

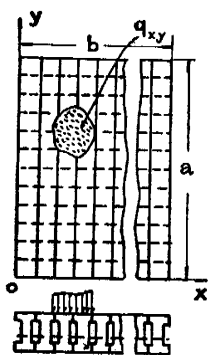
P・S・C 橋における横締めめ力学的効果について

正員 室蘭工業大学 工博 能 町 純 雄

1. は し き

P・S・C 橋における横締めめの理論的効果については殆ど明らかにされていない。従つて設計の指針となるものはないように思われる。同じ弾性梁を隙間なく並列に設置し、梁の方向と直角の方向には密に弾性 string を入れて締つけた場合、これは一種の平板状構造物を形成する。故にこの平板状構造物の釣合の微分方程式を作ればこれを基として、横締めめ力 P によつてどのように荷重が板全体に分担されていくかを解析することができるが、これによつて横締めめの効果を類推できよう。

2. 梁を並列してその直角方向を string で締めた平板の基本微分方程式



図—1

左図のような構造を連続体でおき変えてみよう。先ず次の仮定を設ける。タワミは微小である。従つて梁については平面保持の理論が成立し、string 自身のタワミによる軸力は無視できる。隣り合っている梁は y 方向の垂直応力を伝達せず、string のみが y 方向の力を伝達する。

導入された P・S による断面内の曲げモーメントを M_{0x} 、外力によるモーメントを M_{1x} とす

れば、これによる外力に原因する梁の内部エネルギーは、

$$\int_0^a \frac{1}{2} \frac{M_{1x}}{EI} (M_{1x} + M_{0x}) dx$$

ただし、 EI は梁の曲げ剛度である。また梁がその軸に直角な振れモーメント M_t を受けて φ だけ x 方向の角変化があれば、 GJ を Saint Venante の振れ剛度、 EC_w を H. Wagner の曲げ振れ剛度として、内部エネルギーは

$$\frac{1}{2} \int_0^a EC_w \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^a GJ \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx$$

となる。次に一本の string のタワミによる内部エネルギーは

$$\int_0^b \frac{1}{2} P \left(\frac{dw}{dy} \right)^2 dy$$

ただし、 w はタワミである。従つて全内部歪みエネルギーは梁を s 本、string を t 本とすれば

$$\begin{aligned} V_i = & \sum \int_0^a \frac{M_{1x}}{2EI} (M_{1x} + M_{0x}) dx \\ & + \sum \int_0^a \frac{1}{2} \left\{ EC_w \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)^2 + GJ \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \right\} dx \\ & + \sum \int_0^b \frac{P}{2} \left(\frac{dw}{dy} \right)^2 dy \end{aligned} \quad (1)$$

いま、 N, C, D をそれぞれ y 方向の単位あたりの EI, GJ, EC_w ; p を x 方向の単位あたりの P とし、 m を同じく単位あたりの M とすれば、任意点のタワミ w は

$$\frac{m_{1x}}{N} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varphi = \frac{\partial w}{\partial y}$$

と関係づけられるから (1) 式は近似的に

$$\begin{aligned} V_i = & \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) m_{0x} \right. \\ & \left. + D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)^2 + C \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + p \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \end{aligned} \quad (2)$$

と書くことができる。

上載荷重を q_{xy} とし、 M_{0x} が x の変数であるとすれば、外力によるエネルギーの大きさは

$$\begin{aligned} V_0 = & - \int_0^a \int_0^b \left(w \cdot q_{xy} - \frac{\partial^2 m_{0x}}{\partial x^2} \right) dx dy \\ & - \int_0^b \left[m_{0x} \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=a} dy - \int_0^b \left[\frac{\partial m_{0x}}{\partial x} w \right]_{x=0}^{x=a} dy \end{aligned} \quad (3)$$

となる。

最小仕事の原理により

$$\delta(V_i + V_0) = 0$$

故に

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b \left\{ N \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + C \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - p \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - D \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} \right. \\ \left. - q_{xy} \right\} dx dy + \int_0^b \left[\left(N \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + C \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right. \right. \\ \left. \left. - D \frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial y^2} \right) \delta w \right]_{x=0}^{x=a} dy - \int_0^b \left[\left(N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right. \right. \\ \left. \left. - D \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=a} dy + \int_0^a \left[p \frac{\partial w}{\partial y} \delta w \right]_{y=0}^{y=b} dx = 0 \end{aligned}$$

従つて境界条件として周辺のタワミおよび slope が与えられれば、基本微分方程式は

$$N \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + C \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + p \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q_{xy}, \quad (4)$$

$x = 0, x = a$ における単位長あたりの周辺の反力は

$$R_x = - \left(N \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + C \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3 \partial y^2} \right)$$

また単位長あたりの x 方向曲げモーメントは

$$m_x = -N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}, \quad (5)$$

しかし一般に P・S・C 梁では C_{10} の項は小さくなるこれを無視する。また $y = 0, y = b$ で特に支えがない時には、梁は振り剛性が強いから string によつて回転しないとなすことができる。それで境界条件は

$$y = 0, y = b \text{ で } \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

となる。

3. 両端が単純支持の場合

この場合 $x = a, x = 0$ で $w = 0$ および $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ であれば (5) の $m_x = 0$ を満足するから、荷重項を

$$q_{xy} = \sum_m R_m^{(0)} \sin \frac{m\pi}{a} x + \sum_{m,n} R_{mn}^{(1)} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y$$

ただし

$$m = n = 1, 2, 3, 4, \dots,$$

$$R_m^{(0)} = \frac{2}{ab} \int_0^a \int_0^b q_{xy} \sin \frac{m\pi}{a} x dx dy,$$

$$R_{mn}^{(1)} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q_{xy} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y dx dy$$

なるフーリエ二重級数に展開すれば (5) 式の解は

$$w = \frac{a^4}{N} \sum_m \left(\frac{R_m^{(0)}}{(m\pi)^4} + \sum_n \frac{R_{mn}^{(1)}}{(m\pi)^4} \cos \frac{n\pi}{b} y \right) \sin \frac{m\pi}{a} x - \frac{a^4}{N} \sum_{m,n} \frac{R_{mn}^{(1)} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y}{\pi^4 m^4 \left(n^2 + \frac{m^4 b^2 N \pi^2}{C m^2 a^2 \pi^2 + a^4 p} \right)}, \quad (7)$$

$$m, n = 1, 2, 3, 4, \dots,$$

と書くことができる。上式中第1項は横締めもなく振りもない場合のタワミの式であり、第2項は横締めの効果によるタワミの減少を示している。次に曲げモーメントは

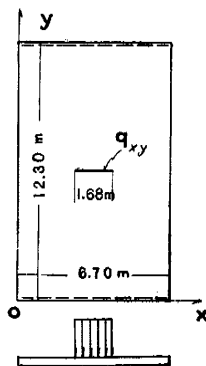
$$-N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = a^2 \sum_m \left(\frac{R_m^{(0)}}{(m\pi)^2} + \sum_n \frac{R_{mn}^{(1)}}{(m\pi)^2} \cos \frac{n\pi}{b} y \right) \sin \frac{m\pi}{a} x - a^2 \sum_{m,n} \frac{R_{mn}^{(1)} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y}{\pi^2 m^2 \left(n^2 + \frac{m^4 b^2 N \pi^2}{C m^2 a^2 \pi^2 + a^4 p} \right)}, \quad (8)$$

上式中第1項は初等的理論による曲げモーメントで第

2項は横締めの効果による曲げモーメントの減少である。

4. 中心部に図のような線荷重が在る場合

線荷重が中央に幅の $1/4$ に渡つて荷重強度 $q \text{ kg}$ で等分布しているとすれば



図—2

$$\left. \begin{aligned} R_m^{(0)} &= \frac{q}{2} \sin \frac{m\pi}{2} \\ R_{mn}^{(1)} &= \frac{8q \sin \frac{m\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{8}}{m\pi} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

従つてモーメントの減少は

$$\sum_m \sum_n \frac{R_{mn}^{(1)} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y}{\pi^2 m^2 \left(n^2 + \frac{m^4 b^2 N \pi^2}{C m^2 a^2 \pi^2 + a^4 p} \right)} = \begin{cases} q a^2 \sum_m \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{a} x}{b \pi^2 m^2} \left\{ Q_m \left(\frac{3b}{8} - y \right) - Q_m \left(\frac{3b}{8} + y \right) \right\}, \\ \quad \left(0 < y < \frac{3}{8} b \right) \\ q a^2 \sum_m \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{a} x}{b \pi^2 m^2} \left\{ -Q_m \left(y - \frac{3}{8} b \right) - Q_m \left(\frac{3b}{8} + y \right) \right\}, \quad \left(b > y > \frac{3}{8} b \right) \end{cases}$$

ただし

$$Q_m(y) = \frac{ch\pi\alpha_m(1-y/b) + ch\pi\alpha_m y/b}{ch\pi\alpha_m + 1}$$

$$\alpha_m = \frac{m^2 b \pi}{a} \sqrt{\frac{N}{C m^2 a^2 \pi^2 + a^4 p}},$$

と書くことができる。図—2のようにスパンを 12.3 m、幅を 6.7 m³⁾、とし梁の断面を

$$EI = 278.780 \text{ cm}^4 \times E^2)$$

$$GJ = 13.174 \text{ cm}^4 \times E^2) \quad (E = 376.000 \text{ kg/cm}^2)$$

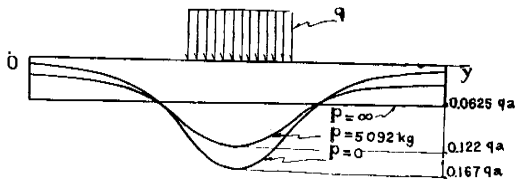
$$C = 393.25 E, \quad N = 8321.8 E$$

と仮定すれば、横締め力 p に対する m_x の中央線上の分布は表—1 のようになる。

表—1 $y = \frac{b}{2}$ に沿う m_x の分析 (qa^2)

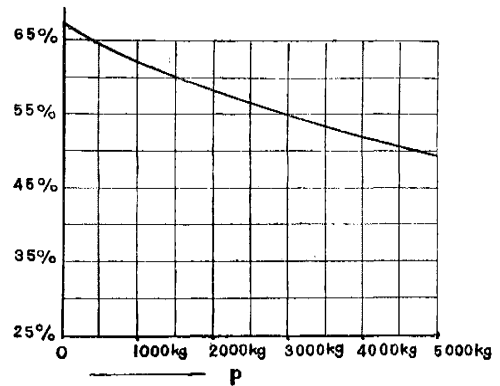
y/b	$p = \infty$	$p = 5092 \text{ kg/cm}$	$p = 500 \text{ kg/cm}$	$p = 0$	初等理論
0	0.0625	0.0354	0.0152	0.0141	0.
$1/8$	0.0625	0.0384	0.0201	0.0174	0.
$2/8$	0.0625	0.0470	0.0382	0.0346	0.
$3/8$	0.0625	0.0869	0.1056	0.1066	0.25
$4/8$	0.0625	0.1224	0.1603	0.1665	0.25

この結果を図示すれば図—3 のようになる。なお、最大曲げモーメントの初等理論値に対する%と横締め力との関係は図—4 のようである。



図—3 $y = \frac{b}{2}$ における M_x の分布

以上を総合するのに、横締め力が僅かでも作用していれば曲げモーメントは広く分担されて最大値の減少することがわかる。また、理論式から次のことが推論される。梁の捩り剛性が大なる程この種構造物の荷重分担効果が大きくなる。



図—4

参考文献

- 1). Timoshenko: Theory of Elasticity 2nd ed.
- 2). 佐伯俊一: プレストレス、コンクリート橋