verlags GmbH: Ergebnisse der Versuche und Messungen auf dem Gebiet der Verbundweise.

Konrad Sattler: Ein allgemeines Berechnungsverfahren für Trägwerke und elastischen Verbund.

W. Sager: Der Einfluss des Kriechens und Schwindens in Spann-Beton Konstruktionen.

DIN 1078, Blatt und Blatt 2: Verbund Träger Strassen Brücken. Richtlinien für die Berechnung und Ausbildung.

DIN 4239: Verbund-Träger-Hochbau. Richtlinien und Bemessung.

Konrad Sattler: Die Fliessicherheit von Vollwand-Verbundkonstruktionen.

W. Klingenberg: Bridges and Autobahnen in Germany.